MATH. SCAND. 21 (1967), 80–89

SUR LA POSITIVITÉ DE LA FONCTION DE GREEN

JAAK PEETRE et IOAN A. RUS

Introduction.

Soit

$$L = L_0 + c(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

un opérateur (uniformément) elliptique dans un ouvert borné Ω de R^n; c'est-à-dire qu'on a

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geqq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \alpha > 0, \qquad a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$$

pour tout $\xi \in R^n$ et tout $x \in \Omega$. Pour fixer les idées, on va supposer que la frontiere Ω de Γ est indéfiniment différentiable et que les coefficients $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $b_i = b_i(x)$, $c = c(x)$ sont également indéfiniment différentiables, dans $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Considérons le problème de Dirichlet correspondant

$$Lu = f \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{1}$$

$$u = g \quad \text{sur } \Gamma\,. \tag{2}$$

Lorsque $c(x) \geqq 0$ pour tout $x \in \Omega$ on sait classiquement (voir par exemple Miranda [11, pp. 3–5]) que $f(x) \geqq 0$ pour $x \in \Omega$, $g(x) \geqq 0$ pour $x \in \Gamma$, entraîne $u(x) \geqq 0$ pour $x \in \Omega$ (principe de maximum). Il en résulte que pour le problème, (1)–(2), on a unicité (c'est-à-dire que le problème homogène ($f=0$, $g=0$), n'a que la solution banale $u=0$) et que la fonction de Green $G(x,y)$ existe et satisfait aux conditions de positivité suivantes:

$$G(x,y) \geqq 0 \quad \text{pour } x \in \Omega,\ y \in \Omega\,,$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \tilde{\nu}_y} \geqq 0 \quad \text{pour } x \in \Omega,\ y \in \Gamma\,,$$

$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_y$ désigne la « conormale » intérieure de Γ, dont les coordonnées $\tilde{\nu}_i$ sont données par

$$\tilde{\nu}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \nu_j\,;$$

ν_i sont les coordonnées de la normale intérieure.

Reçu le 25 janvier 1967; rev. le 27 février 1967.

Mais manifestement $c(x) \geqq 0$ n'est pas une condition nécessaire. Le but de cet article est nettement de chercher des conditions necessaires et suffisantes. Voici notre résultat principal.

THÉORÈME 1. *Supposons qu'on a l'unicité du problème de Dirichlet* (1)–(2) *pour l'opérateur L et le domaine Ω. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

i) *Il existe une fonction v telle que $Lv \geqq 0$ dans Ω, $v > 0$ dans $\bar{\Omega}$.*

ii) *Quelle que soit c_1 une fonction $\geqq c$, on a l'unicité du problème de Dirichlet pour l'opérateur $L_1 = L_0 + c_1$ et le domaine Ω.*

iii) *Quelle que soit Ω_1 un domaine $\subset \Omega$, on a l'unicité du problème de Dirichlet pour l'opérateur L et le domaine Ω_1.*

iv) *$f \geqq 0$ dans Ω, $g = 0$ sur Γ entraîne $u \geqq 0$ dans Ω.*

iv') *$G(x,y) \geqq 0$ pour $x \in \Omega$, $y \in \Omega$.*

v) *$f = 0$ dans Ω, $g \geqq 0$ sur Γ entraîne $u \geqq 0$ dans Ω.*

v') *$\partial G(x,y)/\partial \tilde{\nu}_y \geqq 0$ pour $x \in \Omega$, $y \in \Gamma$.*

Ce résultat exprime donc une certaine monotonicité, stabilité, du principe de maximum. (Pour le cas auto-adjoint voir aussi Tetereff [12].)

Le plan de l'article est le suivant. Au n° 1 on donne la démonstration du théorème 1. Au n° 2 on démontre deux formules variationnelles qui interviennent dans la démonstration du théorème 1. Finalement, au n° 3 on indique quelques applications du théorème 1.

