MATH. SCAND. 21 (1967), 71–79

# SUR LE THÉORÈME DE BEURLING-POLLARD

JEAN-PIERRE KAHANE

## Introduction.

On note $A$ ou $\mathscr{F}\ell^1$ l'algèbre des fonctions

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{int}$$

sommes de séries de Fourier absolument convergentes. C'est une algèbre de Banach, avec la norme

$$\|f\|_A = \sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| \cdot$$

On note $PM$ ou $\mathscr{F}\ell^\infty$ l'espace des pseudomesures, c'est à dire des distributions

$$T \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

à coefficients de Fourier bornés; c'est l'espace de Banach dual de $A$, avec la norme

$$\|T\|_{PM} = \sup |c_n| ,$$

la dualité étant définie par

$$\langle T, f \rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \gamma_{-n}$$

(ainsi, si $T$ est une mesure, $\langle T, f \rangle$ est l'intégrale de $f$ par rapport à $T$).

Le problème de la synthèse spectrale, résolu négativement par Malliavin en 1959, est le suivant: étant donné un compact $E$ sur le cercle, une fonction $f \in A$ s'annulant sur $E$, une pseudomesure $T$ portée par $E$, a-t-on nécessairement $\langle T, f \rangle = 0$? On dit qu'un ensemble $E$, ou une fonction $f$, ou une pseudomesure $T$, satisfait la synthèse spectrale si, une fois cet élément donné, le problème ci-dessus admet une réponse positive.

En 1953, Pollard, exploitant une idée de Beurling, avait montré que toute fonction $f \in A$ lipschitzienne d'ordre $\frac{1}{2}$ satisfait la synthèse spectrale [1]. Plus généralement, si $f \in A$ est telle que

Received September 5, 1966.

$$(1) \qquad |f(t)| \leqq K(d(t,F_f))^{\frac{1}{2}} ,$$

$K$ ne dépendant pas de $t$, $E_f$ étant l'ensemble des zéros de $f$, et $d(t,E_f)$ la distance de $t$ à $E_f$, alors $f$ satisfait la synthèse spectrale. D'autres énoncés, obtenus par la méthode de Beurling et Pollard, se trouvent en [2] et [3, chap. 9]; nous aurons l'occasion d'y revenir à la fin de cet article.

Depuis longtemps, on soupçonne que l'exposant $\frac{1}{2}$ dans (1) ne peut être remplacé par aucun nombre plus petit. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi. La méthode est un raffinement de celle de [2], qui nous avait permis seulement jusqu'ici de montrer que l'exposant $\frac{1}{2}$ ne peut être remplacé par aucun nombre plus petit que $\frac{1}{4}$ ([2], théorème 6).

**Le théorème principal.**

On considère la fonction aléatoire

$$F(t) = \sum_1^\infty a_n(X_n \cos\lambda_n t + Y_n \sin\lambda_n t) ,$$

où les $a_n$ sont des nombres réels positifs, les $\lambda_n$ des entiers positifs (il sera commode de ne pas supposer la suite $\lambda_n$ croissante), et les $X_n$ et $Y_n$ des variables aléatoires gaussiennes normales, mutuellement indépendantes. Rappelons que $\Lambda_\gamma$ désigne l'ensemble des fonctions $f$ lipschitziennes d'ordre $\gamma$, $\gamma > 0$, c'est à dire telles que

$$f(t')-f(t) = O(|t'-t|^\gamma) \quad t'-t \to 0 .$$

THÉORÈME 1. *Pour chaque entier $p \geqq 1$ et chaque $\gamma < \frac{1}{2}(p+1)^{-1}$ on peut choisir les $a_n$ et les $\lambda_n$ de sorte que presque sûrement $F \in A \cap \Lambda_\gamma$ et qu'avec une probabilité positive $F^p$ ne satisfasse pas la synthèse spectrale.*

La démonstration s'appuie sur les faits suivants, déjà utilisés en [2]:

