MATH. SCAND. 17 (1965), 17–40

ALGORITHMEN FÜR EINFACHE KURVEN AUF FLÄCHEN

HEINER ZIESCHANG

1. Einleitung.

Es soll ein Algorithmus entwickelt werden, der die Entscheidung gestattet, ob eine Homotopieklasse auf einer Fläche eine einfache Kurve enthält oder nicht. Ferner geben wir ein Kriterium dafür an, daß ein System von Elementen der Fundamentalgruppe einer Fläche von einer kanonischen Zerschneidung induziert wird oder — was dasselbe ist — ob sich die Abbildung der kanonischen Erzeugenden auf die gegebenen Elemente zu einem Automorphismus der Fundamentalgruppe erweitern läßt. Für beide Fragen hat B. L. Reinhardt [11] schon Algorithmen beschrieben, die aber — auch in der Durchführung — auf nicht-euklidische Geometrie zurückgreifen, während unsere nicht den Rahmen der Gruppentheorie verlassen. Insbesondere für die zweite Frage erweist sich unser Verfahren als einfacher und außerdem mit geringem Aufwand durchführbar.

Der Gedanke besteht darin, daß wir die betrachtete Homotopieklasse durch ein spezielles Element (Wort) der freien Gruppe in den kanonischen Erzeugenden darstellen, und zeigen, daß die Homotopieklasse genau dann eine einfache nicht-zerlegende Kurve enthält, wenn sich dieses Wort durch einen Automorphismus der *freien* Gruppe in eine der kanonischen Erzeugenden überführen läßt. Ein solcher Automorphismus muß dabei die »kanonische Relation« invariant lassen. Damit haben wir die Aufgabe auf ein von J. H. C. Whitehead [13] und E. S. Rapaport [9] gelöstes Problem über die Auffindung solcher Automorphismen zurückgeführt.

Auf diesem Wege müssen wir zunächst Betrachtungen zu Dehn's Lösung des Wortproblemes für ebene diskontinuierliche Gruppen anstellen und jedes Element eindeutig als Wort in den kanonischen Erzeugenden schreiben. Anschließend bringen wir einfache Kurven auf Normalform bezüglich einer kanonischen Zerschneidung und wenden das schließlich auf die algorithmischen Fragen an. Vorweg haben wir die Bezeichnungen zusammengestellt. Alle topologischen Betrachtungen seien als semilineare zu verstehen. — Die Hauptresultate dieser Arbeit sind ohne Beweise schon in [14] angegeben worden.

Eingegangen am 9. Januar 1965.

2. Bezeichnungen.

Die Gruppe $\mathfrak{F}$ sei durch

(2.1) Erzeugende $s_1,\ldots,s_m,t_1,u_1,\ldots,t_g,u_g$,

definierende Relation $s_1\ldots s_m \prod_{i=1}^{g} [t_i,u_i] = 1$

oder durch

(2.2) Erzeugende $s_1,\ldots,s_m,v_1,\ldots,v_g$,
definierende Relation $s_1\ldots s_m v_1^2\ldots v_g^2 = 1$

erklärt, wobei $m,g\geqq 0$ sei und für (2.2) $g>0$. Das Symbol $[t_i,u_i]$ bezeichne den Kommutator $t_iu_it_i^{-1}u_i^{-1}$. Um eine einheitliche Darstellung zu erzielen, numerieren wir die Erzeugenden durch und bekommen

(2.3) Erzeugende $h_1,\ldots,h_n$,
definierende Relation $\Pi_*(h) = 1$,

wobei $n=m+2g$ bzw. $=m+g$ ist und $\Pi_*(h)$ die betreffende Relation bezeichnet.

Es sei $\hat{\mathfrak{G}}$ die freie Gruppe mit freien Erzeugenden

(2.4) $$H_1,\ldots,H_n\,,$$

und durch $H_i \to h_i$ sei der Standardhomomorphismus $\hat{\mathfrak{G}} \to \mathfrak{F}$ definiert. Seien $k_1,\ldots,k_m$ natürliche Zahlen größer 1, und $\hat{\mathfrak{N}}$ sei der kleinste Normalteiler in $\hat{\mathfrak{G}}$, welcher $H_1^{k_1},\ldots,H_m^{k_m}$ und $\Pi_*(H)$ umfaßt. Hierbei fassen wir Π_* als formales Wort auf, dessen Lettern wir dann durch die Elemente h bzw. H ersetzen. Ferner werde $H_i^{-k_i}=S_i^{-k_i}$ mit $\Pi_i(H)$ bezeichnet. Sei $\mathfrak{G}=\hat{\mathfrak{G}}/\hat{\mathfrak{N}}$. Der Einfachheit wegen setzen wir $k_1,\ldots,k_m$, $n\geqq 7$, voraus. Durch verfeinerte Schlüsse kann man die Schranke leicht auf 6 und für die Gruppen $\mathfrak{F}$ sogar auf 5 drücken. Ausgeschlossen bleiben die Fundamentalgruppen der höchstens vierfach gelochten Sphäre, des Torus, der höchstens zweifach gelochten projektiven Ebene und der Kleinschen Flasche. Im folgenden werden wir Kurven auf einer Fläche betrachten, die $\mathfrak{F}$ als Fundamentalgruppe besitzt. Die Kurven bezeichnen wir mit griechischen Buchstaben, ihre Homotopieklassen auf $\mathfrak{F}$ mit korrespondierenden lateinischen Buchstaben nach folgender Tabelle:

Kurven	χ	$\varkappa$	σ	τ	μ	ν
Elemente aus $\mathfrak{F}$	h	k	s	t	u	v
Elemente aus $\hat{\mathfrak{G}}$	H	K	S	T	U	V ,

wobei korrespondierende Elemente aus $\mathfrak{F}$ und $\hat{\mathfrak{G}}$ durch den Standardhomomorphismus aufeinander bezogen sind. Die Übergänge zwischen

Elementen aus einer der Gruppen und Kurven bzw. zwischen Elementen aus $\mathfrak{F}$ und solchen aus $\hat{\mathfrak{G}}$ werden wir im folgenden zwanglos durchführen.

In der freien Gruppe $\hat{\mathfrak{G}}$ bedeute die Länge $l(X)$ die Anzahl, in der die Erzeugenden $H_1, \ldots, H_n$ im reduzierten Wort zu X auftreten. Sei

$$\Lambda_* = l\big(\Pi_*(H)\big) = \begin{cases} m+4g & \text{für } \hat{\mathfrak{G}} \text{ zu } (2.1) \\ m+2g & \text{für } \hat{\mathfrak{G}} \text{ zu } (2.2)\,. \end{cases}$$

Ferner sei $\Lambda_i = l\big(\Pi_i(H)\big) = k_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Buchstäbliches Übereinstimmen zweier Worte $W(H)$ und $V(H)$ in den Symbolen $H_1, \ldots, H_n$ werde durch $W(H) \simeq V(H)$ bezeichnet. Bis auf zyklische Vertauschung buchstäbliche Identität drücken wir durch $W(H) \circlearrowleft V(H)$ aus.

3. Zur Dehnschen Lösung des Wortproblemes.

Es mag auf den ersten Blick scheinen, daß die in der Literatur gegebenen Lösungen für das Wortproblem der ebenen diskontinuierlichen Gruppen ([2], [3], [7], [10, S. 202ff.]) die folgenden Erörterungen unnötig machen, und es ist nicht so offensichtlich, an welche Stelle sie gehören. Deshalb soll eine allgemeine Betrachtung vorausgeschickt werden, in der auf eine Lücke in den üblicherweise gestellten Aufgaben hingewiesen wird.

Es sei eine Gruppe $\mathfrak{H}$ durch Erzeugende und definierende Relationen gegeben. Der Zusammenhang zwischen Worten in den Erzeugenden und den Elementen von $\mathfrak{H}$, die sie darstellen, zwingt die folgenden Probleme auf (vergl. etwa [1]):

Identitäts- oder Wortproblem: *Man entscheide, ob ein Wort in den Erzeugenden das Einselement von $\mathfrak{H}$ darstellt oder nicht.*

Wenn man für dieses Problem einen Algorithmus (natürlich für die gegebenen speziellen Erzeugenden und definierenden Relationen) besitzt, kann man offenbar von je zwei gegebenen Worten entscheiden, ob sie dasselbe Element von $\mathfrak{H}$ definieren oder nicht. Damit wird aber nicht das folgende Problem gelöst, welches etwa bei der Untersuchung der Gruppe der Relationen auftritt:

Problem der Repräsentanten: *Man bestimme mittels einer »vernünftigen« Vorschrift zu jedem Element von $\mathfrak{H}$ eindeutig ein Wort, welches das Element darstellt.*

Mit anderen Worten suche man Repräsentanten für die Restklassen in der Gruppe, die von den Erzeugenden von $\mathfrak{H}$ frei erzeugt wird, nach dem Normalteiler der Relationen. Eine weitere Aufgabe ist das

Transformationsproblem: *Man entscheide, ob zwei Worte zueinander* *konjugierte Elemente von $\mathfrak{H}$ darstellen oder nicht.*

Eine Lösung aller drei Probleme läßt noch das Folgende offen:

PROBLEM DER REPRÄSENTANTEN FÜR KLASSEN KONJUGIERTER ELEMENTE: *Für jedes System konjugierter Elemente bestimme man eindeutig (etwa bis auf zyklische Permutation der Buchstaben) ein Wort, welches eines der Elemente dieser Konjugationsklasse darstellt.*

In der Einleitung der Arbeit [1] von M. Dehn sind das Wort- und Transformationsproblem als fundamental neben das Isomorphieproblem für unendliche diskontinuierliche Gruppen gestellt worden. Die beiden anderen Probleme sind in der Literatur wenig beachtet worden, obgleich sie doch für feinere Untersuchungen bedeutungsvoll sind. Wir wollen nun die uns interessierenden Gruppen $\mathfrak{G}$ unter diesem allgemeinen Konzept behandeln. Das Wortproblem ist von M. Dehn [2] und M. Greendlinger [3], [4] wie folgt gelöst (siehe auch R. C. Lyndon [7]):

Definiert ein Wort $W(H)$ das Einselement von $\mathfrak{G}$, so kann man es entweder reduzieren als Element der freien Gruppe $\hat{\mathfrak{G}}$, oder es enthält ein Teilwort, welches mehr als die Hälfte einer der definierten Relationen $S_1{}^{k_1}, \ldots S_m{}^{k_m}$, $\Pi_*(H)$ oder deren Inversen ausmacht.

