MATH. SCAND. 25 (1969), 190–194

LES FONCTIONS QUI OPÈRENT DANS CERTAINES ALGÈBRES À POIDS

NOËL LEBLANC

Nous notons A_0, l'algèbre des fonctions qui s'écrivent comme somme d'une série de Fourier absolument convergente, et nous définissons une classe d'algèbres de Banach plus générales par

$$A_\alpha = \{f\,;\ f(x)=\textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{nix},\ \|f\|_\alpha=\sum_{-\infty}^{\infty}(1+|n|)^\alpha |a_n|\}\ .$$

Nous définissons aussi l'espace des pseudomesures, espace des distributions

$$T \sim \textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{nix}$$

telles que

$$\|T\|_{PM} = \sup |c_n|$$

est fini. C'est l'espace de Banach dual de A_0, la dualité étant définie par

$$\langle T,f\rangle = \textstyle\sum a_n c_n\ .$$

Y. Katznelson [3] a montré que les seules fonctions qui opèrent dans A_0, c'est à dire les fonctions F telles que $f \in A_0$ implique $F\circ f \in A_0$, sont les fonctions analytiques. Il a également montré que si $f \in A_\alpha$ et $F \in A_\beta$ implique $F\circ f \in A_\alpha$ (on dit alors que A_β opère dans A_α), on a nécessairement $\beta \geqq \alpha+\frac{1}{2}$. On peut alors chercher si cette condition est suffisante pour certaines valeurs de α. Cela sera réalisé si, pour tout $f \in A_\alpha$, il existe une constante C_f telle que

$$\|e^{nif}\|_\alpha \leqq C_f |n|^{\alpha+\frac{1}{2}}\ .$$

Cette inégalité est facile à obtenir pour α entier positif en remarquant que A_α est alors formé des fonctions dont la dérivée d'ordre α est dans A_0 et en utilisant l'inégalité de Carlson [1]. L'inégalité de Hölder permet alors, par interpolation, d'obtenir le même résultat pour tout $\alpha \geqq 1$.

Nous allons démontrer ici un résultat de ce type pour $\alpha < 1$. J.-P. Kahane [2] a obtenu par un procédé probabilistique un théorème dont il est facile de déduire une nouvelle condition nécessaire pour que A_β opère

Reçu le 9 janvier 1969.

dans A_α. En raffinant la méthode de [4], nous montrerons que cette condition est en outre suffisante.

THÉORÈME 1. *Si A_β opère dans A_α, $\beta \geqq 1 + \frac{1}{2}\alpha^{-1}$.*

DÉMONSTRATION. Si A_β opère dans A_α, le théorème du graphe fermé impose l'existence d'une constante C_f dépendant de $f \in A_\alpha$, telle que

$$\|F \circ f\|_\alpha \leqq C_f \|F\|_\beta .$$

Prenons en particulier $F(x) = e^{nix}$,

$$\|e^{nif}\|_\alpha \leqq C_f \|e^{nix}\|_\beta = C_f(1+|n|)^\beta .$$

Le théorème se déduira alors de l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, d'une fonction $f \in A_\alpha$ et d'une constante C_f' telles que, pour une suite infinie d'entiers positifs $\{n_k\}$,

$$\|e^{-n_k if}\|_\alpha \geqq C_f' (1+n_k)^{(1+\frac{1}{2}\alpha^{-1})(1-2\alpha\varepsilon)} .$$

Posons alors

$$e^{uif} = \textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} b_p(u) e^{pix} .$$

Comme

$$\textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} |b_p(u)|^2 = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{uif}|^2 \, dx = 1 ,$$

l'inégalité de Schwarz implique

$$\|e^{uif}\|_0 \leqq (2N)^{\frac{1}{2}} + \textstyle\sum_{|p| \geqq N} |b_p(u)| .$$

Supposons alors que $\|e^{uif}\|_0 \geqq (1+|u|)^{(\frac{1}{2}\alpha^{-1}-\varepsilon)}$, et posons

$$N = \tfrac{1}{8}((1+|u|)^{(\alpha^{-1}-2\varepsilon)}) .$$

$$\|e^{uif}\|_\alpha \geqq (1+N)^\alpha \textstyle\sum_{|p| \geqq N} |b_p(u)| \geqq C_f' (1+|u|)^{(1+\frac{1}{2}\alpha^{-1})(1-2\alpha\varepsilon)} .$$

Le théorème cherché se déduira donc de l'existence, pour $\varepsilon > 0$ fixé, d'une fonction $f \in A_\alpha$, et d'une suite d'entiers positifs $\{n_k\}$ telles que

$$\|e^{-n_k if}\|_0 \geqq (1+n_k)^{(\frac{1}{2}\alpha^{-1}-\varepsilon)} .$$

Le problème revient alors à chercher une fonction $f \in A_\alpha$ telle que

$$\|e^{n_k if}\|_{PM} \leqq (1+n_k)^{(-\frac{1}{2}\alpha^{-1}+\varepsilon)} .$$

J.-P. Kahane [2] a montré que, si p est un réel quelconque tel que $2\alpha(p+1) < 1$, il existe $\varphi \in A_\alpha$ telle que

$$\int_0^\infty u^p \|e^{iu\varphi}\|_{PM} \, du < \infty .$$

Notons

$$E = \{u > 0; \|e^{iu\varphi}\|_{PM} < (2u)^{-p-1}\},$$

le théorème de Kahane entraine

$$\lim_{N\to\infty} |E\cap[0,N]|/N = 1$$

et il existe N_0 tel que $N \geqq N_0$ entraine $|E\cap[0,N]| \geqq \frac{1}{2}N$.

