MATH. SCAND. 22 (1968), 203–208

ÜBER DIE SCHWACHE STABILITÄT LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT PERIODISCHEN KOEFFIZIENTEN

HEINZ LANGER

1.

Es sei H ein separabler Hilbertraum, D ein beschränkter und beschränkt invertierbarer Operator in H. In [4, Satz 4.1] beweisen B. Marksjö und B. Textorius ein Kriterium für die sog. schwache Stabilität (Definition S. 205) der Differentialgleichung

$$\frac{du(t)}{dt} = iA(t)u(t), \qquad 0 \leqq t < \infty, \tag{1}$$

in H; dabei ist $A(t)=A+B(t)$ mit einem speziellen, von t unabhängigen vollstetigen, selbstadjungierten und D-selbstadjungierten Operator A und einer periodischen operatorwertigen Funktion $B(t)$, definiert für $t \geqq 0$, die gewissen Regularitätsbedingungen genügt und deren Werte für fast alle t vollstetige, D-selbstadjungierte Operatoren sind.

Wir zeigen in der vorliegenden Note, dass sich mit der von den genannten Autoren benutzten Methode ein in verschiedener Hinsicht allgemeineres Kriterium beweisen lässt: Die Operatoren A und $B(t)$ brauchen nicht notwendig vollstetig zu sein, der Operator A kann von allgemeinerer Gestalt sein als in [4] und die Bedingung für das »Kleinsein« des Operators $B(t)$ kann abgeschwächt und, wie uns scheint, einfacher formuliert werden.

2.

Neben dem gewöhnlichen Skalarprodukt (x,y) definieren wir in H ein »indefinites« Skalarprodukt durch die Gleichung

$$[x,y] = (Dx,y), \qquad x,y \in H .$$

Für einen abgeschlossenen linearen Operator S in H sei $S^+ = D^{-1}S^*D$; S heisst D-selbstadjungiert, wenn $S=S^+$, und D-unitär, wenn $SS^+ = S^+S = I$ gilt. Einen D-selbstadjungierten Operator S nennen wir D-

Eingegangen am 30. Mai 1967.

nichtnegativ, wenn $[Sx,x] \geqq 0$, $x \in H$, gilt. Spektraleigenschaften D-nichtnegativer (oder, allgemeiner, sog. definisierbarer) Operatoren wurden in [3] (vgl. auch [2]) untersucht.

Es sei jetzt U ein D-unitärer Operator. Wir definieren einen D-selbstadjungierten Operator W durch die Gleichung

$$W = i(U^{-1}+I)(U-I) .$$

Falls -1 kein Eigenwert des Operators U ist, existiert die ebenfalls D-selbstadjungierte Cayleytransformierte

$$V = i(U-I)(U+I)^{-1}.$$

V ist i.a. unbeschränkt, die Punkte $\pm i$ gehören zur Resolventenmenge $\varrho(V)$ von V; W ist stets beschränkt und zwischen V und W besteht der Zusammenhang

$$W = 4V(V^2+I)^{-1};$$

also ist insbesondere $\mathscr{R}(V) = \mathscr{R}(W)$. ($\mathscr{R}(V)$ bezeichnet den Wertebereich, $\mathscr{N}(V)$ den Nullraum des Operators V.) Offensichtlich ist W genau dann D-nichtnegativ, wenn dies für V zutrifft. Während B. Marksjö und B. Textorius die Cayleytransformierte V benutzen, erweist sich für die folgenden Betrachtungen der Operator W als geeigneter.

Schliesslich führen wir wie in [4] noch den Hilbertraum $\mathscr{H}$ aller auf $[0,1]$ definierten und stark messbaren Funktionen $x(t)$ mit Werten in H ein, für die

$$\int_0^1 \|x(t)\|^2\, dt < \infty$$

gilt. Eine auf $[0,1]$ erklärte Funktion $T(t)$, deren Werte abgeschlossene lineare Operatoren in H sind, definiert dann einen linearen Operator $\tilde{T}$ in $\mathscr{H}$, erklärt auf der Menge aller Funktionen $\tilde{x} = x(t) \in \mathscr{H}$ mit $x(t) \in \partial T(t)$ durch die Gleichung

$$(\tilde{T}\tilde{x})(t) = T(t)x(t) .$$

Ist der Operator $\tilde{T}$ beschränkt in $\mathscr{H}$, so bezeichnen wir seine Norm mit $\|\tilde{T}\|_{\mathscr{H}}$.