Das Problem der Repräsentanten ist in der Literatur nicht gelöst, und es gibt auch keine einfach zu beschreibende Lösung auf Grund dieser Lösung des Wortproblemes. Wir wollen dieses Problem nun behandeln und anschließend auf das Transformationsproblem zu sprechen kommen. Es sei nur darauf hingewiesen, daß man das Repräsentantenproblem ebenfalls lösen kann, indem man die betrachteten Gruppen als freie Produkte mit vereinigten Untergruppen darstellt und die dafür in [8] beschriebene Lösung des Wortproblemes ausnutzt.

Die genannte Lösung des Wortproblems legt es nahe, unter den Worten $W(H)$ mit folgenden Eigenschaften nach Repräsentanten zu suchen:

(3.1) W ist ein reduziertes Wort in den Erzeugenden $H_1, \ldots, H_n$ von $\hat{\mathfrak{G}}$.

(3.2) W enthält kein Teilwort, welches mehr als die Hälfte der Relationen $\Pi_*(H), S_1{}^{-k_1}, \ldots, S_m{}^{-k_m}$ oder deren Inversen ausmacht.

Wenn nun W ein Teilwort enthält, welches genau eine Hälfte einer definierenden Relation ist, wobei die Nachbarelemente die Relation nicht fortsetzen, so können wir diese Hälfte durch die andere mit dem Exponenten -1 versehen ersetzen und (3.1) und (3.2) bleiben erfüllt. Wir brauchen daher eine Vorschrift, welche eine Hälfte auszeichnet. Für geometrische Zwecke erwies sich die folgende als günstig:

(3.3′) Die Hälfte von $\Pi_*^{\varepsilon}(H)$ enthält S_m^{ε} (für $g=0$) bzw. $U_g^{-\varepsilon}$ oder V_g^{ε} (bei $g>0$). Ist k_i gerade, so tritt $S_i^{\frac{1}{2}k_i}$ nicht auf.

Wenn wir eine Hälfte von $\Pi_*^{\varepsilon}(H)$ durch die andere ersetzen, so gehört diese $\Pi_*^{-\varepsilon}(H)$ an. Deshalb könnten wir auch die folgende Normierung nehmen, die für algebraische Zwecke schöner ist:

(3.3″) W enthält kein Teilwort, welches eine Hälfte von $\Pi_*^{-1}(H)$ ausmacht. Für gerades k_i tritt $S_i^{\frac{1}{2}k_i}$ nicht auf.

Leider sind (3.1), (3.2), (3.3′) bzw. (3.3″) noch nicht genug, um Repräsentanten zu definieren. Durch (3.3) werde entweder (3.3′) oder (3.3″) bezeichnet, und zwar sei dann in allem, was folgt, immer dieselbe Normierung darunter verstanden.

Wir wollen ein Wort X als *Halbrand einer Kette der Länge k* bezeichnen, wenn es folgende Form hat:

(3.4) X erfüllt (3.1), (3.2) und (3.3)

(3.5) $X \cong Y_1 \cdot Y_2 \ldots Y_k$, wo jedes Y_j ein Teilwort von einem $\Pi_{r(j)}(H)$ oder $\Pi_{r(j)}^{-1}(H)$ ist, $r(j)=*,1,\ldots,m$.

(3.6) Durch Zufügen gewisser $H_{\alpha_j}^{\varepsilon_j}$ ($j=0,\ldots,k$; $H_{\alpha_0}=H_{\alpha_k}=1$, $H_{\alpha_j}\neq 1$, $1\leqq j<k$) erhält man das Wort

$$H_{\alpha_0}^{-\varepsilon_0}\, Y_1\, H_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\, H_{\alpha_1}^{-\varepsilon_1}\, Y_2\, H_{\alpha_2}^{\varepsilon_2} \ldots H_{\alpha_{k-1}}^{-\varepsilon_{k-1}}\, Y_k\, H_{\alpha_k}^{\varepsilon_k}$$

Dabei sei $H_{\alpha_{j-1}}^{-\varepsilon_{j-1}}\, Y_j\, H_{\alpha_j}^{\varepsilon_j}$ reduziert und ein Teil einer Relation $\Pi_{r(j)}(H)$ oder $\Pi_{r(j)}^{-1}(H)$ ($j=*,1,\ldots,m$). Sei $\tilde{Y}_j^{-1}$ der andere Teil:

$$\Pi_{r(j)}^{\eta_j}(H) \circlearrowleft H_{\alpha_{j-1}}^{-\varepsilon_{j-1}}\, Y_j\, H_{\alpha_j}^{\varepsilon_j}\, \tilde{Y}_j^{-1}$$

dann besitzt

$$\tilde{X} \cong \tilde{Y}_1\, \tilde{Y}_2 \ldots \tilde{Y}_k$$

ebenfalls die Eigenschaften (3.1), (3.2) und (3.3).

Offenbar ist $\tilde{X}$ gleichfalls ein Halbrand einer Kette der Länge k, und diese Halbränder definieren dasselbe Element von $\mathfrak{G}$. Hier ist die bisherige Normierung nicht eindeutig. Übrigens besagt (3.3) gerade, daß es keine Halbränder von Ketten der Länge 1 gibt.

Die geometrische Bezeichnung für Halbränder wird durch die Arbeit [2] von M. Dehn nahegelegt, und wir wollen kurz seine Deutung geben: Die Relationen fassen wir als Ränder von Flächenstücken auf (etwa im ebenen Gruppenbild). Dann sei eine Kette der Länge k eine Folge von k Flächenstücken, in der benachbarte genau eine Strecke gemeinsam haben. Indem wir den Rand des ersten und des letzten Flächenstückes aufteilen, bekommen wir zwei Halbränder. Um (3.4–6) zu erfüllen, müssen die

Strecken, die benachbarte Flächenstücke trennen, gewissen Bedingungen genügen, die sich aus (3.5) und (3.6) unschwer ablesen lassen. Im folgenden versuchen wir, aus den beiden Halbrändern einer Kette einen zu bestimmen und geben dadurch Bedingungen für die Repräsentanten.

Sei $X \simeq Y_1 Y_2 \ldots Y_k$ ein Halbrand einer Kette der Länge $k > 1$. Dann ist der in (3.6) beschriebene Halbrand $\tilde{X} \simeq \tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2 \ldots \tilde{Y}_k$ eindeutig bestimmt; denn wegen $\Lambda_i \geqq 7$ ist $l(Y_j) \geqq 2$, und damit ist $\Pi^{\eta(j)}_{r(j)}(H)$ schon festgelegt.

(3.7)
$$\begin{aligned} l(Y_j), l(\tilde{Y}_j) &\leqq \tfrac{1}{2}\Lambda_{r(j)}, & 1 \leqq j \leqq k\,, \\ l(Y_j) + l(\tilde{Y}_j) &= \Lambda_{r(j)} - 2, & 1 < j < k\,, \\ l(Y_1) + l(\tilde{Y}_1) &= \Lambda_{r(1)} - 1, & \\ l(Y_k) + l(\tilde{Y}_k) &= \Lambda_{r(k)} - 1\,, & \end{aligned}$$

wenn Y_j und $\tilde{Y}_j^{-1}$ Teile der Relation $\Pi^{\pm 1}_{r(j)}(H)$ sind. Das ist eine direkte Folge aus der Tatsache, daß X und $\tilde{X}$ die Eigenschaften (3.1–3) besitzen und daß

$$\Pi^{\eta_j}_{r(j)}(H) \circlearrowleft H^{-\varepsilon_{j-1}}_{\alpha_{j-1}} Y_j H^{\varepsilon_j}_{\alpha_j} \tilde{Y}_j^{-1}\,.$$

(3.8) Das letzte Zeichen von Y_{j-1} bzw. das erste Zeichen von Y_{j+1} setzt Y_j nicht zu einem Teilwort einer definierenden Relation fort. Dasselbe gilt für die $\tilde{Y}$ statt der Y.

Es wird Y_j durch $H^{-\varepsilon_{j-1}}_{\alpha_{j-1}}$ zu einem Teilwort der Relation fortgesetzt und Y_{j-1} durch $H^{\varepsilon_{j-1}}_{\alpha_{j-1}}$. Da Y_j eine Länge größer als 1 hat, ist das Zeichen, welches Y_j zu einem Teilwort der Relation fortsetzt, eindeutig bestimmt. Deshalb müßte Y_{j-1} mit $H^{-\varepsilon_{j-1}}_{\alpha_{j-1}}$ enden, wenn Y_j fortgesetzt würde. Dann kann aber

$$\Pi^{\eta_{j-1}}_{r(j-1)}(H) \circlearrowleft H^{-\varepsilon_{j-2}}_{\alpha_{j-2}} Y_{j-1} H^{\varepsilon_{j-1}}_{\alpha_{j-1}} \tilde{Y}_{j-1}^{-1}$$

nicht gelten, da auf der rechten Seite eine Stelle $H^{-\varepsilon_{j-1}}_{\alpha_{j-1}} H^{\varepsilon_{j-1}}_{\alpha_{j-1}}$ vorkommt.

(3.9) Das Wort W genüge den Forderungen (3.1–3) und enthalte zwei Halbränder $X \simeq Y_1 Y_2 \ldots Y_k$ und $X' \simeq Y_1' Y_2' \ldots Y_k'$ von Ketten als Teilworte. Wenn X und X' nicht disjunkt sind und mehr als ein gemeinsames Zeichen besitzen, so ist das kleinste X und X' umfassende Teilwort von W ebenfalls Halbrand eine Kette.

Offenbar können wir uns auf den Fall beschränken, in dem weder X das X' noch umgekehrt umfaßt und in dem X' im Innern von X beginnt, X im Innern von X' endet. Das erste Zeichen von X' liege in Y_i. Dann haben wir

$$Y_i \cong \hat{Y}_i Z, \qquad Y_1' \cong Z \hat{Y}_1', \qquad l(Z) \geqq 1\,.$$

Ist $l(Z)=1$, so wird Y_{i+1} durch Z zu einem Teilwort der Relation fortgesetzt, woraus wegen (3.8) $i=k$ folgt. Dann aber haben X und X' nur ein Zeichen gemeinsam.

