MATH. SCAND. 21 (1967), 190–194

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES SANS TORSION

G. VRANCEANU

Etant donnée une variété différentiable $V_n(x^1,\ldots,x^n)$ plongée dans un espace euclidien $E_N(y^1,\ldots,y^N)$ où $y^1,\ldots,y^N$ sont des coordonnées cartésiennes orthogonales dans E_N, on peut considérer les formules

$$(1)\ y^a = f^a(x^1,\ldots,x^n)+x^\alpha Y^a_\alpha(x^1,\ldots,x^n), \quad a=1,\ldots,N,\ \alpha=n+1,\ldots,N\,,$$

où $x^\alpha=0$ définissent dans E_N un voisinage V de V_n et où Y^a_α sont les composantes de $N-n$ vecteurs orthogonaux à V_n et orthogonaux entre eux; donc nous avons

$$(2) \qquad df^a Y^a_\alpha = 0, \qquad Y^a_\alpha Y^a_\beta = \delta^\alpha_\beta\,.$$

Cela fait, j'ai montré en 1930 [3, ch. V] que l'on peut écrire la métrique de E_N sous la forme

$$(3) \qquad ds^2 = (dy^a)^2 = ds^2+2x^\alpha\varphi_\alpha+2x^\alpha dx^\beta\psi_{\alpha\beta}+x^\alpha x^\beta\varphi_{\alpha\beta}+(dx^\alpha)^2$$

où ds^2 est la métrique de V_n dans le voisinage V et où φ_α sont les secondes formes fondamentales qui sont donc des formes quadratiques, et $\psi_{\alpha\beta}$ sont des formes linéaires que j'ai appellées torsions. Si nous utilisons un système de congruences orthogonales dans V_n nous avons

$$(4) \qquad \begin{gathered} ds^2 = (ds^1)^2+\ldots+(ds^n)^2\,, \\ \varphi_\alpha = b_{\alpha hk}ds^h ds^k, \quad \psi_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta h}ds^h, \quad \psi_{\alpha\beta}+\psi_{\beta\alpha} = 0\,. \end{gathered}$$

Cela dit, du fait que la métrique (3), doit être euclidienne, il en résulte les formules de Gauss, de Codazzi et de Ricci–Kühne et la propriété que $\varphi_{\alpha\beta}$, qui sont aussi des formes quadratiques en ds^h, s'expriment à l'aide de φ_α et $\psi_{\alpha\beta}$.

En congruences orthogonales les formules de Gauss s'écrivent

$$(5) \qquad \gamma^h_{klr} = b_{\alpha hl}b_{\alpha kr}-b_{\alpha hr}b_{\alpha kl}$$

où γ^h_{klr} sont les coefficients de Ricci à quatres indices, qui sont aussi les composantes du tenseur de courbure, dans notre système de congruences orthogonales.

Reçu le 21 juillet 1966.

En ce qui concerne les équations de Ricci–Kühne elles nous donnent les quantités

$$\Omega_{\alpha\beta kl} = b_{\alpha hk} b_{\beta hl} - b_{\alpha hl} b_{\beta hk}$$

en fonction des composantes des torsions $a_{\alpha\beta i}$ et de leurs dérivées, et j'ai montré que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse changer les vecteurs Y^a_α de façon que les torsions soient nulles est que nous ayons $\Omega_{\alpha\beta kl} = 0$.

Nous allons observer maintenant que les formes de différents degrés qui déterminent les classes normales de Pontryagin sont construites à l'aide des formes gauches symétriques [1, p. 36]

$$\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta kl} ds^k \delta s^l .$$

Donc il en résulte le théorème:

Si le plongement de V_n dans E_N est sans torsion, les classes normales de Pontryagin sont toutes nulles[1].