3.

Wir betrachten im folgenden die Gleichung (1) mit einer Operatorfunktion $A(t)$ der Gestalt $A(t) = A + B(t)$, die Menge der Eigenwerte des Operators A wird mit $\sigma_p(A)$ bezeichnet. Dabei genüge A den folgenden Bedingungen:

1) A ist beschränkt, selbstadjungiert und D-selbstadjungiert;
2) $n\pi \notin \sigma_p(A)$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,
3) der Operator $i(e^{-iA}+I)(e^{iA}-I)$ ist D-nichtnegativ;
4) es gibt eine monoton wachsende Folge (P_n) endlichdimensionaler selbstadjungierter Projektionen in H mit den folgenden Eigenschaften:

$$P_n \to I \text{ (stark)}, \quad DP_n = P_n D, \quad AP_n = P_n A .$$

Aus 1) und 4) folgt insbesondere, dass wir eine orthonormierte Basis (e_ν) in H wählen können, die aus Eigenelementen des Operators A besteht: $Ae_\nu = a_\nu e_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Mit den auf Grund von Voraussetzung 2) positiven Zahlen

$$l_\nu = \min_{k=0, \pm 1, \ldots} |a_\nu - k\pi|, \qquad \nu = 1, 2, \ldots ,$$

definieren wir in H einen i.a. unbeschränkten Operator $L^{(A)}$ durch die Gleichungen

$$L^{(A)} e_\nu = l_\nu^{-1} e_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Die störende Operatorfunktion $B(t)$ genüge den folgenden Bedingungen:

1′) $B(t)$ ist beschränkt und D-selbstadjungiert, $0 \leqq t \leqq \infty$;
2′) $B(t+1) = B(t)$, $0 \leqq t < \infty$;
3′) $B(t)$ ist schwach messbar, und $\|B(t)\|$ ist integrierbar über $[0, 1]$.

Bekanntlich betrachtet man neben (1) die Differentialgleichung

$$\frac{dU(t)}{dt} = iA(t)U(t), \quad 0 \leqq t < \infty, \qquad U(0) = I , \tag{3}$$

im Ring $[H]$ der beschränkten linearen Operatoren in H und bezeichnet für die unter den Voraussetzungen 1), 1′), 2′) und 3′) eindeutig bestimmte und für alle $t \geqq 0$ D-unitäre Lösung $U(t)$ von (3) den Operator $U = U(1)$ als Monodromieoperator der Differentialgleichung (1). Für die Lösung $U(t)$ von (3) ist $U^{-1}(t)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{dX(t)}{dt} = iX(t)A(t), \quad 0 \leqq t < \infty, \qquad X(0) = I .$$

Definition. Die Differentialgleichung (1) mit periodischer Funktion $A(t)$ (Periode 1) heisst *stabil*, wenn für ihren Monodromieoperator U gilt:

$$\|U^m\| \leqq M, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots ;$$

sie heisst *schwach G-stabil* für eine Teilmenge $G \subset H$, wenn für jedes Paar von Elementen $x \in H$ und $y \in G$ eine Konstante $M_{x,y}$ existiert, so dass für ihren Monodromieoperator U gilt:

$$|[U^m x, y]| \leqq M_{x,y}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

SATZ. *Der Operator A genüge den Bedingungen* 1)–4), *die operatorwertige Funktion $B(t)$ genüge den Bedingungen* 1′)–3′) *sowie der folgenden:*

$$\|\widetilde{L^{(A)}B}\|_{\mathscr{H}} \leqq 1 \tag{4}$$

für den durch (2) *definierten Operator $L^{(A)}$. Bezeichnet U den Monodromieoperator der Differentialgleichung*

$$\frac{du(t)}{dt} = i\big(A + B(t)\big)u(t), \qquad 0 \leqq t < \infty, \tag{5}$$

dann ist der Operator

$$W = i(U^{-1} + I)(U - I)$$

D-nichtnegativ.