Sei nun $l(Z)>1$ und $l(\hat{Y}_1')>0$. Dann setzt $\hat{Y}_1'$ das Y_i zu einem Teilwort einer Relation fort, da ein aus mehr als einem Zeichen bestehender Teil einer Relation die Relation und den Durchlaufsinn schon festlegt. Die Relation sei $\Pi_r(H)$. Nach (3.7) ist das nur für $i=k$ möglich. Dann muß $l(Y_k)=\frac{1}{2}\Lambda_r-1$ sein[1]; denn die nach (3.7) noch mögliche Länge $\frac{1}{2}\Lambda_r$ scheidet aus, da Y_k durch ein Zeichen aus W fortgesetzt wird und W der Bedingung (3.2) genügt. Ferner folgt $l(\hat{Y}_1')=1$ und $l(\hat{Y}_k)=0,1$. Es gelten nun die Gleichungen

$$(3.10) \qquad H_{\alpha_{k-1}}^{-\varepsilon_{k-1}} Y_k \tilde{Y}_k^{-1} \cong \Pi_r^{\delta}(H), \qquad Y_1' H_{\alpha_1'}^{\varepsilon_1'} \tilde{Y}_1'^{-1} \cong \Pi_r^{\delta'}(H)\,.$$

Da Y_k und Y_1' mehr als zwei Zeichen gemeinsam haben, ist $\delta=\delta'$. Wenn wir nun unter (3.3) die Normierung (3.3″) verstehen, so muß $\delta=-1$ sein, weil $l(\tilde{Y}_k)=\frac{1}{2}\Lambda_r$ ist und $\tilde{Y}_1\tilde{Y}_2\ldots\tilde{Y}_k$ (3.3″) erfüllt, d.h. $\tilde{Y}_k^{-1}$ ist Teilwort von $\Pi_r^{-1}(H)$. Nun ist $\hat{Y}_k Z \hat{Y}_1'$ ein Teilwort von W und eines von $\Pi_r^{-1}(H)$. Ferner ist

$$l(\hat{Y}_k Z \hat{Y}_1') = l(Y_k)+l(\hat{Y}_1') \geqq (\tfrac{1}{2}\Lambda_r-1)+1 = \tfrac{1}{2}\Lambda_r\,,$$

was mit (3.3″) nicht verträglich ist. Indem man analoge Betrachtungen durchführt, wenn $l(\hat{Y}_i)>0$ ist, erhält man das Resultat: Bedeutet (3.3) die Normierung (3.3″) so folgt aus $l(Z)>1$, daß $Y_i=Y_1'$, $i\leqq k$.

Da unter diesen Umständen X und X' mehr als ein Zeichen gemeinsam haben, erhalten wir ein ähnliches Resultat für das Ende von X. Damit haben wir

$$Y_i=Y_1', \quad Y_{i+1}=Y_2', \quad \ldots, \quad Y_k=Y_j', \qquad j<k'\,,$$

und das kleinste X und X' umfassende Teilwort ist buchstäblich gleich

$$Y_1\ldots Y_{i-1}\,Y_i\ldots Y_k\,Y_{j+1}'\ldots Y_{k'}' \cong X^+\,.$$

Wir fügen nun die H wie folgt ein:

$$H_{\alpha_0}^{-\varepsilon_0}\,Y_1\,H_{\alpha_1}^{\varepsilon_1}\ldots H_{\alpha_{i-1}}^{-\varepsilon_{i-1}}\,Y_i\,H_{\alpha_1'}^{\varepsilon_1'}\,H_{\alpha_1'}^{-\varepsilon_1'}\ldots H_{\alpha'_{k'-1}}^{-\varepsilon'_{k'-1}}\,Y_{k'}'\,H_{\alpha'_{k'}}^{\varepsilon'_{k'}}\,,$$

wobei die $H_{\alpha_r'}$ zu X' gehörig sind. Dann erfüllt

$$\tilde{Y}_1\ldots\tilde{Y}_{i-1}\,\tilde{Y}\,\tilde{Y}_2'\ldots\tilde{Y}_{k'}'$$

die Forderungen (3.1–3″); dabei ist $\tilde{Y}$ durch

---

[1] **Wenn in einer Längengleichung auf einer Seite eine gebrochene Zahl steht (Λ_r ungerade), so betrachten wir die Aussagen als leer.**

$$H_{\alpha_{i-1}}^{-\varepsilon_{i-1}}\, Y_i\, H_{\alpha_1'}^{\varepsilon_1'}\, \tilde{Y}^{-1} \circlearrowleft \Pi_{r(i)}^{\pm 1}(H)$$

definiert, was wegen

$$H_{\alpha_{i-1}}^{-\varepsilon_{i-1}}\, Y_i\, \tilde{Y}_i^{-1} \circlearrowleft \Pi_{r(i)}^{\pm 1}(H) \qquad \text{und} \qquad Y_i\, H_{\alpha_1'}^{\varepsilon_1'}\, \tilde{Y}_1'^{-1} \circlearrowleft \Pi_{r(i)}^{\pm 1}(H)$$

möglich ist. $\tilde{Y}^{-1}$ ist bis auf das erste Zeichen gleich $\tilde{Y}_i^{-1}$, oder bis auf das letzte Zeichen gleich $\tilde{Y}_1'^{-1}$.

Wenn wir die Normierung (3.3′) zugrunde legen, müssen wir nach den Gleichungen (3.10) in anderer Weise weiterschließen. Da Y_k durch $\hat{Y}_1'$ zu einem Teilwort einer definierenden Relation fortgesetzt wird, ist $l(Y_k) = \frac{1}{2}\Lambda_r - 1$. Deswegen enthält $\tilde{Y}_k$ das für die Normierung kritische Element. Da $\hat{Y}_k\, Z\, \hat{Y}_1'$ die Länge $\frac{1}{2}\Lambda_r$ hat und ein Teilwort der Relation bildet, ist $\hat{Y}_1'$ das kritische Element. Daraus folgt $l(Y_1') = \frac{1}{2}\Lambda_r$. Wenn wir Y_k durch $\hat{Y}_1'$ verlängern zu Y_1', so bildet $Y_1 \ldots Y_{k-1}\, Y_1'$ ebenfalls den Halbrand einer Kette und auch $Y_1 \ldots Y_{k-1}\, Y_1' \ldots Y_{k'}'$, wie analog zu oben gezeigt werden kann. Entsprechend schließt man bei $l(\hat{Y}_k) > 0$. Damit ist (3.9) bewiesen.

(3.11) *W* erfülle (3.1–3), und es sei *X* ein in *W* enthaltener Halbrand. Ersetzen wir nun *X* durch $\tilde{X}$, so entsteht aus *W* ein Wort $\tilde{W}$, und es gilt: Verstehen wir unter (3.3) die Normierung (3.3″), so erfüllt auch $\tilde{W}$ (3.1–3″). Handelt es sich um die Normierung (3.3′), so erfüllt $\tilde{W}$ entweder (3.1–3′) oder $\tilde{X}$ beginnt bzw. endet (oder beides) mit dem kritischen Zeichen und dieses läßt sich gegen das vorangehende bzw. folgende Zeichen aus *W* kürzen. Nach diesen (maximal 2) Kürzungen sind (3.1), (3.2) und (3.3′) erfüllt.

Sei

$$W \cong \ldots Z'\, Z\, X \ldots \qquad \text{und} \qquad l(Z) = l(Z') = 1\,.$$

Dann ist

$$\tilde{W} \cong \ldots Z'\, Z\, \tilde{X} \ldots,$$

wobei wieder

$$X \cong Y_1\, Y_2 \ldots Y_k \qquad \text{und} \qquad \tilde{X} \cong \tilde{Y}_1\, \tilde{Y}_2 \ldots \tilde{Y}_k$$

ist. Wenn nun $\tilde{Y}_1$ die beiden Zeichen $Z'\, Z$ kürzt, so hätte $Z'\, Z$ das Y_1 zu einem Teilwort der Relation verlängert, was wegen $l(Y_1) \geqq \frac{1}{2}\Lambda_{r(1)} - 1$ der Eigenschaft (3.2) widerspricht. Also kann $\tilde{Y}_1$ maximal ein Zeichen Z kürzen. Dann verlängert Z das Wort Y_1 zu einer Hälfte der Relation $\Pi_{r(1)}^{\varepsilon}(H)$. Es ist aber $\tilde{Y}_1$ ebenfalls eine Hälfte von $\Pi_{r(1)}^{-\varepsilon}(H)$. Unter der Normierung (3.3″) kann das nicht sein, d.h. $\tilde{W}$ ist reduziert.

Analog folgt aus der Reduziertheit von W, daß Z das Wort $\hat{Y}_1$ nicht zu einem Teilwort der Relation fortsetzt. Und da alle vorhandenen Hälften (3.3″) erfüllen, gelten (3.1–3″) für $\tilde{W}$.

Mit der Normierung (3.3′) ergibt sich, daß Z^{-1} das kritische Zeichen von $\tilde{Y}_1$ sein muß, und dann ist eine Kürzung möglich. Das nächste Zeichen Z' kann den Rest von $\tilde{Y}_1$ nicht zu einem Teilwort der Relation fortsetzen, da es dann gleich Z^{-1} sein muß und W reduziert war.

(3.12) W erfülle (3.1–3). Seien X und X' zwei Halbränder von Ketten, die ein Zeichen gemeinsam haben. Ersetzen wir X' durch $\tilde{X}'$, so entsteht aus W ein Wort $\tilde{W}$, welches (3.1–3) genügt und den Halbrand $X\,\tilde{X}'$ enthält. Unter der Normierung (3.3′) müssen wir eventuell am Ende von $\tilde{X}'$ das kritische Zeichen einmal wegkürzen.

Es ist

$$W \cong \ldots Y_1 \ldots Y_{k-1}\, \hat{Y}_k\, Z\, Y_1'\, Y_2' \ldots Y_{k'}' \ldots$$

mit

$$Y_k \cong \hat{Y}_k\, Z, \qquad Y_1' \cong Z\, \hat{Y}_1' \qquad l(Z) = 1\,.$$

Dann ist

$$\tilde{W} \cong \ldots Y_1 \ldots Y_{k-1}\, \hat{Y}_k\, \tilde{Y}_1'\, \tilde{Y}_2' \ldots \tilde{Y}_k' \ldots .$$

$\hat{Y}_k$ und $\tilde{Y}_1'$ können sich gegenseitig nicht absorbieren. Sonst wäre

$$Y_k \cong \ldots Z'\, Z \qquad \text{und} \qquad \tilde{Y}_1' \cong Z'^{-1} \ldots$$

sowie

$$H_{\alpha_{k-1}}^{-\varepsilon_{k-1}} \ldots Z'\, Z\, \tilde{Y}_k^{-1} \circlearrowleft \Pi^{\varepsilon}_{r(k)}(H) \qquad \text{und} \qquad \ldots Z'\, Z\, \hat{Y}_1'\, H_{\alpha_1'}^{\varepsilon_1'} \circlearrowleft \Pi^{\varepsilon'}_{r'(1)}(H)\,.$$

Da auf beiden Seiten ein Teilwort der Länge 2 steht, ist $r(k) = r'(1)$ und $\varepsilon = \varepsilon'$, und es würde $\hat{Y}_1'$ das Y_k zu einem Teilwort von $\Pi^{\varepsilon}_{r(k)}(H)$ fortsetzen, was wegen zu großer Länge nicht sein kann. Da W reduziert ist, folgt, daß $\hat{Y}_k$ und $\tilde{Y}_1'$ sich gegenseitig nicht zu Teilworten von $\Pi^{\pm 1}_{r(k)}(H)$ verlängern; der Rest der Behauptung folgt aus (3.11).