1) Pour avoir $F \in A \cap \Lambda_\gamma$ p.s., la condition suivante est suffisante:

(2) $\{\lambda_n\}$ est une réunion finie de progressions géométriques et

$$a_n = O(\lambda_n^{-\gamma'}), \qquad \gamma' > \gamma,\ n \to \infty;$$

2) Pour que $F^p$ ne satisfasse pas la synthèse spectrale, il suffit que

$$(3) \qquad \int_0^\infty u^p \, \|e^{iuF}\|_{PM} \, du < \infty ,$$

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^\infty \int_{-\pi}^\pi e^{iuF(t)} \, dt du \neq 0$$

(lemme fondamental de Malliavin).

Posons

$$e^{iuF(t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} p_n(u)\, e^{int}\,.$$

Pour avoir (3), il suffit que, pour un $\varepsilon > 0$ et un $r > 1$,

$$\int_1^\infty u^{p+1+\varepsilon}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|p_n(u)|^{2r}\right)^{1/(2r)}\frac{du}{u^{1+\varepsilon}} < \infty$$

et a fortiori que

$$\int_1^\infty u^{2r(p+1+\varepsilon)}\sum_{-\infty}^{\infty}|p_n(u)|^{2r}\frac{du}{u^{1+\varepsilon}} < \infty\,.$$

Pour avoir (3) presque sûrement, il suffit donc que, pour un entier $r > 1$ convenable et un $q > r(p+1)$ on ait

$$\int_0^\infty u^{2q-1}\mathscr{E}\left(\sum_{-\infty}^{\infty}|p_n(u)|^{2r}\right)du < \infty\,, \tag{5}$$

où $\mathscr{E}$ désigne l'espérance mathématique. On vérifie alors que

$$\mathscr{E}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iuF(t)}\,dt\,du = 2\pi\exp\left(-\tfrac{1}{2}u^2\sum_1^\infty a_n{}^2\right)$$

donc (4) a lieu avec une probabilité positive.

La démonstration du théorème 1 consistera à montrer que l'on peut choisir les $a_n$ et les $\lambda_n$ de façon que l'on ait simultanément (2) et (5).

**Démonstration du théorème 1.**

Calculons le premier membre de (5). On a

$$\mathscr{E}(|p_n(u)|^{2r}) = (2\pi)^{-2r}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\mathscr{E}(e^{iuF(s_1)+\ldots+F(s_r)-F(t_1)-\ldots-F(t_r)})\cdot$$
$$\cdot\, e^{in(t_1+\ldots+t_r-s_1-\ldots-s_r)}\,ds_1\ldots ds_r\,dt_1\ldots dt_r\,,$$

$$\mathscr{E}(e^{iuF(s_1)+\ldots+F(s_r)-F(t_1)-\ldots-F(t_r)}) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}u^2\sum_1^\infty a_n{}^2\,\varphi(\lambda_n s_1,\ldots,\lambda_n t_r)\right),$$

où

$$\varphi(s_1,\ldots,t_r) = |e^{is_1}+\ldots+e^{is_r}-e^{it_1}-\ldots-e^{it_r}|^2\,.$$

Pour une identité approximative

$$\Delta(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\Delta}_n e^{int}, \qquad \hat{\Delta}_n \geqq 0\,,$$

on a par linéarité

$$\mathscr{E}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\Delta}_n |p_n(u)|^{2r}\right)$$

$$= (2\pi)^{-2r} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(-\tfrac{1}{2}u^2 \sum_{1}^{\infty} a_n{}^2\, \varphi(\lambda_n s_1, \ldots, \lambda_n t_r)\right) \cdot$$

$$\cdot \Delta(t_1 + \ldots + t_r - s_1 - \ldots - s_r)\, ds_1 \ldots ds_r\, dt_1 \ldots dt_r$$