Nous allons observer aussi que si l'on réduit, ce qui est toujours possible, par une transformation des congruences orthogonales une des formes φ_α, par exemple φ_{n+1}, à la forme canonique

$$\varphi_{n+1} = b_{n+1hh} (ds^h)^2, \quad b_{n+1hk} = 0, \; h \neq k ,$$

on peut réduire aussi les autres formes φ_α, $\alpha > n+1$, à la forme canonique, si les torsions sont nulles. Nous avons donc le théorème:

Si les torsions sont nulles, il existe un système de congruences orthogonales dans lequel toutes les formes φ_α sont réduites à la forme canonique

$$\varphi_\alpha = b_{\alpha hh} (ds^h)^2 .$$

Nous dirons que ces congruences sont des congruences canoniques pour l'espace V_n sans torsion.

Or les équations de Gauss nous disent que dans ce système de congruences les coefficients de Ricci γ^h_{klr} à trois ou quatre indices distincts sont nuls et que pour ceux a deux indices distincts nous avons

$$\gamma^h_{khk} = h_{\alpha hh} h_{\alpha kk} . \tag{6}$$

En tenant compte du fait que γ^h_{khk} représente la courbure de la facette déterminée par la congruence h et la congruence k et en interprétant $b_{\alpha hh}$

[1] C'est un problème que j'ai considéré aussi dans une conférence que j'ai faite à l'Institut Mathématique de l'Université de Aarhus, le 9 juin 1966.

comme les composantes d'un vecteur v_h dans l'espace euclidien E_{N-n}, il en résulte que nous avons

$$\gamma^h_{khk} = v_h \times v_k = |v_h||v_k| \cos\theta_{hk} \tag{6'}$$

où $\times$ signifie produit scalaire et $|v_h|, |v_k|$ sont les longueurs des vecteurs v_h, v_k et θ_{hk} leur angle. Il en résulte que la courbure de la facette h, k est positive ou négative suivant que l'angle θ_{hk} est aigu ou obtus.

Le fait que les composantes γ^h_{klr} de la courbure sont nulles si trois des indices sont distincts, nous dit que nous avons

$$\gamma_{kr} = \gamma^h_{khr} = 0, \quad k \neq r ;$$

donc un espace V_n sans torsion est un espace dont la forme de Ricci est donnée dans des congruences canoniques par la formule

$$R = \gamma_{kk}(ds^k)^2 .$$

Supposons que l'espace V_n est à un nombre pair de dimensions $n=2m$. Dans ce cas on peut définir, comme on sait, une courbure de Gauss généralisée par la formule

$$K = \sum \gamma^{\alpha_1}_{\alpha_2\beta_1\beta_2} \cdots \gamma^{\alpha_{n-1}}_{\alpha_n\beta_{n-1}\beta_n} \varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\varepsilon^{\beta_1\ldots\beta_n}$$

où $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ de même que $\beta_1,\ldots,\beta_n$ sont des permutations des nombres $1,\ldots,n$ et $\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ est égal à 1 ou à -1 suivant que la permutation $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ est paire ou impaire.

Dans le cas des espaces V_n sans torsion on peut supposer $\alpha_i=\beta_i$; donc nous avons

$$K = |v_1| \ldots |v_n| \sum \cos\theta_{\alpha_1\alpha_2} \cos\theta_{\alpha_3\alpha_4} \ldots \cos\theta_{\alpha_{n-1}\alpha_n} ,$$

ce qui nous dit que si les angles sont obtus, K est positif si m est un nombre pair tandis qu'il est toujours négatif si m est un nombre impair. Donc nous avons le théorème:

Si V_{2m} est fermée et sans torsion et si les courbures des facettes sont toujours négatives, la caractéristique d'Euler est positive si m est paire et négative si m est impaire.

On croit que la théorème est vrai aussi dans le cas où V_{2m} est avec torsion [2, p. 169].

Supposons maintenant que l'espace V_n est un espace symétrique (espace de Cartan). En ce cas il est facile à voir que l'on doit avoir les formules

$$\gamma^i_{kik}(\gamma^i_{jij} - \gamma^k_{jkj}) = 0 .$$

Cela nous dit que si $\gamma^i_{kik} \neq 0$, nous devons avoir $\gamma^i_{jij} = \gamma^k_{jkj}$, quelque soit j, donc l'espace V_n est ou bien un espace à courbure constante ou bien le produit direct d'un certain nombre d'espaces à courbure constante. Nous avons donc le théorème:

Les espaces symétriques irréductibles qui ne sont pas à courbures constantes, ne sont pas d'espaces V_n sans torsion.