Wir nennen den Halbrand einer Kette, welcher Teilwort eines Wortes W mit den Eigenschaften (3.1–3) ist, *maximal*, wenn er von keinem Halbrand eine Kette in W echt umfaßt wird. Die nächste Bedingung für Repräsentanten ist:

(3.13) Es gibt in W, welches (3.1–3) erfüllt, keine zwei maximalen Halbränder von Ketten, die genau ein Element gemeinsam haben.

M.a.W. sind maximale Halbränder entweder identisch oder disjunkt. Und schließlich fordern wir noch

(3.14) Der erste Bestandteil eines maximalen Halbrandes ist Teilwort eines $\Pi_i(H)$ (nicht von $\Pi_i^{-1}(H)$).

Wir bemerken nur noch, daß für die Gruppen mit orientierten ebenen Gruppenbildern, d. h. $\Pi_*(H) = S_1 \ldots S_m \Pi[T_i, U_i]$, die Forderung (3.13) aus (3.14) folgt.

Satz 1. *Jedes Element von* $\mathfrak{G}$ (*bzw.* $\mathfrak{F}$) *wird eindeutig durch ein Wort* $W(H)$ *mit den Eigenschaften* (3.1–3.13,14) *dargestellt.*

Beweis. Durch eine einfache Längenbetrachtung sieht man, daß man ein irgendwie gegebenes Wort dazu bringen kann, (3.1–3) zu erfüllen und dasselbe Element von $\mathfrak{G}$ (bzw. $\mathfrak{F}$) zu induzieren. Aus (3.12) folgt, daß auch (3.13) erreicht werden kann und schließlich zeigt (3.11), daß man auch (3.14) erzielen kann. Jedes Element von $\mathfrak{G}$ (bzw. $\mathfrak{F}$) wird also durch ein Wort mit den Eigenschaften (3.1–3.13,14) dargestellt.

Daß dieses Wort eindeutig bestimmt ist, folgt im Falle einer ebenen diskontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ aus [2, Satz 2], [7] oder [10, S. 201ff]), denn wir haben aus zwei möglichen Halbrändern einer maximalen Kette durch (3.14) einen ausgezeichnet.

Die Dehnschen Argumente sind auch für die Fundamentalgruppen nicht-orientierbarer geschlossener Flächen (mit $g > 2$) richtig, vergl. [10, S. 201ff].) Wir haben darüber hinaus benutzt, daß sie für Gruppen mit ebenen Gruppenbildern gelten. Es gibt also in einer reduzierten Relation mindestens drei Teilworte, die bis auf zwei Zeichen eine definierende Relation ausmachen, oder es ist eine Relation oder der Rand einer Kette vollständig darin enthalten. Ein recht einfacher Beweis dafür findet sich in [7].

Handelt es sich um die Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ einer nichtgeschlossenen Fläche ($m > 0$), so führen wir unsere Aufgabe auf die Lösung von M. Dehn wie folgt zurück: Seien W und W' zwei Worte, die dasselbe Element von $\mathfrak{F}$ darstellen und den Eigenschaften (3.1–3, 13, 14) genügen. Sei $\frac{1}{3}N$ größer als die Anzahl der in W und W' zusammengenommen vorkommenden Zeichen S_i^ε, $i = 1, \ldots, m$, und größer als 4711. Wir betrachten nun die Gruppe $\overline{\mathfrak{F}}$ mit Erzeugenden

$$\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_m, \bar{t}_1, \bar{u}_1, \ldots, \bar{t}_g, \bar{u}_g \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_m, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_g$$

und den definierenden Relationen

$$\Pi_*(\bar{h}) = 1, \qquad \bar{s}_i^N = 1 .$$

Diese Gruppe ist homomorphes Bild von $\mathfrak{F}$ und deshalb stellt $W\,W'^{-1}$ eine Relation dar. Ferner besitzt $\overline{\mathfrak{F}}$ ein ebenes Gruppenbild zu den gegebenen Erzeugenden und definierenden Relationen. Wir können deshalb die Verallgemeinerung von Dehn's Lösung in [2, Satz 2] benutzen. Nun kann $W\,W'^{-1}$ kein Teilwort einer der Relationen S_i^N enthalten, welches $N-2$ Zeichen umfaßt. So folgt, daß nur die definierende Relation $\Pi_*(H)$ zu $W\,W'^{-1}$ beiträgt. Nach freiem Kürzen kann wegen der Normierung (3.14) kein Rand einer Kette entstehen und W und W' sind identisch.

Aus der Arbeit von M. Dehn ergibt sich noch die folgende Aussage über Repräsentanten der Konjugationsklassen:

Satz 2. *Sei W ein Wort, welches* (3.1–3, 13, 14) *erfüllt, und weder W noch eine zyklische Permutation von W ist Halbrand einer Kette. Alle durch zyklische Vertauschungen aus W entstehenden Worte mögen* (3.1–3, 13, 14) *ebenfalls erfüllen. Dann geht jedes Wort, welches mit seinen zyklischen Permutationen* (3.1–3, 14, 15) *erfüllt und ein Element aus derselben Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ (bzw. $\mathfrak{F}$) darstellt, durch zyklische Vertauschung der Buchstaben aus W hervor.*

Beweis. Aus [2] folgt, daß man jedes andere Wort, welches in Frage kommt, durch Transformation einer zyklischen Permutation von W, die wir als trivial annehmen, mit einer Erzeugenden und anschließendes Reduzieren nach (3.1–3, 13, 14) erhält. Damit (3.1–3, 13, 14) für das Wort $H^\varepsilon W H^{-\varepsilon}$ gelten kann, muß eine Reduktion möglich sein. Ist es nur ein freies Kürzen, so bedeutet es nur zyklische Vertauschung der Buchstaben von W. Andernfalls wird — etwa am Ende — (3.2) oder (3.3) verletzt, und es ist $H^\varepsilon W H^{-\varepsilon} \cong \ldots N\,H^{-\varepsilon}$, wobei $l(N H) > \frac{1}{2}\Lambda_r$ oder $= \frac{1}{2}\Lambda_r$ ist und dabei (3.3) nicht beachtet. Ist $N\,H^{-\varepsilon}\,K^{-1} \circlearrowright \Pi_r^{\pm 1}(H)$, so haben wir das neue Wort

$$H^\varepsilon \ldots K\,.$$

Wenn nun bei H^ε keine Reduktion möglich ist, muß das Wort den Bedingungen (3.1–3, 13, 14) auch im zyklischen Sinn genügen. Dann wären KH^ε und N erlaubt, weil W ja auch (3.1–3, 13, 14) erfüllt, und das kann wegen $N\,H^{-\varepsilon}\,K^{-1} \circlearrowright \Pi_r^{\pm 1}(H)$ nicht sein. Somit muß auch bei H eine Reduktion möglich sein. Dann aber gibt es auf W den Halbrand einer Kette in der Form

$$Y_1 \ldots Y_i\, Y_{i+1} \ldots Y_j$$

mit

$$W \cong Y_{i+1} \ldots Y_j \ldots Y_1 \ldots Y_i\,,$$

und es ist H^ε gerade das Element, welches an der Stelle Y_i hinzuzufügen ist, um zu $\tilde{Y}_1 \ldots \tilde{Y}_i\, \tilde{Y}_{i+1} \ldots \tilde{Y}_j$ überzugehen. Das neue Wort ist dann

$$\tilde{Y}_{i+1} \ldots \tilde{Y}_j \ldots \tilde{Y}_1 \ldots \tilde{Y}_i\,.$$

Da W nicht Halbrand einer Kette ist, gibt es auch im zyklischen Sinne erste Bestandteile eines maximalen Halbrandes und wegen (3.14) ist nur eines von $Y_1 \ldots Y_j$ oder $\tilde{Y}_1 \ldots \tilde{Y}_j$ möglich.

Bemerkung 1: Im Falle der Fundamentalgruppe einer orientierbaren Fläche gehören mit einem Bestandteil eines Halbrandes auch alle anderen zu den $\Pi_i(H)$. In diesem Falle können wir die Voraussetzung in Satz 2, daß W nicht Halbrand einer Kette ist, fallen lassen.

Bemerkung 2: Enthalten alle auftretenden Halbränder $Y_1 \ldots Y_k$ und die zugeordneten $\tilde{Y}_1 \ldots \tilde{Y}_k$ je einen Bestandteil Y_i bzw. $\tilde{Y}_j$ der Länge $\frac{1}{2}\Lambda_{r(i)}$ bzw. $\frac{1}{2}\Lambda_{r(j)}$, und sind Y_i und $\tilde{Y}_j$ disjunkt, so erfüllt nur ein Halbrand die Normierungsbedingung (3.3′). Dann genügen schon die Forderungen (3.1–3) in Satz 2.

4. Kanonische Zerschneidungen und Kurvensysteme.

Als Vorbereitung für den nächsten Abschnitt wiederholen wir kurz die Definition von kanonischen Zerschneidungen. Sei F eine kompakte Fläche vom Geschlecht g mit $m \geqq 0$ Rändern $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$. Dann gibt es ein System Σ von einfachen Kurven $\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \tau_1, \mu_1, \ldots, \tau_g, \mu_g$ bzw. $\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \nu_1, \ldots, \nu_g$ mit folgenden Eigenschaften:

(4.1) Die Kurven haben einen gemeinsamen Anfangspunkt p_* und treffen sich nur dort.

(4.2) σ_i schneidet aus F einen Ring aus, dessen zweiter Rand ϱ_i ist. Die anderen Kurven von Σ treten in diesen Ring nicht ein.

(4.3) Entfernt man aus F alle diese Ringe, so schneiden die übrigen Kurven den Rest in ein Flächenstück auf, dessen Rand

$$\sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_m \Pi[\tau_i, \mu_i] \quad (\text{bzw. } \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_m \nu_1^2 \cdot \ldots \cdot \nu_g^2)$$

lautet.