Soit

$$\mathsf{N}(t) = \{qt\}_{q\in\mathsf{N}}, \quad \tfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1 .$$

Pour $N \geqq N_0$, il existe t_N tel que $\mathsf{N}(t_N)\cap E\cap[0,N]$ contient au moins $N/3$ points. On ne peut donc borner le cardinal de $\mathsf{N}(t)\cap E$ indépendamment de t, et il existe t_0 tel que $\mathsf{N}(t_0)$ contient une suite infinie $\{n_k t_0\}$ de points de E. Alors $f = t_0\varphi$ est la fonction cherchée puisque

$$\|e^{n_k i f}\|_{PM} < n_k^{-p-1} = n_k^{-\frac{1}{2}\alpha^{-1}+\varepsilon} < (1+n_k)^{-\frac{1}{2}\alpha^{-1}+\varepsilon} .$$

Pour démontrer que la condition obtenue est suffisante, nous établirons tout d'abord le résultat suivant:

Lemme. *Si* $\alpha < 1$, *si*

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{nix}, \quad g(x) = \sum_{-\|f\|_\alpha^{\alpha-1}}^{\|f\|_\alpha^{\alpha-1}} a_n e^{nix}, \quad e^{ig} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{nix} ,$$

si k est un entier positif, il existe une constante C_k telle que

$$\sum_{|n|>(3k+3)\|f\|_\alpha^{\alpha^{-1}+\alpha^k}} |b_n|(1+|n|)^\alpha < C_k(\tfrac{1}{3}e)^{\|f\|_\alpha^{\alpha^k}} .$$

Démonstration. Nous posons $r(j) = \|f\|_\alpha^{\alpha^{-1}-\alpha^j}$, puis

$$g(x) = g_0(x) + \ldots + g_j(x) + \ldots + g_k(x) ,$$

avec

$$g_0(x) = \sum_{-r(0)}^{r(0)} a_n e^{nix}, \quad g_k(x) = \sum_{|n|>r(k-1)} a_n e^{nix} ,$$

et, si $0 < j < k$,

$$g_j(x) = \sum_{r(j-1)}^{r(j)} a_n e^{nix} + \sum_{-r(j)}^{-r(j-1)} a_n e^{nix} .$$

Nous remarquons alors que, si $0 \leqq j \leqq k$,

$$r(j-1)^\alpha \|g_j\|_0 \leqq \|g_j\|_\alpha \leqq \|f\|_\alpha, \quad \text{d'où} \quad \|g_j\|_0 \leqq \|f\|_\alpha^{\alpha^j} .$$

La formule de Stirling $n! > n^n e^{-n}$ permet donc d'écrire, si $0 \leqq j \leqq k$,

$$\left\| e^{ig_j} - \sum_{n=0}^{3\|f\|_\alpha^{\alpha^j}} \frac{(ig_j)^n}{n!} \right\|_\alpha < c_j(\tfrac{1}{3}e)^{2\|f\|_\alpha^{\alpha^j}} ;$$

les termes omis sont en effet majorés par

$$(\tfrac{1}{3}e)^{3\|f\|_\alpha^{\alpha^j}}[(3\|f\|_\alpha^{\alpha^{-1}+\alpha^k}+1)^\alpha+\ldots+(3\|f\|_\alpha^{1+\alpha^{-1}+\alpha^k}+1)^\alpha] + (\tfrac{1}{3}e)^{3\|f\|_\alpha},$$

et, comme le crochet contient moins de $3\|f\|_\alpha$ termes, on obtient bien la majoration annoncée.

Si

$$e^{ig_j} = \sum_{-\infty}^{\infty} b_{j,n} e^{nix},$$

cette majoration entraine celle du lemme, en remarquant que, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\sum_{|n|<3\|f\|_\alpha^{\alpha^{-1}+\alpha^k}} |b_{j,n}|(1+|n|)^\alpha \leqq (6\|f\|_\alpha^{\alpha^{-1}+\alpha^k})^{\frac{1}{2}}(1+3\|f\|_\alpha^{\alpha^{-1}+\alpha^k}).$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer:

Théorème 2. *Si* $\alpha<1$, *si* $\beta>1+\frac{1}{2}\alpha^{-1}$, A_β *opère dans* A_α.