et, en faisant tendre $2\pi\Delta(t)dt$ vers la mesure de Dirac, on a

$$\mathscr{E}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |p_n(u)|^{2r}\right)$$

$$= (2\pi)^{-2r+1} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \exp\Bigg(-\tfrac{1}{2}u^2 \sum_{1}^{\infty} a_n{}^2\, \varphi(\lambda_n s_1, \ldots, \lambda_n t_{r-1}, \lambda_n(s_1 + \ldots$$

$$+ s_r - t_1 - \ldots - t_{r-1}))\Bigg)\, ds_1 \ldots ds_r\, dt_1 \ldots dt_{r-1}\,.$$

Quitte à soustraire $s_r$ à toutes les autres variables d'intégration et à intégrer d'abord par rapport à $s_r$, on obtient

$$\mathscr{E}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |p_n(u)|^{2r}\right) = (2\pi)^{-2r+2} \iint \exp\left(-\tfrac{1}{2}u^2 \sum_{1}^{\infty} a_n{}^2\, \psi(\lambda_n s, \lambda_n t)\right) ds\, dt\,,$$

où l'on a posé $s = (s_1, \ldots s_{r-1})$, $t = (t_1, \ldots t_{r-1})$, $ds\,dt = ds_1 \ldots dt_{r-1}$, et

$$\psi(s,t) = |e^{is_1} + \ldots + e^{is_{r-1}} + 1 - e^{it_1} - \ldots - e^{it_{r-1}} - e^{i(s_1 + \ldots + s_{r-1} - t_1 - \ldots - t_{r-1})}|^2\,.$$

En multipliant par $u^{2q-1}$ et en intégrant, on a finalement

$$\int_0^{\infty} u^{2q-1} \mathscr{E}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} |p_n(u)|^{2r}\right) du = (2\pi)^{-2r+2}\Gamma(q) \iint \left(\sum_{1}^{\infty} a_n{}^2\, \psi(\lambda_n s, \lambda_n t)\right)^{-q} ds\,dt\,.$$

La dernière intégrale est prise sur le tore $T^{2r-2}$ (ici $T$ est l'ensemble des réels définis modulo $2\pi$). Nous nous proposons de construire les $a_n$ de façon qu'elle soit finie. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME. *L'ensemble des zéros communs à tous les $\psi(ls, lt)$, $l = 1, 2, \ldots$, est la partie de $T^{2r-2}$ formée par les $r!$ variétés linéaires de dimension $r-1$ qui se déduisent de la variété*

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} t_1 = s_1, \quad t_2 = s_2, \quad \ldots, \quad t_{r-1} = s_{r-1}, \\ s_1 + \ldots + s_{r-1} - t_1 \ldots - t_{r-1} = 0 \pmod{2\pi} \end{cases}$$

*en permutant les seconds membres de toutes les manières possibles.*

Preuve du lemme. Sur chacune des variétés definies, on a bien $\psi(ls, lt) = 0$ pour tout $l$. Inversement, si $\psi(ls, lt) = 0$ pour $l = 1, 2, \ldots$, on a aussi $\psi(ls, lt) = 0$ pour $l = 0, -1, -2, \ldots$, donc

$$\begin{aligned} & g(s_1) + \ldots + g(s_{r-1}) + g(0) - \\ & \quad - g(t_1) - \ldots - g(t_{r-1}) - g(s_1 + \ldots + s_{r-1} - t_1 \ldots - t_{r-1}) = 0 \end{aligned}$$

pour toute fonction $g \in A$. Posons

$$s_r = 0, \qquad t_r = s_1 + \ldots + s_{r-1} - t_1 - \ldots - t_{r-1} \pmod{2\pi}.$$

Pour chaque $x \in T$, soit $\sigma(x)$ et $\tau(x)$ respectivement le nombre des $s_j$ et des $t_j$ égaux à $x$, $j = 1, 2, \ldots r$. On a

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \lim(g(s_1) + \ldots + g(s_r)), \\ \tau(x) &= \lim(g(t_1) + \ldots + g(t_r)) \end{aligned}$$

lorsque $g$ tend ponctuellement vers la fonction, égale à 1 en $x$ et 0 partout ailleurs. Donc $\tau(x) = \sigma(x)$. Il s'ensuit que $s_1, \ldots s_r, t_1, \ldots, t_r$ prennent les mêmes valeurs avec le même ordre de multiplicité, c'est à dire qu'on a (6) ou l'une des relations obtenues en permutant les seconds membres.