Dabei tritt der zuerst genannte Fall ein, wenn F orientierbar ist, der in Klammern gesetzte gilt für nicht-orientierbares F. Das System Σ heiße *kanonisches Kurvensystem* von F. Um nicht dauernd beide Fälle gesondert aufschreiben zu müssen, bezeichnen wir die Kurven von Σ auch mit $\chi_1, \ldots, \chi_n$ und den Randweg (4.3) mit $\Pi_*(\chi)$.

Wir wählen p_* als Basispunkt für die Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von F, und es repräsentieren die Kurven $\chi_1, \ldots, \chi_n$ die kanonischen Erzeugenden $h_1, \ldots, h_n$ von $\mathfrak{F}$. Wir betrachten nun die duale Zerschneidung Σ^* zu Σ, welche aus Kurven $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_m^*, \tau_1^*, \mu_1^*, \ldots, \tau_g^*, \mu_g^*$ bzw. $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_m^*$, $\nu_1^*, \ldots, \nu_g^*$ besteht und folgende Eigenschaften hat:

(4.4) Die Kurven haben einen gemeinsamen Anfangspunkt $\hat{p}$ und treffen sich nur in diesem Punkte.

(4.5) Die Kurve σ_i^* ist nicht geschlossen und verbindet $\hat{p}$ mit dem i-ten Lochrand ϱ_i.

(4.6) Die Fläche F wird durch Σ^* in ein Flächenstück mit dem Rande $(\Pi \sigma_i^* \varrho_i^* \sigma_i^{*-1}) \Pi [\tau_j^*, (\mu_j^*)^{-1}]$ bzw. $(\Pi \sigma_i^* \varrho_i^* \sigma_i^{*-1}) \Pi \nu_i^{*2}$ aufgeschnitten.

(4.7) Der Stern um den Punkt $\hat{p}$ hat die Form $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_m^*, \tau_1^*, \mu_1^*, \tau_1^{*-1}, \mu_1^{*-1}, \ldots$ bzw. $\sigma_1^*, \ldots, \sigma_m^*, \nu_1^*, \nu_1^{*-1}, \ldots$.

(4.8) Eine Kurve χ_i^* aus Σ^* trifft das entsprechende χ_i aus Σ genau einmal und keine weitere Kurve aus Σ.

Die Zerschneidung Σ^* heiße kanonisch. Sie dient uns zur Ablesung der Homotopieklasse einer Kurve $\varkappa$ auf F, wie im folgenden Abschnitt ausgeführt wird. Wir deuten $\hat{\mathfrak{G}}$ als Fundamentalgruppe von $F \setminus \{\hat{p}\} = \hat{F}$.

5. Normalformen einfacher Kurven auf Flächen.

Zunächst wollen wir erklären, was es bedeutet, daß eine Kurve $\varkappa$ eine Kurve $\chi_i^* \in \Sigma^*$ in einem Punkte positiv schneidet. Dazu legen wir um χ_i^* einen schmalen Streifen und betrachten eine Strecke, die von einem Rand des Streifens zum anderen führt und dabei χ_i^* einmal schneidet. Ist der Streifen ein Ring, so können wir sagen, ob dieses Durchsetzen in derselben Richtung erfolgt, wie χ_i die Kurve χ_i^* durchsetzt, oder nicht. Diese Richtung heißt positiv. Ist der Streifen ein Möbiusband, so schneiden wir es durch einen durch $\hat{p}$ laufenden Bogen, der χ_i nicht trifft, zu einem Rechteck auf und können nun wieder χ_i zur Definition von »positiv« heranziehen. Einem Schnittpunkt q ordnen wir noch einen Bogen auf χ_i^* zu, und zwar beginne er in $\hat{p}$ und führe nach q in der Richtung von χ_i^*, wenn der Schnitt in positiver Richtung erfolgt, und in Richtung von χ_i^{*-1}, wenn der Schnitt in negativer Richtung erfolgt. Diese Bögen seien mit $(\hat{p}q)_+$ oder $(\hat{p}q)_-$ bezeichnet.

Bemerkung 3: Ein einfacher Bogen β durchsetze zwei Kurven $\chi_i^{*\varepsilon}$ und $\chi_j^{*\varepsilon'} \in \Sigma^* \cup \Sigma^{*-1}$ in positiver Richtung in Punkten q, q', und es seien $\chi_i^{*\varepsilon}$ und $\chi_j^{*\varepsilon'}$ Nachbarn im positiven Umlauf um den Stern bei $\hat{p}$. Dabei umläuft eine Kurve den Stern bei $\hat{p}$ im positiven Sinn, wenn sie nacheinander Nachbarn im Stern positiv schneidet. Außer in q und q' schneide β die Zerschneidung Σ^* nicht.

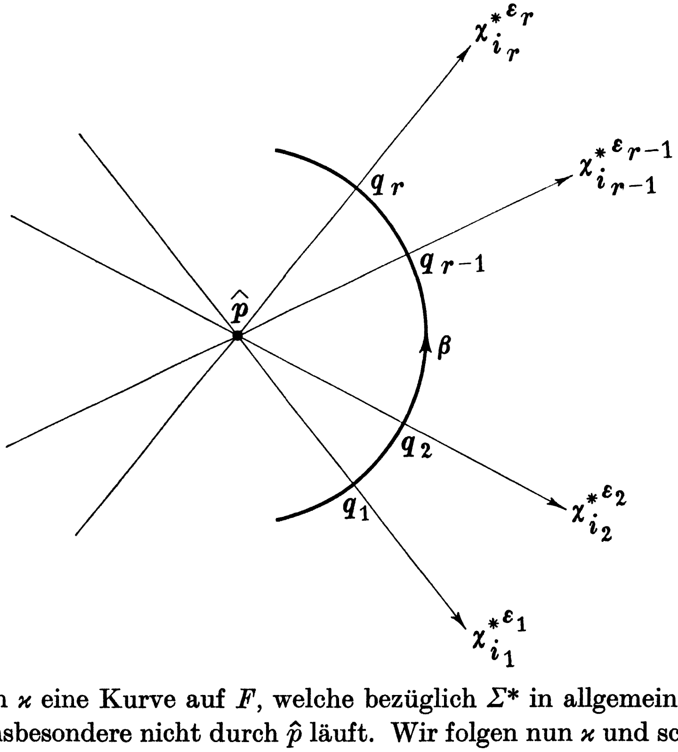
Dann berandet $(\hat{p}q)_\varepsilon\, (qq')\big((\hat{p}q')_{\varepsilon'}\big)^{-1}$ auf F ein Dreieck, wobei (qq') den Bogen auf β zwischen q und q' bezeichnet.

Schneiden wir F nämlich durch Σ^* auf, so sind $\chi_i{}^{*-\varepsilon}$ und $\chi_j{}^{*\varepsilon'}$ im positiv durchlaufenen Rand von F benachbart, und der Bogen (qq') geht von einem Punkt auf $\chi_i{}^{*-\varepsilon}$ zu einem Punkt auf $\chi_j{}^{*\varepsilon'}$. Die Orientierungsvereinbarungen sind nun so, daß das Flächenstück, in welches F durch Σ^* aufgeschnitten wird, durch β gerade in das genannte Dreieck und den Rest zerlegt wird.

FOLGERUNG. Haben wir allgemein einen einfachen Bogen β, welcher nacheinander $\chi_{i_1}^{*\varepsilon_1},\ldots,\chi_{i_r}^{*\varepsilon_r}$ positiv schneidet in Punkten $q_1,\ldots,q_r$ und folgen $\chi_{i_1}^{*\varepsilon_1},\ldots,\chi_{i_r}^{*\varepsilon_r}$ im positiven Stern aufeinander, so bilden

$$(\hat{p}q_1)_{\varepsilon_1}(q_1,q_2)\big((\hat{p}q_2)_{\varepsilon_1}\big)^{-1},\ldots,(\hat{p}q_{r-1})_{\varepsilon_{r-1}}(q_{r-1}q)\big((\hat{p}q_r)_{\varepsilon_r}\big)^{-1}$$

die Ränder von Dreiecken. Wenn alle $\chi_{i_j}^{*\varepsilon_j}$ verschieden sind, d.h. sofern β den Stern nicht mehrfach umläuft, bildet $(\hat{p}q_1)_{\varepsilon_1}(q_1q)\big((\hat{p}q_r)_{\varepsilon_r}\big)^{-1}$ den Rand eines Flächenstückes.



Sei nun $\varkappa$ eine Kurve auf F, welche bezüglich Σ^* in allgemeiner Lage ist und insbesondere nicht durch $\hat{p}$ läuft. Wir folgen nun $\varkappa$ und schreiben bei jedem Schneiden einer Kurve $\chi_i{}^* \in \Sigma^*$ das $H_i{}^{\pm 1}$, wobei der Exponent positiv ist bei positivem Durchsetzen und negativ bei negativem Schneiden. In dieser Weise können wir $\varkappa$ ein Wort in den Erzeugenden $H_1,\ldots,H_n$ von $\hat{\mathfrak{G}}$ zuordnen, welches im allgemeinen nicht reduziert sein wird. Dieses Wort $A_\varkappa(H)$ heiße *Ablesung von $\varkappa$ bezüglich Σ^**. Substituieren wir in $A_\varkappa(H)$ für die H die Erzeugenden h und betrachten das Wort $A_\varkappa(h)$ als Element von $\mathfrak{F}$, so finden wir die Homotopieklasse von $\varkappa$; hierbei haben wir anzunehmen, daß $\varkappa$ in p_* beginnt.

Indem wir aus F den Punkt $\hat{p}$ entfernen, erhalten wir eine punktierte Fläche $\hat{F}$. Wir können dann $\hat{\mathfrak{G}}$ als Fundamentalgruppe von $\hat{F}$ deuten, und $A_\varkappa(H)$, betrachtet als Element in $\hat{\mathfrak{G}}$, ist dann die Homotopieklasse von $\varkappa$ auf $\hat{F}$.

Wir möchten nun im folgenden durch einen Algorithmus entscheiden, ob eine Homotopieklasse $w \in \mathfrak{F}$ eine einfach-geschlossene Kurve enthält oder nicht. Wir wollen das tun, indem wir w durch ein geeignetes Element $W \in \hat{\mathfrak{G}}$ induzieren und für dieses die Frage behandeln, ob es eine einfach-geschlossene Kurve auf $\hat{F}$ enthält. Da wir w auf viele Weisen durch W's darstellen können und es offenbar immer möglich ist, solche W zu nehmen, die keine einfachen Kurven enthalten, müssen wir spezielle W finden, welche sicherlich einfache Kurven enthalten, wenn es in w solche gibt. Dem dienen die folgenden Ausführungen. Dabei stellt sich nun heraus, daß die Beschränkung der W aufs engste mit der Lösung des Konjugationsproblems für die betrachteten Gruppen zusammenhängt.