Supposons maintenant que l'espace V_n est un espace quelquonque, mais que l'on sait que la classe de V_n est au plus $n-1$ donc que $N \leqq 2n-1$. En ce cas on peut démontrer le théorème:

Si toutes les facettes ont des courbures négatives ou nulles, la variété V_n n'est pas fermée.

Pour la démonstration on part du fait qu'étant donné deux vecteurs unitaires u, v, le signe de la courbure de la facette définie par u, v est donné par la formule

$$K(u,v) = \gamma^h_{klr} u^h v^k u^l v^r .$$

Or, en tenant compte de (5), nous avons

$$K(u,v) = \varphi_\alpha(u,u)\varphi_\alpha(v,v) - \varphi_\alpha{}^2(u,v) ,$$

où on a posé

$$\varphi_\alpha(u,u) = b_{\alpha hk} u^h u^k, \qquad \varphi_\alpha(u,v) = b_{\alpha hk} u^h v^k .$$

Si la variété V_n est fermée, il en existe au moins un point dans lequel l'ensemble $c_\alpha \varphi_\alpha$ contient une forme definie, car autrement il y aurait des fonctions ponctuelles de V_n n'ayant pas de maximum dans V_n. Supposons que la forme φ_{n+1} est définie. Si u est un vecteur donné, par exemple $u^i = \delta^i_n$, on peut s'arranger par un changement des vecteurs Y^a_α de façon que $\varphi_\alpha(u,u) = 0$, $\alpha > n+1$. Donc nous avons

$$K(u,v) = \varphi_{n+1}(u,u)\varphi_{n+1}(v,v) - \varphi_\alpha{}^2(u,v) .$$

Or on peut choisir, si $N \leqq 2n-1$, un vecteur v de façon que $\varphi_\alpha(u,v) = 0$, et pour un tel vecteur $K(u,v)$ est positif, car $\varphi_{n+1}(u,u)$, $\varphi_{n+1}(v,v)$ ont le même signe et ne sont pas nulles.

Dans le cas des espaces V_n sans torsion le théorème devient:

Si $N \leqq 2n-1$ et tous les angles θ_{hk} sont obtus ou droits, la variété V_n n'est pas fermée.

Si tous les angles θ_{hk} sont droits, l'espace V_n est sans courbure, et pour qu'il soit fermé il faut que $N \geqq 2n$. Nous connaissons une variété V_n fermée sans courbure, c'est le tore T_n défini comme produit de n

cercles, donc à l'aide de n angles $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Nous allons montrer que T_n est aussi sans torsion. En effet on peut considérer pour T_n les formules de plongement dans

$$E_{2n}(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)$$

avec

$$x^i = \cos\theta_i(1+t_i), \qquad y^i = \sin\theta_i(1+t_i)\ ,$$

et alors nous avons comme métrique de E_{2n} dans ces coordonnées curvilignes

$$d\sigma^2 = d\theta_i^2 + 2t_i d\theta_i^2 + t_i^2 d\theta_i^2 + dt_i^2\ .$$

Cela nous dit que nous avons dans les formules (3) correspondantes au tore T_n

$$\varphi_\alpha = d\theta_\alpha^2. \quad \varphi_{\alpha\alpha} = d\theta_\alpha^2, \quad \varphi_{\alpha\beta} = 0 \text{ pour } \alpha \neq \beta, \quad \psi_{\alpha\beta} = 0;$$

donc les torsions sont nulles.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. S. Chern, *La géométrie des sous-variétés d'un espace euclidien à plusieurs dimensions*, Enseignement Math. 40 (1955), 26–46.
2. S. S. Chern, *The geometry of G-structures*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 167–219.
3. G. Vranceanu, *Leçons de géométrie différentielle* I, Bucarest, 1957.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, ACADÉMIE R.S.R.
BUCAREST, ROUMANIE