BEWEIS. Wir setzen $A_n = P_n A$, $D_n = P_n D$, $B_n(t) = P_n B(t) P_n$, $H_n = P_n H$ und betrachten für $0 \leqq \theta \leqq 1$ die Differentialgleichung

$$\frac{du(t)}{dt} = i\big(A_n + \theta B_n(t)\big)u(t), \qquad 0 \leqq t < \infty,$$

im endlichdimensionalen Raum H_n. Bezeichne $U_n^{(\theta)}(t)$ die Lösung der zugehörigen Differentialgleichung

$$\frac{dX(t)}{dt} = i\big(A_n + \theta B_n(t)\big)\, X(t), \quad 0 \leqq t < \infty, \qquad X(0) = I_n,$$

in $[H_n]$, $U_n^{(\theta)}$ ihren Monodromieoperator und

$$W_n^{(\theta)} = i\big((U_n^{(\theta)})^{-1} + I_n\big)(U_n^{(\theta)} - I_n).$$

Bekanntlich sind $U_n^{(\theta)}$ und $(U_n^{(\theta)})^{-1}$ stetige Funktionen von θ. Wir zeigen, dass der Operator $W_n^{(1)}$ D_n-nichtnegativ ist. Anderenfalls gäbe es einen Wert θ_0, $0 \leqq \theta_0 < 1$, und einen Vektor $x_0 \in H_n$, $x_0 \neq 0$, mit

$$D_n W_n^{(\theta_0)} \geqq 0, \qquad D_n W_n^{(\theta_0)} x_0 = 0,$$

d.h., mindestens einer der Punkte ± 1 wäre Eigenwert von $U_n^{(\theta_0)}$. Sei z.B.

$$U_n^{(\theta_0)} x_0 = -x_0 .$$

Wir betrachten die Funktion

$$w_0(t) = \exp(-it\pi)\, U_n^{(\theta_0)}(t) x_0 .$$

Sie genügt der Differentialgleichung

$$\frac{dw_0(t)}{dt} + (i\pi I_n - iA_n)w_0(t) = i\theta B_n(t)w_0(t)$$

sowie den Randbedingungen $w_0(0)=w_0(1)$. Daraus folgt mit $L_n^{(A)} = L^{(A)}|H_n$:

$$L_n^{(A)}\left(\frac{dw_0(t)}{dt} + (i\pi I_n - iA_n)w_0(t)\right) = i\theta L_n^{(A)}B_n(t)w_0(t)\,. \tag{6}$$

Die $\|\cdot\|_{\mathscr{H}_n}$-Norm der linken Seite dieser Gleichung ist nicht kleiner als $\|w_0(t)\|_{\mathscr{H}_n}$, denn die Eigenwerte des durch den selbstadjungierten Differentialausdruck

$$L_n^{(A)}\left(i\frac{d}{dt} - (\pi I_n - A_n)\right)$$

mit den Randbedingungen $w(0)=w(1)$ in $\mathscr{H}_n$ definierten Operators sind

$$\frac{a_\nu - (2k+1)\pi}{l_\nu}, \qquad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ \nu = 1, 2, \ldots,$$

also dem Betrage nach nicht kleiner als 1. Andererseits ist aber die $\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$-Norm der rechten Seite von (6) kleiner als $\|w_0(t)\|_{\mathscr{H}}$, denn aus (4) folgt $\|\widetilde{L_n^{(A)}B_n}\|_{\mathscr{H}} \leqq 1$. Folglich ist $W_n^{(1)}$ D_n-nichtnegativ.

Wir betrachten die Folge $(U_n^{(1)}P_n)$ in H. Es ist unschwer zu sehen, dass sie stark gegen den Monodromieoperator U von (5) konvergiert und für $(U_n^{(1)})^{-1}P_n$ ergibt sich entsprechend

$$(U_n^{(1)})^{-1}P_n \to U^{-1} \text{ (stark)}\,.$$

Dann konvergiert aber auch $W_n^{(1)}$ stark gegen W, folglich ist der Operator W D-nichtnegativ.

Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung. *Unter den Voraussetzungen des Satzes ist die Differentialgleichung* (5) *schwach G-stabil für $G = \mathscr{R}(W) + \mathscr{N}(W)$.*

Beweis. Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich wegen $[Uy, Uy] = [y, y]$, $y \in H$, für die Elemente von $\mathscr{R}(W)$ sofort

$$|[U^m x, Wz]| \leqq [Wz, z]^{\frac12}[WU^m x, U^m x]^{\frac12} = [Wz, z]^{\frac12}[Wx, x]^{\frac12}, \quad m = 0, \pm 1, \ldots.$$

Aus $x \in \mathscr{N}(W)$ folgt $U^2 x = x$ und daraus $\|U^m x\| \leqq M_x$, $m = 0, \pm 1, \ldots$.