Wir wollen sagen, daß *ein Wort W in den Erzeugenden $H_1, \ldots, H_n$ eine Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{F}$ repräsentiert*, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

(5.1) W ist zyklisch reduziert.

(5.2) W enthält kein Teilwort der definierenden Relation $\Pi_*^\varepsilon(H)$, dessen Länge größer als die halbe Länge von $\Pi_*(H)$ ist ($\varepsilon = \pm 1$). Dabei ist $\Pi_*^\varepsilon(H)$ als zyklisches Wort gesehen; zugelassene Teilworte dürfen also auch z. B. die Form $\ldots U_g^{-1} S_1 \ldots$ haben.

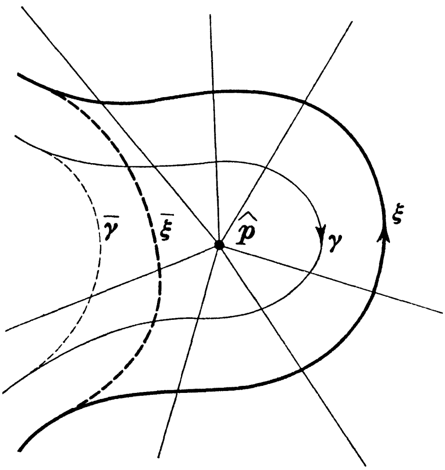
(5.3) Enthält W ein Teilwort, welches genau eine Hälfte der Relation $\Pi_*^\varepsilon(H)$ ausmacht, so enthält diese Hälfte S_m^ε (für $g = 0$) oder (bei $g > 0$) $U_g^{-\varepsilon}$ bzw. V_g^ε (vergl. (3.3')).

Die letzte Forderung ist eindeutig, da zwei Zeichen $H_{i_1}^{\varepsilon_1} H_{i_2}^{\varepsilon_2}$ höchstens in einem von $\Pi_*(H)$ oder $\Pi_*^{-1}(H)$ nebeneinanderstehen können. Ist $\varkappa$ eine Kurve auf F, so bestimmt die Homotopieklasse von $\varkappa$ eine Klasse konjugierter Elemente in $\mathfrak{F}$. Wenn ein Wort $W \in \hat{\mathfrak{G}}$ diese Klasse repräsentiert, so sagen wir auch: *W ist repräsentativ für $\varkappa$.*

Hilfssatz 1. *Jede einfach-geschlossene Kurve $\varkappa$ auf F läßt sich durch eine Isotopie, die im allgemeinen den Basispunkt p_* bewegt, in eine Kurve* *überführen, deren Ablesung bezüglich Σ^* die Kurve $\varkappa$ repräsentiert, d.h. die Eigenschaften* (5.1–3) *besitzt.*

Beweis. a) Zunächst bringen wir $\varkappa$ in allgemeine Lage bezüglich Σ^*. Wenn die Ablesung nicht zyklisch reduziert ist, so gibt es auf $\varkappa$ einen Bogen δ, der von einer Kurve $\chi^* \in \Sigma^*$ zu ihr von derselben Seite zurückkehrt und keine andere Kurve aus Σ^* trifft. Da Σ^* die Fläche F in ein Flächenstück aufschneidet, berandet δ mit einem Bogen β auf χ^* ein Flächenstück, und wir können δ über dieses Flächenstück und über β mittels einer Isotopie hinwegdeformieren und so die Anzahl der Schnittpunkte um mindestens 2 verringern. Bei Durchführung der Isotopie sind wir eventuell gezwungen, den Basispunkt p_* über β zu bewegen, falls er zu dem Flächenstück mit Rand $\beta\delta^{-1}$ gehört. Durch eine weitere Isotopie, die Σ^* festläßt, können wir den Basispunkt wieder an seine alte Stelle bringen.

b) Auf diese Weise können wir $\varkappa$ in ein $\varkappa'$ mit zyklisch kurzer Ablesung isotop deformieren. Nun gebe es in der Ablesung von $\varkappa'$ ein Teilwort X, welches mehr als die Hälfte der Relation ausmacht. Dann läuft der zugehörige Bogen ξ auf $\varkappa'$ im positiven oder negativen Sinn um den Stern bei $\hat{p}$ und wir haben die Situation der Bemerkung 3. Es bestimmt also ξ mit zwei Bögen ζ und ζ', die $\hat{p}$ mit dem Anfangs- bzw. Endpunkt von ξ verbinden ein Flächenstück mit dem Rand (etwa) $\zeta\xi\zeta'^{-1}$. Wenn die Kurve $\varkappa'$ noch einmal ζ oder ζ' trifft, so nur in Bögen γ, die alle von $\hat{p}$ ausgehenden Kurven schneidet, die auch ξ trifft.



Deshalb können wir ξ mittels einer Isotopie über $\hat{p}$ so hinwegdeformieren, daß die Anzahl der Schnittpunkte abnimmt. Der aus ξ entstehende Bogen $\bar{\xi}$ hat dann die Ablesung $\tilde{X}$ mit $X\tilde{X}^{-1} \circlearrowleft \Pi_*^{\varepsilon}(H)$.

c) Durch wechselweises Anwenden der beiden in a) und b) beschriebenen Prozesse gelangen wir schließlich zu einer Kurve $\varkappa''$, deren Ablesung (5.1) und (5.2) erfüllt. Dieselben Argumente, die wir in b) benutzt haben, zeigen, daß wir auch (5.3) erreichen können.

HILFSSATZ 2. *Das Wort W, welches die Eigenschaften* (5.1–3) *besitzen möge, sei die Ablesung einer einfach-geschlossenen Kurve $\varkappa$. Ferner gebe es in W zwei Teilworte X und Y, die* (*als Teilworte*) *nicht identisch sind und je eine Hälfte der Relation $\Pi_*(H)$ bzw. $\Pi_*^{-1}(H)$ darstellen. Dann ist $X = Y^{\pm 1}$.*

BEWEIS. X und Y werden durch einfache Bögen ξ und η auf $\varkappa$ dargestellt, die je $\hat{p}$ umlaufen und dabei die Hälfte der von $\hat{p}$ ausgehenden Kurven $\chi_i^{*\pm 1}$ schneiden. Wenn $X \neq Y^{\pm 1}$ ist, so schneiden ξ und η nicht nur dieselben Kurven. Es gibt aber jedenfalls eine Kurve, die von beiden geschnitten wird, denn sonst könnte (5.3) nicht gelten. Daraus folgt, daß entweder η in das von ξ bestimmte Dreieck $\zeta\xi\zeta'^{-1}$ eintritt oder ξ in das von η bestimmte. Da die Ablesung zyklisch kurz ist, folgt im ersten Fall, daß η alle von ξ geschnittenen Kurven trifft und mindestens eine andere, was aber nicht sein kann, da sowohl η wie ξ die Hälfte der in $\hat{p}$ zusammenstoßenden Kurven schneidet. Analog ergibt sich der zweite Fall, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist. Das gleiche Argument zeigt uns

KOROLLAR. *Unter den Voraussetzungen des vorigen Hilfssatzes ist die Existenz zweier Teilworte X und Y in W mit folgenden Eigenschaften unmöglich:*

(5.4) *X und Y^δ sind beide Teilworte von $\Pi_*^\varepsilon(H)$* ($\varepsilon, \delta = \pm 1$) *und haben als solche ein Zeichen gemeinsam.*

(5.5) *Das kleinste Teilwort von $\Pi_*^\varepsilon(H)$, welches beide enthält, macht mehr als eine Hälfte von $\Pi_*^\varepsilon(H)$ aus.*

HILFSSATZ 3. *Sei $\mathfrak{F}$ die Fundamentalgruppe einer orientierbaren Fläche mit $n \geqq 5$. W sei die Ablesung einer einfach-geschlossenen Kurve $\varkappa$ und besitze die Eigenschaften* (5.1–3). *Dann ist in W kein Halbrand enthalten.*

BEWEIS. Es gebe in W (oder einer zyklischen Permutation von W) einen Halbrand $Y_1 Y_2 \ldots$. Dann ist

$$l(Y_1) \geqq \tfrac{1}{2}\Lambda_* - 1, \qquad l(Y_2) \geqq \tfrac{1}{2}\Lambda_* - 2\,.$$

Es gibt nun folgende Möglichkeiten für das Zusammenstoßen von Y_1 und Y_2 (oder analoge wenn Y_1 und Y_2 Teilworte von $\Pi_*^{-1}(H)$ sind):

a) $\quad Y_1 \cong \ldots T_j \quad \Rightarrow \quad Y_2 \cong T_{j+1} \ldots \quad (j+1 \bmod g \text{ bei } m=0)$

b) $\quad Y_1 \cong \ldots T_j\, U_j \quad \Rightarrow \quad Y_2 \cong U_j\, T_j^{-1} \ldots$

c) $Y_1 \cong \ldots T_j\, U_j\, T_j^{-1} \Rightarrow Y_2 \cong T_j^{-1}\, U_j^{-1} \ldots$
d) $Y_1 \cong \ldots [T_j, U_j] \Rightarrow Y_2 \cong U_{j+1}^{-1} \ldots$ $(0 \leqq j, j+1 \bmod g$ bei $m=0)$.

In den Fällen b) und c) haben Y_1 und Y_2 ein Zeichen gemeinsam. Da

$$l(Y_1)+l(Y_2) \geqq \Lambda_* - 3$$

ist und in den Fällen a) und d) drei Zeichen von $\Pi_*(H)$ ausgelassen werden, haben Y_1 und Y_2 entweder ein Zeichen (am Ende von Y_2) gemeinsam, oder der Halbrand hat eine Länge größer 2 und es ist $l(Y_2) = \frac{1}{2}\Lambda_* - 2$ und $l(Y_1) = \frac{1}{2}\Lambda_* - 1$. Dann fängt Y_3 entweder mit einem Zeichen an, welches auch Y_2 enthält, und läuft über zu Y_1, und das kann nicht sein, oder aber Y_3 beginnt mit dem vierten Zeichen von Y_1, was dann ebenfalls einen Widerspruch zu dem Korollar ergibt, da dann zwei Zeichen von Y_3 über Y_1 hinausragen.

Der Halbrand kann also höchstens aus Y_1 und Y_2 bestehen. Wenn diese beiden nicht das Zeichen am Ende von Y_1 gemeinsam haben, so ist wegen $l(Y_2) \geqq \frac{1}{2}\Lambda_* - 1$ diesmal

$$l(Y_1)+l(Y_2) \geqq \Lambda_* - 2\,,$$

und es folgt, daß das erste Zeichen von Y_1 das letzte von Y_2 ist und das kann ebenfalls nicht sein.