1. Démonstration du théorème 1.

Nous allons suivre le schema logique suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \text{ii)} \arrow[r, Rightarrow] & \text{iv')} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{iv)} \\
\text{i)} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \text{iii)} \arrow[ur, Rightarrow] & \text{v')} \arrow[dl, Rightarrow] & \\
 & \text{v)} \arrow[ul, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

i) $\Rightarrow$ ii) et iii). Il suffit de démontrer que l'existence d'une fonction v telle que $Lv \geqq 0$ dans Ω, $v > 0$ dans Ω entraîne l'unicité du problème de Dirichlet pour l'opérateur L et le domaine Ω, puisque cette condition évidemment ne changera pas si l'on remplace c par $c_1 \geqq c$, ou Ω par $\Omega_1 \subset \Omega$. Soit $Lu = 0$ dans Ω, $u = 0$ sur Γ. Faisons la substitution $u = u'v$. On voit alors que u' satisfait à une équation $L'u' = 0$ où L' est encore un opérateur de même type que L, en particulier elliptique, mais c', le coefficient qui correspond à c, est maintenant $\geqq 0$. Donc on s'est ramené au cas classique mentionné plus haut.

ii) $\Rightarrow$ iv'). Nous allons fonder notre démonstration sur la formule variationnelle suivante (extension immédiate d'une formule due à Bergman–Schiffer, voir [2, pp. 543–548]):

$$(3) \qquad \delta G(x,y) = -\int_{\Omega} G(x,\xi)\, G(\xi,y)\, \delta c(\xi)\, d\xi, \qquad \Omega \text{ fixe, } c \text{ variable },$$

dont la démonstration (simple) sera indiquée au n° 2. Il résulte de (3) que

$$G(x,y) \geqq 0 \text{ et } \delta c(x) < 0 \ \Rightarrow\ \delta G(x,y) > 0 .$$

Donc G est une fonction décroissante de c. En particulier soit c_ζ, $0 \leqq \zeta \leqq 1$, une famille de fonctions telles que

1° $c_0 = c$,
2° $c_{\zeta_1}(x) < c_{\zeta_2}(x)$ si $\zeta_1 < \zeta_2$,
3° pour tout ζ on a l'unicité du problème de Dirichlet pour l'opérateur $L_\zeta = L_0 + c_\zeta(x)$,
4° $G_1(x,y) \geqq 0$.

Alors il vient $G_\zeta(x,y) \geqq 0$, où G_ζ est la fonction de Green correspondant à L_ζ. Donc en particulier $G(x,y) \geqq 0$. Pour démontrer notre assertion il suffit maintenant de prendre $c_\zeta(x) = c(x) + \alpha\zeta$, avec α assez grand > 0. En effet, 1° et 2° étant évidents, 3° résulte de ii) et 4° du cas classique de tout à l'heure.

iii) $\Rightarrow$ iv'). Démonstration analogue. On utilise maintenant la formule variationelle suivante (extension de la formule d'Hadamard, voir [6, pp. 93–98]).

$$(4) \qquad \delta G(x,y) = -\int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \tilde{\nu}_\xi} \frac{\partial G(\xi,y)}{\partial \nu_\xi} \delta\nu(\xi)\, ds_\xi, \qquad \Omega \text{ variable, } c \text{ fixe },$$

où $\delta\nu(\xi)$ désigne la variation dans la direction de ν, dont la démonstration, moins simple que celle de (3), sera également indiquée au n° 2. Outre $\partial G/\partial\nu \geqq 0$, qui résulte de ii) $\Rightarrow$ iv') et iv') $\Rightarrow$ v') pour $\Omega_1 \subset \Omega$ qu'on va démontrer ci-dessous, on utilise aussi $\partial G/\partial\tilde{\nu} \geqq 0$, qui résulte par le même raisonnement (voir aussi la remarque à la fin de ce n° pour une méthode directe plus simple).

iv) $\Leftrightarrow$ iv') et v) $\Leftrightarrow$ v'). Ceci est une conséquence banale de la représentation suivante de la solution de (1)–(2):

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)\, f(y)\, dy + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x,y)}{\partial \tilde{\nu}_y} g(y)\, ds_y .$$

iv$'$) $\Rightarrow$ v$'$). On a, x étant fixe, $G(x,y) \geqq 0$ dans Ω, mais $G(x,y)=0$ sur Γ. Donc
$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \varepsilon_y} \geqq 0$$
pour tout champ de vecteurs $\varepsilon = \varepsilon_y$ dirigé à l'intérieur de Ω. En particulier on peut donc prendre $\varepsilon = \tilde{\nu}$ (ainsi que $\varepsilon = \nu$; voir iii) $\Rightarrow$ iv$'$), ci-dessus).

v) $\Rightarrow$ i). On peut prendre pour v n'importe quelle fonction v avec $Lv=0$ dans Ω, $v>0$ sur Γ. Vu $\partial G/\partial \tilde{\nu}_y \geqq 0$ on a $v \geqq 0$ dans Ω. Or on ne peut pas avoir $v=0$ dans Ω. En effet, si on avait $v(x)=0$ pour $x \in \Omega$, on aurait
$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \tilde{\nu}} = 0 \quad \text{pour tout } y \in \Gamma .$$
D'où $u(x)=0$ pour toute u solution de $Lu=0$, ce que n'est pas possible (voir [7]).