A chaque entier $K \geqq 2$ on associe les $K^{2r-2}$ » $K$-cubes « de $T^{2r-2}$ obtenus en faisant varier $s, \ldots, s_{r-1}$, $t_1, \ldots t_{r-1}$ sur des intervalles de la forme $[2\pi k/K, 2\pi(k+1)/K]$, $k = 0, 1, \ldots, K-1$. On appelle cubes blancs ceux dont l'adhérence contient un zéro commun à tous les $\psi(ls, lt)$, et cubes noirs les autres. La réunion des cubes blancs constitue un ensemble $B$ dont la mesure, en vertu du lemme, est $O(K^{-r+1})$ quand $K \to \infty$. On désigne par $N$ l'ensemble complémentaire (ensemble noir). Il existe une combinaison linéaire à coefficients positifs des $\psi(ls, lt)$, soit

$$\varrho(s, t) = \sum_{l=1}^{L} b_l^2 \gamma(ls, lt),$$

telle que $\varrho(s, t) > 1$ sur $N$.

Soit $\alpha$ un nombre positif, qu'on définira plus loin. Définissons les $\lambda_n$ comme les éléments de la suite

$$\begin{gathered} 1, 2, \ldots, L, \\ K, 2K, \ldots, LK, \\ K^2, 2K^2, \ldots, LK^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

et les $a_n$ correspondants comme les coefficients

$$\begin{gathered} b_1, b_2, \ldots, b_L\,, \\ \alpha b_1, \alpha b_2, \ldots, \alpha b_L\,, \\ \alpha^2 b_1, \alpha^2 b_2, \ldots, \alpha^2 b_L\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Pour avoir (2), il suffit que $\alpha K^\gamma < 1$. Pour avoir (5), il suffit que la fonction

$$\chi(s,t) = \left(\sum_1^\infty a_n{}^2\, \psi(\lambda_n s, \lambda_n t)\right)^{-q} = \left(\sum_0^\infty \alpha^{2j}\, \varrho(K^j s, K^j t)\right)^{-q}$$

soit sommable sur $T^{2r-2}$; il est maintenant facile de donner une condition sur $\alpha$ pour qu'il en soit ainsi.

En effet, désignons par $\varrho^*(s,t)$ la fonction caractéristique de $N$ (ainsi $\varrho(s,t) \geqq \varrho^*(s,t)$), et désignons par $N_0, N_1, N_2, \ldots$ les ensembles

$$\begin{aligned} &N_0\colon\ \varrho^*(s,t) = 1\,, \\ &N_1\colon\ \varrho^*(s,t) = 0,\ \ \varrho^*(Ks,Kt) = 1\,, \\ &N_2\colon\ \varrho^*(s,t) = \varrho^*(Ks,Kt) = 0,\ \ \varrho^*(K^2 s, K^2 t) = 1\,, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Géométriquement, on obtient ces ensembles de la manière suivante: $N_0 = N$ est la réunion des $K$-cubes noirs, et $B_0 = B$ la réunion des $K$-cubes blancs; sur chacun des $K$-cubes blancs on reproduit, par homothétie de rapport $1/K$ à partir de $T^{2r-2}$, la construction de l'ensemble noir; on obtient un nouvel ensemble $N_1$, réunion de $K^2$-cubes noirs, contenu dans $B_0$; l'ensemble qui reste blanc, soit $B_1$, est une réunion de $K^2$-cubes blancs, sur lesquels on reproduit la construction de l'ensemble noir pour obtenir $N_2$, et ainsi de suite. En normalisant le mesure de Lebesgue sur $T^{2r-2}$, et en notant $|E|$ la mesure d'un ensemble $E$ (ainsi $|T^{2r-2}| = 1$), on a