Hilfssatz 4. *Das Wort W sei die Ablesung einer einfach-geschlossenen Kurve auf einer orientierbaren oder nicht-orientierbaren Fläche mit $n \geqq 5$ und habe die Eigenschaften* (5.1–3). *Stellt W' dieselbe Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{F}$ dar und genügt* (5.1–3), *so geht W' durch zyklische Vertauschung der Zeichen aus W hervor.*

Beweis. Handelt es sich bei $\mathfrak{F}$ um die Fundamentalgruppe einer orientierbaren Fläche, so folgt dieser Hilfssatz 4 unmittelbar aus Hilfssatz 3 und Satz 2. Für nicht-orientierbare Flächen zeigen wir zunächst: Ist $Y_1\, Y_2 \ldots Y_k$ ein in W (bzw. in einer zyklischen Permutation von W) enthaltener Halbrand, so gibt es bei $k > 2$ ein Y_i und ein Y_j mit $l(Y_i) = \frac{1}{2}\Lambda_*$ und $l(Y_j) = \frac{1}{2}\Lambda_* - 2$. Ist $k=2$, so gilt entweder $l(Y_1) = \frac{1}{2}\Lambda_*$ und $l(Y_2) = \frac{1}{2}\Lambda_* - 1$ oder $l(Y_1) = \frac{1}{2}\Lambda_* - 1$ und $l(Y_2) = \frac{1}{2}\Lambda_*$.

Die Teilworte Y_i werden durch Bögen γ_i repräsentiert, die um $\hat{p}$ laufen, und zwar ist der Umlaufsinn für alle γ_i mit ungeradem Index derselbe, für die mit geradem Index, der entgegengesetzte. Nun ist folgendes möglich (unter »Punkten« verstehen wir hier nur die Schnittpunkte mit den von $\hat{p}$ ausgehenden Kurven von Σ):

(5.6) Der erste Punkt von γ_2 liegt auf demselben von $\hat{p}$ ausgehenden Strahl wie der vorletzte Punkt von γ_1.

(5.7) Der zweite Punkt von γ_2 liegt auf demselben von $\hat{p}$ ausgehenden Strahl wie der letzte Punkt von γ_1.

Dann verläuft im Fall (5.6) γ_1 zwischen $\hat{p}$ und γ_2, im Falle (5.7) γ_2 zwischen $\hat{p}$ und γ_1. Aus (5.1) und (3.7) ergeben sich nun folgende Abschätzungen:

$$\tfrac{1}{2}\Lambda_* \geqq l(Y_1) > l(Y_2) \geqq \tfrac{1}{2}\Lambda_* - 2\,. \tag{5.6'}$$

$$\tfrac{1}{2}\Lambda_* \geqq l(Y_2) > l(Y_1) \geqq \tfrac{1}{2}\Lambda_* - 1\,. \tag{5.7'}$$

Im Falle (5.7′) haben wir somit

$$l(Y_2) = \tfrac{1}{2}\Lambda_* \quad \text{und} \quad l(Y_1) = \tfrac{1}{2}\Lambda_* - 1\,. \tag{5.7''}$$

Wenn es sich um eine Kette der Länge 2 handelt, so folgen auch im Falle (5.6) die Gleichungen $l(Y_1) = \frac{1}{2}\Lambda_*$ und $l(Y_2) = \frac{1}{2}\Lambda_* - 1$. Da der Bogen γ_3, wenn die Länge der Kette > 2 ist, nicht an demselben Strahl beginnen kann auf dem γ_2 endet, ergibt sich im Falle (5.7), daß zwischen γ_3 und $\hat{p}$ die Bögen γ_2 und γ_1 verlaufen; also ist $l(Y_3) = \frac{1}{2}\Lambda_* - 2$. Wenn sich im Falle (5.6) die Längen von Y_1 und Y_2 nur um 1 unterscheiden, so muß γ_3 entweder beide Bögen γ_1 und γ_2 von $\hat{p}$ trennen, oder aber wird durch beide von $\hat{p}$ getrennt. Im ersten Fall ist $l(Y_3) > l(Y_1) > l(Y_2)$, im zweiten $l(Y_1) > l(Y_2) > l(Y_3)$ und daraus folgt

$$l(Y_3) = \tfrac{1}{2}\Lambda_*, \qquad l(Y_2) = \tfrac{1}{2}\Lambda_* - 2$$

bzw.

$$l(Y_1) = \tfrac{1}{2}\Lambda_*, \qquad l(Y_3) = \tfrac{1}{2}\Lambda_* - 2\,.$$

Hieraus folgt nun, daß sowohl $Y_1 Y_2 \ldots Y_k$ wie auch $\tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2 \ldots \tilde{Y}_k$ einen Bestandteil Y_i bzw. $\tilde{Y}_j$ der Länge $\frac{1}{2}\Lambda_*$ haben. Ferner sind beide disjunkt; denn die bei Y_j zuzufügenden Erzeugenden, um zu $\tilde{Y}_j$ überzugehen, sind gerade diejenigen äußeren Zeichen von Y_i, die Y_j nicht enthält, und sie fallen bei der Bildung von $\tilde{Y}_j$ wieder heraus. Von $Y_1 Y_2 \ldots Y_k$ und $\tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2 \ldots \tilde{Y}_k$ erfüllt also nur einer die Normierungsbedingung (5.3). Aus Satz 2 insbesondere Bemerkung 2 ergibt sich, daß W' durch zyklische Permutation aus W hervorgeht.

6. Algorithmen.

Wir untersuchen nun die beiden folgenden Probleme:

A. *Man entscheide, ob ein System* $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{F}$ *von einem kanonischen Kurvensystem von* F *induziert wird.*

B. *Man entscheide, ob eine Homotopieklasse* $w \in \mathfrak{F}$ *eine einfach-geschlossene Kurve enthält.*

Beide Entscheidungsprobleme hat B. L. Reinhardt [11] gelöst. Unbefriedigend an seinem Algorithmus ist, wie er selbst schreibt, daß auf

Realisierungen der Gruppe $\mathfrak{F}$ als nicht-euklidische Bewegungsgruppe zurückgegriffen werden muß, und zwar nicht nur bei der Herleitung des Algorithmus, sondern auch — und das ist das Unbefriedigende — bei der Durchführung. Wir geben hier rein algebraische Entscheidungsverfahren. Dabei ergibt sich für A eine einfache und auch praktisch gut durchführbare Lösung. Problem B führen wir auf eine Entscheidungsfrage für Elemente einer freien Gruppe zurück, welche durch J. H. C. Whitehead [13] (siehe auch [9]) gelöst worden ist. In Praxis wird jedoch dessen Verfahren nur unter großem Aufwand durchführbar sein, es sei denn, das Geschlecht der Flächen ist klein. Ob in diesem Falle der Algorithmus von B. L. Reinhardt günstiger ist, vermag ich nicht zu übersehen. Ein Vorteil des hier gegebenen Algorithmus ist, daß er sich ohne neue Komplikationen auf Systeme übertragen läßt.

Sei nun wieder $\hat{p}$ ein von p_* verschiedener Punkt des Inneren von F, $\hat{F} = F \setminus \{\hat{p}\}$ und $\hat{\mathfrak{G}}$ die Fundamentalgruppe von $\hat{F}$.

Satz 3. *Dafür, daß ein System $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{F}$ von einem kanonischen Kurvensystem von F induziert wird, sind die drei folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

(6.1) $\quad x_i = l_i\, s_{r_i}^{\varepsilon_i}\, l_i^{-1}, \qquad i = 1, \ldots, m,\ 1 \leqq r_i \leqq m,\ \varepsilon_i = \pm 1\,,$

(6.2) $\quad \Pi_*(x) = 1\,.$

(6.3) *Induziert man $x_1, \ldots, x_n$ durch irgendwelche Elemente $X_1, \ldots, X_n \in \hat{\mathfrak{G}}$ mit $X_i = L_i\, S_{r_i}^{\varepsilon_i}\, L_i^{-1}$, so ist $\vartheta \Pi_*(X) = \pm 1$. Dabei ist ϑ der durch $L\, \Pi_*{}^{\omega(L)}\, L^{-1} \to 1$ definierte Homomorphismus des Kernes von $\hat{\mathfrak{G}} \to \mathfrak{F}$ auf die unendlich zyklische Gruppe Z (siehe [15, § 2]); $\omega(L) = \pm 1$ gibt an, ob die Kurven aus L zwei — oder einseitig sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit von (6.1) und (6.2) ist offensichtlich. (6.3) folgt daraus, daß $\vartheta \Pi_*(X)$ nicht von der Wahl der X, sondern nur von den x abhängt ([15, Satz 2]). — Wenn nun das binäre Produkt $\{X_1, \ldots, X_n; \Pi_*\}$ nicht zerfällbar ist, so gibt es ein homotopes einfaches binäres Produkt $\{X_1', \ldots, X_n'; \Pi_*\}$. Aus (6.2) folgt nun, daß $\Pi_*(X')$ genau ein elementares Flächenstück umläuft (hierzu vergl. Beweis von [15, Satz 3]), und deshalb gilt $\Pi_*(X') = L\, \Pi_*{}^{\varepsilon}(H)\, L^{-1}$. Hieraus ergibt sich die Existenz eines Homöomorphismus von F auf sich, der $\hat{p}$ fest läßt und in $\hat{\mathfrak{G}}$ den Endomorphismus $H_i \to X_i'$ induziert. In $\mathfrak{F}$ induziert dieser Homöomorphismus den Endomorphismus $h_i \to x_i$, der in Wahrheit ein Automorphismus ist, und es werden somit $x_1, \ldots, x_n$ von einem kanonischen Kurvensystem auf F induziert. Dieser Beweis folgt dem Schema der Beweise des Satzes von J. Nielsen und seiner Verallgemeinerungen in [15].

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $\{X_1,\ldots,X_n;\Pi_*\}$ über dem Kern von $\hat{\mathfrak{G}} \to \mathfrak{F}$ nicht zerfällbar ist. Andernfalls gibt es ein binäres Produkt $\{Y_1,\ldots,Y_q;\Pi_{\mathcal{Y}}\}$ mit folgenden Eigenschaften:

(6.4) $\Pi_{\mathcal{Y}} = Y_1\ldots Y_r\,[Y_{r+1},Y_{r+2}]\ldots[Y_{q-1},Y_q]$
bzw.
$\Pi_{\mathcal{Y}} = Y_1\ldots Y_r\,Y_{r+1}^2\ldots Y_q^{\,2}$ liegt im Kern.