Remarque. Dans une forme un peu affaiblie on peut démontrer le théorème 1 aussi directment sans utiliser la technique infinitésimale fondée sur les formules variationnelles (3) et (4). Par exemple on peut montrer iii) $\Rightarrow$ v) comme suit. Soit $Lu=0$ dans Ω, $u>0$ sur Γ. Soit Z le sous-ensemble de Ω où $u=0$, et supposons que $Z \neq \emptyset$. On sait (voir [7], [2], [10]) que Z sépare Ω. Donc il existe $\Omega_1 \subset \Omega$ telle que $u \neq 0$ dans Ω_1 et $u=0$ sur Γ_1. C'est une contradiction avec iii). Donc $Z=\emptyset$ et $u>0$ dans Ω. Un passage à la limite montre ensuite $u \geqq 0$ sur Γ entraîne $u \geqq 0$ dans Ω. De même nous pouvons démontrer ii) et iii) $\Rightarrow$ iv) comme suit. Soit
$$\begin{aligned} Lu &= f \ \text{ dans } \Omega, \qquad u=0 \ \text{ sur } \Gamma, \\ L_1u_1 &= f \ \text{ dans } \Omega, \qquad u_1=0 \ \text{ sur } \Gamma, \end{aligned}$$
où $L_1 = L + c_1$, $c_1 \geqq \max(c,0)$, et $f \geqq 0$. Parce que en particulier $c_1 \geqq 0$ on a $u_1 \geqq 0$. Donc il suffit de démontrer que $u \geqq u_1$. Sinon il existe un domaine $\Omega_* \subset \Omega$ telle que $u_1 \geqq u$ dans Ω_*, $u_1 = u$ sur Γ_*. Avec $u_* = u_1 - u$ il vient alors
$$L_0 u_* + c_1 u_1 - cu = 0 \quad \text{dans } \Omega_*$$
ou encore
$$L_0 u_* + c_* u_* = 0 \quad \text{dans } \Omega_* ,$$
où l'on a posé
$$c_* = \frac{c_1 u_1 - c_u}{u_1 - u}.$$
De plus $u_* = 0$ sur Γ_*. On montre que $c_* \geqq c$ dans Ω_*. Donc on est dans une situation où on a l'unicité. Donc $u_* = 0$ dans Ω_* et $u \geqq u_1$ dans Ω.

2. Démonstration des deux formules variationneles.

a. La démonstration de (3) ne cause aucune difficulté. En prenant formellement la variation (différentielle) dans (1)-(2) on obtient

$$\begin{aligned} L_0(\delta u)+c\delta u &= -(\delta c)u \quad \text{dans } \Omega . \\ \delta u &= 0 \qquad\quad \text{sur } \Gamma . \end{aligned}$$

D'où:

$$\delta u(x) = -\int_\Omega G(x,\xi)\, u(\xi)\, \delta c(\xi)\, d\xi .$$

En prenant

$$f(x) = \delta(x-y), \qquad u(x) = G(x,y) ,$$

(3) en résulte aussitôt.

b. Pour démontrer (4) écrivons L dans la forme

$$L = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n e_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

avec

$$e_i(x) = b_i(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_j}$$

ou dans une forme abrégée:

$$L = -\operatorname{div} a \operatorname{grad} + e \operatorname{grad} + c .$$

L'adjoint M de L est alors donné par

$$M = -\operatorname{div} a \operatorname{grad} - \operatorname{div} e + c$$

Vue la formule de Green on peut mettre le problème (1)–(2) dans la forme fonctionelle (equivalente) suivante (« problème aux limites au sens de Višik–Soboleff »; voir Lions [9, pp. 32–36]):

$$\int_\Omega u M\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx + \int_\Gamma g \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde\nu}\, ds + \int_\Gamma h\varphi\, ds ,$$