$$\begin{aligned} |N_0| &= 1 - |B|, & |B_0| &= |B|\,, \\ |N_1| &= |B|(1-|B|), & |B_1| &= |B|^2, \\ |N_2| &= |B|^2(1-|B|), & |B_2| &= |B|^3, \text{ etc.} \end{aligned}$$

D'autre part, $\chi(s,t) \leqq \alpha^{-2jq}$ sur $N_j$. Il s'ensuit que $\chi(s,t)$ est sommable sur $T^{2r-2}$ dès que $\alpha^{-2q}|B| < 1$.

Le choix de $\alpha$ pour avoir (2) et (5) est donc possible dès que

$$|B| < K^{-2\gamma q}\,.$$

Or nous avons observé que $|B|$ est $O(K^{-r+1})$ quand $K \to \infty$. L'inégalité a donc lieu, pour $K$ assez grand, lorsque $2\gamma q < r-1$. Etant donné

$\gamma < \frac{1}{2}(p+1)^{-1}$, on peut bien choisir $r$ entier assez grand, puis $q$, de façon à avoir simultanément

$$q > r(p+1), \qquad 2\gamma q < r-1 .$$

Cela étant fait, on choisit $K$ assez grand, puis $\alpha$ entre $|B|^{-\frac{1}{2}q}$ et $K^{-\gamma}$, et alors on a (2) et (5). Cela achève la démonstration du théorème 1.

**Commentaires et compléments.**

P.s. la fonction $F^p$ définie au théorème 1 satisfait

$$|F^p(t)| \leqq K(d(t,E_F))^{\gamma p} .$$

Comme $\gamma p$ est arbitrairement voisin de $\frac{1}{2}$, on a le résultat annoncé, à savoir que l'exposant $\frac{1}{2}$ dans (1) ne peut être remplacé par aucun nombre plus petit.

Une généralisation très facile du théorème 1, dont nous laissons la vérification au lecteur, est la suivante.

THÉORÈME 2. *Pour chaque entier $p \geqq 1$ et chaque $\gamma < \frac{1}{2}(p+1)^{-1}$ on peut choisir les $a_n$ et les $\lambda_n$ de sorte que presque sûrement $F \in A \cap \Lambda_\gamma$ et que, pour chaque fonction réelle $g \in A$, il y ait une probabilité positive que $(F-g)^p$ ne satisfasse pas la synthèse spectrale.*

Comme application, soit $g_x$ une famille à un paramètre $x$ de fonctions appartenant à $A$. Il y a une probabilité positive que, pour un ensemble de valeurs de $x$ de mesure positive, $(F-g_x)^p$ ne satisfasse pas la synthèse spectrale.

En particulier, le théorème 2 fournit, pour chaque $\gamma < \frac{1}{4}$, des $f \in A \cap \Lambda_\gamma$ telles que, pour un ensemble de valeurs de $x$ de mesure positive, $f-x$ ne satisfasse pas la synthèse. On peut se demander si une amélioration de la méthode ne permettrait pas d'obtenir le même résultat pour chaque $\gamma < \frac{1}{2}$. Il n'en est rien, à cause du résultat suivant, qui découle simplement de la méthode de Beurling et Pollard.

THÉORÈME 3. *Si $f$ est une fonction réelle, $f \in A \cap \Lambda_\gamma$, et $\gamma < 1/(2p+1)$ ($p$ entier $\geqq 1$), $(f-x)^p$ satisfait la synthèse spectrale pour presque tout $x$.*

Par la méthode probabiliste, le mieux qu'on puisse espérer est donc de mettre en évidence des fonctions ne satisfaisant pas la synthèse dans chaque classe $\Lambda_\gamma, \gamma < \frac{1}{3}$.