(6.5) $\vartheta\Pi_{\mathcal{Y}}(Y)$ ist ungerade

(6.6) $q<n, \qquad r\leqq m, \qquad 0\leqq r\leqq q\,.$

Indem wir $\hat{\mathfrak{G}}$ kommutativ machen und mod 2 rechnen, sehen wir, daß $r=m$ sein muß. Kürzen wir nun den von $S_1,\ldots,S_m$ erzeugten Normalteiler heraus, so bleibt ein binäres Produkt $\{Y'_{r+1},\ldots,Y_q{}';\Pi_{\mathcal{Y}}{}'\}$ übrig, und es ist $\Pi_{\mathcal{Y}}{}'(Y')$ ein Produkt in Transformierten von $\Pi[T_i,U_i]$ bzw. $V_1{}^2\ldots V_g{}^2$ und deren inversen. Dabei ist die Summe der Exponenten, die mit ± 1 je nach dem Orientierungsverhalten der transformierenden Faktoren multipliziert werden, ungerade. Nach [5, Satz I], gibt es nun eine stetige Abbildung einer geschlossenen Fläche F_0 vom Geschlecht $\frac{1}{2}(q-m)$ bzw. $q-m$ in die Fläche vom Geschlecht g, so daß die Homotopieklasse der Bilder einer kanonischen Zerschneidung von F_0 gleich $y'_{m+1},\ldots,y_q{}'$ sind. Aus der Kneserschen Formel [6], [12] folgt wegen $g=\frac{1}{2}(n-m)$ bzw. $=n-m$

$$q-m \geqq n-m\,,$$

und dem widerspricht $n>q$. Dabei haben wir benutzt, daß der Abbildungsgrad nicht 0 ist. Das aber folgt daraus, daß obige Exponentensumme zum mindesten mod 2 mit dem »Abbildungsgrad« übereinstimmt. Auf die Beziehung zwischen beiden Zahlen soll später in einem allgemeineren Zusammenhang eingegangen werden.

Anmerkung. Mit Hilfe der Methoden von H. Kneser [6] oder H. Seifert [12] kann man ein ähnliches Kriterium wie in Satz 3 herleiten, indem man nach H. Hopf [5, Satz III], mit homologischen Mitteln den Abbildungsgrad berechnet und in Satz 3 statt (6.3) verlangt, daß der Abbildungsgrad gleich ± 1 ist. Hierbei beschränke man sich auf geschlossene Flächen.

Nun wenden wir uns Problem B zu. Wir induzieren w durch ein Wort $W_0 \in \hat{\mathfrak{G}}$. Indem wir dann W_0 zyklisch reduzieren, lange Teile der Relation durch die kürzeren ersetzen und schließlich die richtigen Hälften auswählen, gelangen wir zu einem Wort W, welches die Eigenschaften (5.1–3) besitzt. W induziert in $\mathfrak{F}$ ein zu w konjugiertes Element. Die

Frage, ob w eine einfach-geschlossene Kurve enthält, wird durch den folgenden Satz beantwortet:

SATZ 4. *Ist* $n \geqq 5$, *und enthält die Homotopieklasse* $w \in \mathfrak{F}$ *eine einfach-geschlossene Kurve, welche*

(6.7) *die Fläche nicht zerlegt oder*

(6.8) *die Fläche zerlegt,*

und repräsentiert man die Klasse zu w *konjugierter Elemente durch ein Wort* W *mit den Eigenschaften* (5.1–3), *so gibt es einen Automorphismus* $\hat{\alpha}$ *von* $\hat{\mathfrak{G}}$ *mit*

$$\hat{\alpha}\, \Pi_*(H) = L\, \Pi_*^{\pm 1}(H) L^{-1}$$

und

(6.7′) $$\hat{\alpha} W = T_1 \text{ oder } = V_1$$

bzw.

(6.8′) $$\hat{\alpha} W = S_1 \dots S_q \prod_{i=1}^{k} [T_i, U_i] \text{ oder } = S_1 \dots S_q V_1^2 \dots V_k^2, \quad 0 \leqq q \leqq m,\ 0 \leqq k \leqq g\,.$$

Wie wir oben gesehen haben, kann man zu w ein W mit den Eigenschaften (5.1–3) in endlichen vielen Schritten gewinnen. Ob nun ein solcher Automorphismus $\hat{\alpha}$ existiert, läßt sich mit der Whiteheadschen Methode [13] (vergl. [9]) finit entscheiden. Findet man einen Automorphismus $\hat{\alpha}$, so folgt aus dem Nielsenschen Satz ([15, Satz 7]), daß ein zu w konjugiertes Element eine einfach-geschlossenene Kurve enthält. Da alle inneren Automorphismen von Homöomorphismen induziert werden, enthält auch w eine einfach-geschlossene Kurve. Findet man mit dem Whiteheadschen Verfahren keinen Automorphismus $\hat{\alpha}$, so kann es in w wegen der Hilfssätze 1 und 4 keine einfache Kurve geben. Bei der praktischen Anwendung des Whiteheadschen Verfahrens wird man am besten zunächst mit homologischen Mitteln entscheiden, ob w zerlegende oder nicht-zerlegende Kurven enthält. Schließlich beachte man, daß $\{T_1, \Pi_*\}$ bzw. $\{V_1, \Pi_*\}$ ein System minimaler (zyklischer) Länge ist. Ferner kann man in (6.8) q und s so wählen, daß

$$2(q+4s) \leqq m+4s \qquad \text{bzw.} \qquad 2(q+2s) \leqq m+2g$$

ist, und dann ist

$$\{S_1 \dots S_q \prod_{i=1}^{k} [T_i, U_i], \Pi_*\} \qquad \text{bzw.} \qquad \{S_1 \dots S_q V_1^2 \dots V_k^2, \Pi_*\}$$

ebenfalls ein System minimaler Länge in den gewählten Erzeugenden von $\hat{\mathfrak{G}}$.

Beweis von Satz 4. Nach Hilfssatz 1 gibt es ein W, welches ein zu w konjugiertes Element induziert und die Eigenschaften (5.1–3) besitzt und welches, als Homotopieklasse von $\hat{F}$ betrachtet, eine einfach-geschlossene Kurve enthält. Nach Hilfssatz 4 sind aber alle anderen W, die (5.1–3) erfüllen und w bis auf Konjugation induzieren, nur zyklische Vertauschungen von W. Deshalb gibt es, zu welchem W wir auch immer gelangen, einen Automorphismus von $\hat{\mathfrak{G}}$, der W in eines der Standardworte

$$1, \quad T_1, \quad V_1, \quad S_1 \ldots S_q \prod_{i=1}^{k} [T_i, U_i], \quad S_1 \ldots S_q V_1^2 \ldots V_k^2$$

überführt. Dieser Automorphismus läßt sich durch einen Homöomorphismus hervorrufen, der die einfach-geschlossene Kurve aus W in eine spezielle Lage überführt, die von ihrem Zerlegungsverhalten abhängt.

In Satz 4 ist wesentlich, daß $\hat{\alpha}$ nicht nur das gegebene Wort W in T_1 sondern auch Π_* in ein Konjugiertes von Π_* oder Π_*^{-1} überführt. Nicht alle primitiven Elemente von $\hat{\mathfrak{G}}$ enthalten einfache Kurven auf $\hat{F}$. Als Beispiel möge das von M. Dehn [2, S. 420] betrachtete dienen: Sei $m=0$, $g=2$ und F orientierbar. Die Worte $t_1u_1t_1^{-2}u_1^{-1}t_2=w$ und $t_2u_2^{-1}t_2^{-1}t_1^{-1}u_2t_2=w'$ sind ineinander transformierbar: $u_2^{-1}wu_2=w'$. Ersetzt man die kleinen Buchstaben durch die zugehörigen großen, so erfüllen die entstehenden Worte W und W' (5.1–3). Beide Worte sind primitive Elemente von $\hat{\mathfrak{G}}$ (d.h. gehören einem freien Erzeugendensystem von $\hat{\mathfrak{G}}$ an), da in W die Erzeugende T_2 und in W' die Erzeugende T_1 genau einmal vorkommt. Da aber $T_1U_1T_1^{-1}\,T_1^{-1}U_1^{-1}T_2$ und $T_2U_2^{-1}T_2^{-1}\,T_1^{-1}U_2T_2$ Halbränder von Ketten der Länge 2 sind, kann w nach Hilfssatz 3 keine einfach-geschlossene Kurve enthalten.

LITERATUR

1. M. Dehn, *Unendliche diskontinuierliche Gruppen*, Math. Ann. 71 (1912), 116–144.
2. M. Dehn, *Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen*, Math. Ann. 72 (1912), 413–421.
3. M. Greendlinger, *On Dehn's algorithm for the conjugacy and word problem, with applications*, Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 641–677.
4. M. Greendlinger, *Lösung des Wortproblemes für eine Klasse von Gruppen mittels des Dehnschen Algorithmus . . .*, Doklady Akad. Nauk SSSR 154 (1964), 507–509. Engl. Übers. in: Soviet Math. Dokl. 5 (1964), 110–112.
5. H. Hopf, *Beiträge zur Klassifikation von Flächenabbildungen*, J. reine angew. Math. 165 (1931), 225–236.
6. H. Kneser, *Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen*, Math. Ann. 103 (1930), 347–358.

7. R. C. Lyndon, *On Dehn's algorithm*, Math. Ann. (im Druck).
8. W. Magnus, *Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation*, Math. Ann. 106 (1932), 295–307.
9. E. S. Rapaport, *On free groups and their automorphisms*, Acta Math. 99 (1958), 139–163.
10. K. Reidemeister, *Einführung in die kombinatorische Topologie*, Vieweg, Braunschweig, 1932.
11. B. L. Reinhardt, *Algorithms for Jordan curves on compact surfaces*, Ann. of Math. 75 (1962), 209–222.
12. H. Seifert, *Bemerkungen zur stetigen Abbildung von Flächen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 12 (1938), 29–37.
13. J. H. C. Whitehead, *On equivalent sets of elements in a free group*, Ann. of Math. 37 (1936), 782–800.
14. H. Zieschang, *Ein Satz von Nielsen, einige Anwendungen und Verallgemeinerungen*, Arbeiten der Allunioreskonferenz für Topologie in Taschkent 1963 (im Druck).
15. H. Zieschang, *Über Automorphismen ebener diskontinuierlicher Gruppen*, Math. Ann. (im Druck).

UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN, DEUTSCHLAND