avec

$$h = -\frac{\partial u}{\partial\tilde\nu} + (e\nu)u ,$$

ou encore

$$\int_\Omega u M\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx + \int_\Gamma g \frac{\partial\varphi}{\partial\tilde\nu} ds \mod \mathfrak{M} ,$$

où $\mathfrak{M}$ désigne l'espace vectoriel des fonctionnelles linéaires de la forme

$$\varphi \to \int_\Gamma h\varphi\, ds .$$

Soit maintenant $g=0$ et f à support contenu dans Ω. Il vient

$$\int_\Omega uM\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx + \int_\Gamma h\varphi\,ds = \int_\Omega f\varphi\,dx \quad \bmod \mathcal{M}.$$

Evidemment on a

$$\delta\int_\Omega uM\varphi\,dx = \int_\Omega \delta uM\varphi\,dx, \tag{5}$$

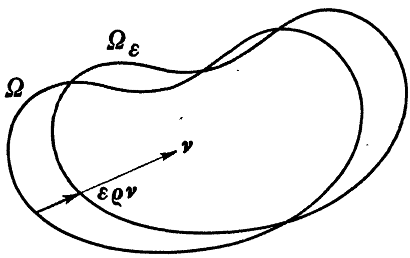
parce que $u=0$ sur Γ, et

$$\delta\int_\Omega f\varphi\,dx = 0 \tag{6}$$

par la même raison. Reste à évaluer

$$\delta\int_\Gamma h\varphi\,ds.$$

Considérons le domaine Ω_ε qui s'obtient de Ω en faisant le deplacement $\varepsilon\varrho$ dans la direction ν, ϱ étant une fonction donnée (cf. la figure).



Il suffit alors de calculer la derivée variationnelle « directionnelle » correspondante:

$$\frac{\delta}{\delta\varrho}\int_\Gamma h\varphi\,ds = \lim_{\varepsilon=0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon\varphi\,ds - \int_\Gamma h\varphi\,ds\right).$$

Pour cela écrivons

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} h_\varepsilon\varphi\,ds - \int_\Gamma h\varphi\,ds = \int_{\Gamma_\varepsilon}\varphi(-a\operatorname{grad}u_\varepsilon + eu_\varepsilon)\,\nu_\varepsilon\,ds - \int_\Gamma \varphi(-a\operatorname{grad}u+eu)\nu\,ds$$
$$= \int_{\Gamma_\varepsilon}\varphi(-a\operatorname{grad}(u_\varepsilon-u)-e(u_\varepsilon-u))\,\nu_\varepsilon\,ds + \int_{\Gamma_\varepsilon}\varphi(-a\operatorname{grad}u+eu)\,\nu_\varepsilon\,ds -$$
$$-\int_\Gamma\varphi(-a\operatorname{grad}u+eu)\,\nu\,ds.$$

Il est évident que le premier terme divisé par ε tend vers une fonctionnelle linéaire appartenant à $\mathfrak{M}$. Reste le second terme. Mais d'après la formule de Gauss, celui s'exprimè comme

$$\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\varepsilon-\Omega}\operatorname{div}(-\varphi a\operatorname{grad}u+eu)\,dx\,.$$

Donc en divisant par ε et en faisant ensuite ε tendre vers 0 on obtient

$$\int\limits_{\Gamma}\operatorname{div}(-\varphi a\operatorname{grad}u+\varphi eu)\,\varrho\,ds$$

Or on a

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(-\varphi a\operatorname{grad}u+\varphi eu) &= \varphi\{-\operatorname{div}(a\operatorname{grad}u)+e\operatorname{grad}u\}-\\ &\quad -a\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}u+\operatorname{div}(\varphi e)u\\ &= \varphi(f-cu)-a\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}u+\operatorname{div}(\varphi e)u\\ &= -a\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}u\\ &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde\nu}\frac{\partial u}{\partial\nu}.\end{aligned}$$

D'où enfin

$$\frac{\delta}{\delta\varrho}\int\limits_{\Gamma}h\varphi\,ds = -\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde\nu}\frac{\partial u}{\partial\nu}\varrho\,ds \quad \operatorname{mod}\mathfrak{M}\,,$$

ou encore

$$\delta\int\limits_{\Gamma}h\varphi\,ds = -\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde\nu}\frac{\partial u}{\partial\nu}\delta\nu\,ds \quad \operatorname{mod}\mathfrak{M}\,. \tag{7}$$

