MATH. SCAND. 23 (1968), 169–170

ZUR BOHR-KONVERGENZ VON FOLGEN

PETER FLOR

G. A. Reid bewies [1]

SATZ 1. *Sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe; G' sei dieselbe Gruppe, mit der Bohr-Topologie versehen (d.h. der von allen fastperiodischen Funktionen oder auch von allen stetigen Charakteren induzierten Topologie). Sei irgendeine Folge $\{x_n\}$ in G' konvergent. Dann konvergiert sie auch in G.*

Mit der Methode Reids, die auf der Diskussion einiger spezieller Gruppen und der Strukturtheorie für lokalkompakte abelsche Gruppen beruht, läßt sich ohne Schwierigkeit auch der unerheblich stärkere Satz beweisen:

SATZ 2. *Ist $\{x_n\}$ in G' Cauchy-Folge, so konvergiert sie bereits in G.*

Insbesondere ist also jede lokalkompakte abelsche Gruppe in ihrer Bohr-Kompaktifizierung folgenabgeschlossen.

Hier wird ein wesentlich kürzerer Beweis von Satz 2 gegeben, bei dem man ohne die Diskussion spezieller Gruppen auskommt.

LEMMA. *Jede Cauchy-Folge in G' ist in G totalbeschränkt.*

Sei die G'-Cauchy-Folge $\{x_n\}$ in G nicht totalbeschränkt. Das bedeutet, daß es eine Teilfolge $\{y_n\}$ von $\{x_n\}$ und eine Nullumgebung U in G mit $y_p - y_q \notin U$ für $p \neq q$ gibt. (Wir schreiben die Gruppenoperationen additiv.) Sei $\hat{G}$ die Dualgruppe von G. Nach dem Dualitätssatz enthält U eine Nullumgebung der Gestalt

$$\{g \mid |(g,\gamma)-1| \leqq 2\varepsilon \text{ für alle } \gamma \in K\},$$

wobei $K \subset \hat{G}$ kompakt und ε positiv ist. Es gibt also zu jedem Paar verschiedener Indizes p und q ein $\gamma \in K$ mit

$$|(y_p,\gamma)-(y_q,\gamma)| > 2\varepsilon . \tag{1}$$

Mit $\{x_n\}$ ist auch die Teilfolge $\{y_n\}$ Cauchy-Folge in G'. Für jedes $\gamma \in \hat{G}$ gibt es also ein kleinstes $n = n(\gamma)$ mit

Eingegangen am 19. April 1968.

$$|(y_p,\gamma)-(y_q,\gamma)| \leqq \varepsilon \quad \text{für alle } p\geqq n,\ q\geqq n\ .$$

Für jedes $t=1,2,\ldots$ definieren wir

$$M_t := \{\gamma\in\hat{G} \mid n(\gamma)\leqq t\}\ .$$

M_t ist also die Menge aller γ, für welche gilt: für alle $p\geqq t$, $q\geqq t$ ist $|(y_p,\gamma)-(y_q,\gamma)|\leqq\varepsilon$. Daher ist M_t abgeschlossen ($\gamma\to(x,\gamma)$ ist für jedes $x\in G$ auf $\hat{G}$ stetig). Ferner ist $\bigcup M_t=\hat{G}$. Im lokalkompakten Raum $\hat{G}$ gilt der Baire'sche Kategoriesatz; daher enthält mindestens ein M_k eine nichtleere offene Menge D.

Die Menge K ist kompakt; also gibt es endlich viele γ_i, $1\leqq i\leqq t$, mit $K\subset\bigcup_{i=1}^t(\gamma_i+D)$. Es läßt sich daher jedes $\gamma\in K$ in der Form $\gamma_i+\delta$ mit einem $i\in[1,t]$ und einem $\delta\in D$ darstellen. Sei nun $\gamma\in K$ beliebig. Es ergibt sich:

$$(2)\qquad \begin{aligned}|(y_p,\gamma)-(y_q,\gamma)| &= |(y_p,\gamma_i)(y_p,\delta)-(y_q,\gamma_i)(y_q,\delta)|\\ &\leqq |(y_p,\gamma_i)-(y_q,\gamma_i)| + |(y_p,\delta)-(y_q,\delta)|\ .\end{aligned}$$

Ist $\min(p,q)\geqq\max_{1\leqq i\leqq t}n(\gamma_i)$, so ist

$$|(y_p,\gamma_i)-(y_q,\gamma_i)| \leqq \varepsilon;$$

ist ferner $p\geqq k$, $q\geqq k$, so ist

$$|(y_p,\delta)-(y_q,\delta)| \leqq \varepsilon$$

wegen $\delta\in D\subset M_k$; insgesamt ist also für hinreichend großes p,q und für jedes $\gamma\in K$

$$|(y_p,\gamma)-(y_q,\gamma)| \leqq 2\varepsilon$$

im Widerspruch zu (1). Damit ist das Lemma bewiesen.

Beweis von Satz 2. Die Gruppe G ist lokalkompakt und daher vollständig. Da $\{x_n\}$ totalbeschränkt ist, liegt die Folge ganz in einer kompakten Menge; sie hat daher mindestens einen Häufungswert x. Konvergiert $\{x_n\}$ nicht gegen x, so gibt es eine Umgebung U von x und eine Teilfolge $\{y_n\}$ von $\{x_n\}$, die ganz außerhalb von U liegt. Die Folge $\{y_n\}$ hat mindestens einen Häufungswert y; dieser ist auch Häufungswert von $\{x_n\}$. Es gibt mindestens ein $\gamma\in\hat{G}$ mit $(x,\gamma)\neq(y,\gamma)$. Für ein solches γ ist $\{(x_n,\gamma)\}$ keine Cauchy-Folge, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also konvergiert $\{x_n\}$.

LITERATUR

1. G. A. Reid, *On sequential convergence in groups*, Math. Z. 102 (1967), 227–235.

UNIVERSITÄT WIEN, ÖSTERREICH