La démonstration du théorème 3 est immédiate à partir des deux lemmes suivants; le premier, obtenu par la méthode de Beurling et Pollard, se trouve en [2] et en [3, p. 123]; nous nous contentons de donner la preuve du second.

LEMME. *Désignons par* $|E(h)|$ *la mesure de l'ensemble des points du cercle situés à une distance* $\leqq h$ *d'un ensemble fermé* $E$. *Si* $f \in A \cap \Lambda_\gamma$ *et si*

$$\lim_{h\to 0} (h^{2\gamma p-1}|E_f(h)|) = 0, \qquad p \textit{ entier } \geqq 1\,,$$

$f^p$ *satisfait la synthèse spectrale.*

LEMME. *Si* $f \in \lambda_\gamma$ *(c'est à dire* $f(t')-f(t)=o(|t'-t|^\gamma)$ *quand* $t'-t \to 0$), *on a*

$$\lim_{h\to 0} (h^{-\gamma}|E_{f-x}(h)|) = 0$$

*pour presque tout* $x$.

PREUVE. Pour chaque $h$, soit $R(h)$ la réunion des rectangles $I_n \times f(I_n)$, où $I_n=[nh,(n+1)h]$, $n=0,1,\ldots [2\pi/h]$. Elle recouvre le graphe de $f$, et sa surface $|R(h)|$ est $o(h^\gamma)$ quand $h \to 0$. Posons

$$|R(h)| = \varepsilon^2(h)\, h^\gamma$$

et désignons par $R(x,h)$ l'intersection de $R(h)$ avec la droite horizontale d'ordonnée $x$. Sur tout intervalle de longueur 1, l'ensemble des $x$ tels que la mesure linéaire de $R(x,h)$ satisfasse

$$|R(x,h)| > \varepsilon(h)\, h^\gamma$$

à une mesure inférieure à $\varepsilon(h)$. Quitte à choisir une suite $h_n$ telle que $\sum_1^\infty \varepsilon(h_n) < \infty$, on a donc

$$|R(x,h_n)| < \varepsilon(h_n)\, h_n^{\ \gamma}$$

pour $n > n(x)$ assez grand et presque tout $x$. Or $R(x,h)$ est une réunion d'intervalles de longueur $h$, recouvrant $E_{f-x}$. On a donc $|E_{f-x}(h)| \leqq 3\,|R(x,h)|$, donc

$$|E_{f-x}(h_n)| = o(h_n^{\ \gamma}) \quad \text{p.p. } (x)$$

et le lemme est démontré.

Remarquons que l'énoncé du théorème 3 peut être légèrement amélioré, en remplaçant l'hypothèse $f \in \Lambda_\gamma$, $\gamma < 1/(2p+1)$, par l'hypothèse plus faible $f \in \lambda_\gamma$, $\gamma = 1/(2p+1)$. Remarquons aussi que la preuve du dernier lemme, adaptée de manière évidente, montre que, si $f \in \Lambda_\gamma$, on a pour presque tout $x$

$$|E_{f-x}(h)| = o(h^{\gamma'}) \quad \text{pour tout } \gamma' < \gamma,\ h \to 0;$$

il en résulte que, pour presque tout $x$, la dimension de Hausdorff de $E_{f-x}$ ne dépasse pas $1-\gamma$.

## BIBLIOGRAPHIE

1. H. Pollard, *The harmonic analysis of bounded functions*, Duke Math. J. 20 (1953), 499–512.
2. J.-P. Kahane, *Sur la synthèse harmonique dans $\ell^\infty$*, An. Acad. Brasil. Ci. 32 (1960), 179–189.
3. J.-P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Paris, 1963.

UNIVERSITÉ DE PARIS, ORSAY, FRANCE