Bemerkung 1. Setzt man an Stelle von (4) sogar $\|L^{(A)}B\|_{\mathscr{H}} < 1$ voraus, dann sind ± 1 auch keine Eigenwerte von U; in diesem Falle ist folglich $\mathscr{N}(W) = \{0\}$ und $\mathscr{R}(W)$ dicht in H.

Bemerkung 2. Ist der Operator W D-nichtnegativ, so hat der Monodromieoperator U eine Eigenspektralfunktion auf $[0,2\pi)$ (siehe [3]), für die höchstens 0 und π als kritische Punkte in Frage kommen. Also gibt es zu jedem Intervall Δ, dessen Abschliessung ganz in $(0,\pi)$ (bzw. $(\pi,2\pi)$) enthalten ist, einen Teilraum H_Δ, so dass Folgendes gilt:

$$UH_\Delta \subset H_\Delta, \qquad \sigma(U|H_\Delta) \subset e^{i\bar{\Delta}}, \qquad \sigma(U|H_\Delta^\perp) \subset e^{i\bar{\Delta}_1}, \qquad \Delta_1 = [0,2\pi)\setminus\Delta\,,$$

$$-[x,x] \geqq \alpha_\Delta\|x\|^2 \quad (\text{bzw. } [x,x] \geqq \alpha_\Delta\|x\|^2)$$

für alle $x \in H_\Delta$, $\alpha_\Delta > 0$. Hier bezeichnet $\sigma(U|H_\Delta)$ das Spektrum der Einschränkung von U auf H_Δ, und es ist $H_\Delta^\perp = \{x\colon [x,H_\Delta] = \{0\}\}$. Versehen mit dem Skalarprodukt $-[x,y]$ (bzw. $+[x,y]$) ist H_Δ ein Hilbertraum und die Einschränkung von U auf H_Δ ist in diesem Hilbertraum ein unitärer Operator. Insbesondere sind alle Eigenelemente x von U, die zu Eigenwerten in der oberen (bzw. unteren) Halbebene gehören, D-negativ: $[x,x] < 0$ (bzw. D-positiv: $[x,x] > 0$). Ist Δ ein Intervall mit den genannten Eigenschaften (oder, allgemeiner, ein Intervall, dessen Abschliessung keinen singulären kritischen Punkt [3] der Eigenspektralfunktion E von U enthält; dabei identifiziere man 0 und 2π), so gilt für alle $x_0 \in H_\Delta$:

$$\|U^m x_0\| \leqq M_\Delta\|x_0\|, \qquad m = 0, \pm 1, \ldots\,,$$

mit einer von x_0 unabhängigen Konstanten M_Δ, d. h., die Lösungen der Differentialgleichung (5) mit Anfangswerten aus H_Δ sind beschränkt. Unter jeder der folgenden zusätzlichen Voraussetzungen ist (5) sogar stark stabil (das folgt z. B. auch aus [1, § 5.4.]):

(a) $\pm 1 \in \varrho(U)$;

(b) 0 und π sind keine singulären kritischen Punkte der Eigenspektralfunktion von U.

Bedingung (b) ist z. B. erfüllt, falls D nur endlich viele positive oder nur endlich viele negative Eigenwerte hat und $\pm 1 \notin \sigma_p(U)$ gilt.

ZITIERTE LITERATUR

1. M. G. Krein, *Einführung in die Geometrie der indefiniten J-Räume und die Theorie der Operatoren in solchen Räumen*, 2. Mathematische Sommerschule der Akademie der Wissenschaften der USSR, Bd. 1, 15–92, Kiew, 1965. (Russisch.)
2. M. G. Krein und Ju. L. Šmul'jan, *J-Polardarstellung von Plus-Operatoren*, Mat. Issled. I,2 (1966), 172–210. (Russisch.)
3. H. Langer, *Spektraltheorie linearer Operatoren in J-Räumen und einige Anwendungen auf die Schar $\lambda^2 I + \lambda B + C$*, Habilitationsschrift, Technische Universität Dresden, 1965.
4. B. Marksjö and B. Textorius, *On the stability of linear differential equations in spaces with an indefinite metrik*, Math. Scand. 20 (1967), 177–192.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN, DEUTSCHLAND