Compte tenu de (5), (6), (7) on a donc

$$\int\limits_{\Omega}\delta u\,M\varphi dx = -\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial\tilde\nu}\frac{\partial u}{\partial\nu}\delta\nu\,ds \quad \operatorname{mod}\mathfrak{M}\,.$$

D'où

$$\begin{cases} L(\delta u) = 0 & \text{dans}\,\Omega\,,\\ \delta u = \partial u/\partial\nu\,\delta\nu & \text{sur}\,\Gamma\,.\end{cases}$$

D'où encore la formule

$$\partial u(x) = -\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\tilde\nu}\frac{\delta u(\xi)}{\partial\nu}\delta\nu(\xi)\,ds_\xi\,.$$

En prenant $f(x)=\delta(x-y)$, $u(x)=G(x,y)$, la formule (4) en résulte tout de suite.

3. Quelques applications du théorème 1.

Commençons par la variante suivante du théorème 1, très utile pour les applications:

THÉORÈME 1^{bis}. *Supposons qu'on a l'unicité du problème* (1)–(2) *pour l'opèrateur* L *et le domaine* Ω, *et de plus que*

1^{bis}) *Il existe une fonction* v *telle que* $L(v) \geqq 0$ *dans* Ω, $v > 0$ *dans* Ω.

Alors les conditions iv), iv′), v), v′) *du théorème* 1 *ont encore lieu.*

DÉMONSTRATION. Il résulte du théorème 1 que par exemple $G_1(x,y) \geqq 0$ pour tout Ω_1 tel que de plus $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. Vue les propriétés de continuité de la fonction de Green ceci entraîne $G(x,y) \geqq 0$.

Passons ensuite à quelques unes de ces applications.

THÉORÈME 2. *Soit* L *autoadjoint. On a* $G(x,y) \geqq 0$ *si* $c(x) \geqq -\lambda_1$ *où* λ_1 *désigne la plus petite valeur propre de l'opérateur* L_0.

Ce résultat est dû à Bellman [4] (voir aussi Beckenbach–Bellman [3, pp. 148–149] et Tetereff [12]).

DÉMONSTRATION. 1ère MÉTHODE. On applique le théorème 1^{bis} avec $v = v_1$, où v_1 désigne une fonction propre de L_0 correspondante à λ_1. En effet on sait que v_1 ne peut pas s'annuler dans Ω; donc on peut supposer $v_1 > 0$ dans Ω.

2e MÉTHODE. Nous disons qu'on a l'unicité pour $L_1 = L_0 + c_1$, quelle que soit $c_1 \geqq c$. En effet, si on a

$$\begin{cases} L_1 u = 0 & \text{dans } \Omega\,, \\ \quad u = 0 & \text{sur } \Gamma\,, \end{cases}$$

avec $u \neq 0$, on trouve

$$0 = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + c_1 u^2 \right) dx > \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - \lambda_1 u^2 \right) dx \geqq 0,$$

ce qui est une contradiction. Il résulte maintenant du théorème 1 qu'on a $G_1(x,y) \geqq 0$ quel que soit $\Omega_1 \subset \Omega$ avec de plus $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. D'où $G(x,y) \geqq 0$ comme dans la démonstration du théorème 1^{bis}. A l'aide de cette dernière méthode on peut généraliser le théorème 2 un peu. (Cette extension on peut faire, aussi, avec la méthode de Bellman.)

THÉORÈME 3. *Soit encore* L *autoadjoint. On a* $G(x,y) \geqq 0$ *pourvu qu'on sait que la forme quadratique*

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u^2 \right) dx\,,$$

où u *parcourt l'ensemble où* $u = 0$ *sur* Γ, *est définie positive.*

Nous donnons maintenant quelques résultats qui valent encore dans le cas non-autoadjoint. Commençons par le cas particulier suivant assez simple.

THÉORÈME 4. *Supposons que Ω soit contenu dans le demi-espace $x_1 \geqq 0$ et considérons l'opérateur particulier $L = -\Delta + c(x)$. On a $G(x,y) \geqq 0$ pourvu que $c(x) \geqq -1/(4x_1^2)$.*

Ceci généralise un résultat de Kneser (voir [8]) pour l'opérateur $-u'' + c(x)u$ $(n=1)$.