Démonstration. Nous conservons les notations du lemme et nous définissons en outre

$$f_1(x) = \sum_{\|f\|_\alpha^{\alpha^{-1}}}^{\infty} a_n e^{nix}, \quad f_2(x) = \sum_{-\infty}^{-\|f\|_\alpha^{\alpha^{-1}}} a_n e^{nix}.$$

$$\|f_1^2\|_\alpha \leqq \|f_1\|_\alpha^2 \sup_{n,p>\|f\|_\alpha^{\alpha^{-1}}} \left[\frac{(1+n+p)}{(1+n)(1+p)}\right]^\alpha \leqq 2^\alpha \|f_1\|_\alpha, \ldots,$$

$$\|f_1^n\|_\alpha \leqq 2^{(n-1)\alpha}\|f_1\|_\alpha, \quad \text{d'où} \quad \|e^{if_1}-1\|_\alpha \leqq C'\|f_1\|_\alpha.$$

De la même façon, $\|e^{if_2}-1\|_\alpha \leqq C'\|f_2\|_\alpha$.

Nous posons alors

$$e^{ig} = \sum_{p=1}^{q-1}(h_p+h_p') + h_q + h_q',$$

$$h_p(x) = \sum_{s(p-1)}^{s(p)} b_n e^{nix}, \quad h_p'(x) = \sum_{-s(p)}^{-s(p-1)} b_n e^{nix},$$

où

$$s(p) = \|f\|_\alpha^{\gamma_p}, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_p(\alpha+\tfrac{1}{2}) = \alpha\gamma_{p-1}+\tfrac{1}{2}\alpha^{-1};$$

$\{\gamma_p\}$ est alors une suite croissante tendant vers $1/\alpha$, et nous posons enfin

$$h_q(x) = \sum_{s(q-1)}^{\infty} b_n e^{nix}, \quad h_q'(x) = \sum_{-\infty}^{-s(q-1)} b_n e^{nix},$$

où q est un entier que nous déterminerons par la suite.

L'inégalité de Schwarz entraine, si $p \neq q$,

$$\|h_p\|_\alpha \leqq (1+s(p))^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

Alors, si $j=1$ ou si $j=2$,

$$\begin{aligned}\|h_p(e^{if_j}-1)\|_\alpha &\leqq C'\|f_j\|_\alpha(1+s(p))^{\alpha+\frac{1}{2}}\sup_{m,n\geqq s(p-1)}\left[\frac{(1+m+n)}{(1+m)(1+n)}\right]^\alpha\\ &\leqq C''\|f_j\|_\alpha\,\|f\|^{\frac{1}{2}\alpha^{-1}},\end{aligned}$$

$$\|h_p(e^{if_1}-1)(e^{if_2}-1)\|_\alpha \leqq C'C''\|f_1\|_\alpha\,\|f_2\|_\alpha\,\|f\|_\alpha^{\frac{1}{2}\alpha^{-1}-1},$$

et

$$\begin{aligned}\|h_p e^{if_1}e^{if_2}\|_\alpha &\leqq \|h_p(e^{if_1}-1)(e^{if_2}-1)\|_\alpha+\|h_p(e^{if_1}-1)\|_\alpha+\|h_p(e^{if_2}-1)\|_\alpha+\|h_p\|_\alpha\\ &\leqq K(1+\|f\|_\alpha^{\frac{1}{2}\alpha^{-1}+1}).\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\|h_p' e^{if_1}e^{if_2}\|_\alpha \leqq K(1+\|f\|_\alpha^{\frac{1}{2}\alpha^{-1}+1}).$$

Pour $p=q$, le lemme et l'inégalité de Schwarz entrainent

$$\|h_q\|_\alpha \leqq C_k(\tfrac{1}{3}e)^{\|f\|_\alpha{}^{\alpha^k}}+(1+(3k+3)\|f\|_\alpha{}^{\alpha^{-1}+\alpha^k})^{\alpha+\frac{1}{2}}$$

et le calcul analogue à celui fait pour $p \neq q$ aboutit à

$$\|h_q e^{if_1}e^{if_2}\|_\alpha \leqq K_k'(1+\|f\|_\alpha^{\frac{1}{2}\alpha^{-1}+1+\varepsilon}), \qquad \varepsilon = \tfrac{3}{2}\alpha^k+1-\alpha\gamma_{q-1},$$

et on obtient la même inégalité pour h_q'.

Alors

$$\|e^{if}\|_\alpha \leqq (2qK+2K_k')(1+\|f\|_\alpha^{\frac{1}{2}\alpha^{-1}+1+\varepsilon}),$$

et on obtient le théorème en choisissant k et q assez grands pour que $\beta>1+\frac{1}{2}\alpha^{-1}+\varepsilon$, ce qui est possible puisque $\alpha<1$, et que $\{\gamma_p\}$ a pour limite α^{-1}.

BIBLIOGRAPHIE

1. F. Carlson, *Une inégalité*, Arkiv för Mat. Astr. Fys. 25 B, no. 1 (1935), 1–5.
2. J.-P. Kahane, *Sur le théorème de Beurling-Pollard*, Math. Scand. 21 (1967), 71–79.
3. Y. Katznelson, *Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 76 (1959), 83–123.
4. N. Leblanc, *Calcul symbolique dans certaines algèbres de séries de Fourier à poids*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B 266 (1968), A 339–A 341.

FALCUTÉ DES SCIENCES, ORSAY, FRANCE