DÉMONSTRATION. On applique le théorème 1^{bis} avec $v(x) = x_1^{\frac{1}{2}}$.

Ce résultat simple peut se généraliser comme suit.

THÉORÈME 5. *Soit L quelconque. Désignons par $d(x)$ la distance de x à Γ. On a $G(x,y) \geqq 0$ pourvu que*

$$c(x) \geqq -\frac{K}{(d(x))^2}$$

où K est une constante positive, qui ne dépend que de L_0 et de Ω.

DÉMONSTRATION. On prend pour v la solution du problème aux limites suivantes:

$$\begin{cases} L_0 v = (d(x))^{-\frac{3}{2}} & \text{dans } \Omega\,, \\ \quad v = 0 & \text{sur } \Gamma\,. \end{cases}$$

On a évidemment $v(x) > 0$ dans Ω. De plus, comme on va voir plus bas, on a aussi

$$v(x) \leqq K_1 (d(x))^{\frac{1}{2}}\,, \tag{7}$$

avec K_1 convenable. En admettant (7) pour le moment, nous allons terminer la preuve. En effet, il résulte

$$\begin{aligned} Lv = L_0 v + cv &\geqq (d(x))^{-\frac{3}{2}} - \max(0, -c(x))\, K_1 (d(x))^{\frac{1}{2}} \\ &= (d(x))^{\frac{1}{2}} K_1 \big(K_1^{-1} (d(x))^{-2} - \max(0, -c(x))\big) \geqq 0 \end{aligned}$$

si

$$\max(0, -c(x)) \leqq K_1^{-1} (d(x))^{-2}$$

ou

$$c(x) \geqq -K(d(x))^{-2}$$

avec $K = K_1^{-1}$. Donc on peut alors appliquer le théorème 1^{bis}.

Reste la preuve de (7). En introduisant localement de nouveaux coordonnées (curvilignes) de sorte que $d(x) \equiv x_1$ on se ramène de démontrer que si

$$\begin{cases} L_0 v = x_1^{-\frac{3}{2}} & \text{pour } x_1 > 0\,, \\ v = 0 & \text{pour } x_1 = 0\,, \end{cases}$$

alors, de moins localement, on a

$$v(x) = O(x_1^{\frac{1}{2}})\,. \tag{8}$$

Or on peut écrive

$$x_1^{-\frac{3}{2}} = -4 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} x_1^{\frac{1}{2}}\,,$$

et la fonction $x^{\frac{1}{2}}$ appartient à la classe $\mathrm{Lip}_{\frac{1}{2}}$. Donc il résulte des inégalités connues de type Schauder (voir Agmon–Douglis–Nirenberg [1, pp. 657–669]) que v appartient à $\mathrm{Lip}_{\frac{1}{2}}$. D'où (8) parce que $v=0$ pour $x_1=0$.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Agmon, L. Douglis, N. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions* I, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623–727.
2. N. Aronszajn, *Sur l'unicite du prolongement des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris 242 (1956), 723–725.
3. E. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Berlin · Göttingen · Heidelberg, 1961.
4. R. Bellman, *On the nonnegativity of Green's functions*, Boll. Un. Mat. Ital. 12 (1957), 411–413.
5. S. Bergman and M. Schiffer, *Kernel functions in the theory of partial differential equations of elliptic tippe*, Duke Math. J. 15 (1948), 535–566.
6. S. Bergman and M. Schiffer, *Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics*, New York, 1953.
7. J. Bochenek, *Some properties of solutions of elliptic partial differential equations of the second order*, Ann. Polon. Math. 16 (1965), 149–152.
8. A. Kneser, *Untersuchungen über die reellen linearen Differentialgleichungen*, Math. Ann. 42 (1893), 409–435.
9. J. L. Lions, *Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*, Berlin. Göttingen. Heidelberg, 1961.
10. A. Mc Nabb, *Strong comparison theorems for elliptic equations of second order*, J. Math. Mech. 10 (1961), 431–440.
11. C. Miranda, *Equazioni alle derivate parziali de tipo ellittico*, Berlin · Göttingen · Heidelberg, 1955.
12. A. Tetereff, *Théorèmes de Ciaplighin pour les équations elliptiques* (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR 134 (1960), 1024–1026.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES, LUND, SUÈDE
UNIVERSITÉ DE CLUJ, CLUJ, ROUMANIE