MATH. SCAND. 25 (1969), 218–226

DIE ANZAHL DER LOKALEN MAXIMALSTELLEN EINES STATIONÄREN GAUSZSCHEN PROZESSES

WERNER FIEGER

In mehreren Veröffentlichungen ist die Anzahl der Schnittpunkte eines stationären Gaußschen Prozesses $x(t)$ mit einer Niveaulinie untersucht worden. Ito [5] und Ylvisaker [6] haben gezeigt, daß der Erwartungswert der Anzahl der Kreuzungspunkte eines stationären Gaußschen Prozesses $x(t)$ mit stetigen Pfaden mit dem Niveau Null genau dann (mit endlichem Wert) existiert, wenn das zu $x(t)$ gehörige Spektralmaß dF die Beziehung $\int \lambda^2 dF < \infty$ erfüllt. Die gleiche Aussage gilt auch für die Kreuzungspunkte mit einem beliebigen Niveau γ. Für nicht-stationäre Gaußsche Prozesse sind entsprechende Aussagen in [1] und [3] angegeben.

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß der Erwartungswert der Anzahl der in einem endlichen Intervall liegenden lokalen Maximalstellen eines stationären Gaußschen Prozesses $x(t)$ genau dann existiert, wenn für das zugehörige Spektralmaß $\int \lambda^4 dF < \infty$ gilt (Satz 1). Ferner wird der Erwartungswert der Anzahl der lokalen Maximalstellen von $x(t)$ mit Maximalwert $> \gamma$ berechnet (Satz 2).

Die Aussage, daß die Bedingung $\int \lambda^4 dF < \infty$ hinreichend für die Existenz des Erwartungswerts der Anzahl der in einem endlichen Intervall liegenden lokalen Maximalstellen eines stationären Gaußschen Prozesses ist, ist schon in [1] enthalten[1].

Einige Hinweise, die eine elegantere Beweisführung ermöglichen und die in Lemma 1 und Beweisteil a) zu Satz 1 verwendet sind, verdanke ich Herrn K. Itô.

1.

Mit $x(t)$ bezeichnen wir einen für $t \in [0,a]$ erklärten reellen stationären Gaußschen Prozeß mit stetigen Pfaden und mit $Ex(t) \equiv 0$, $\operatorname{var} x(t) \equiv 1$; $r(t)$ sei die Kovarianzfunktion von $x(t)$:

Eingegangen am 29. März 1968.

[1] Die in [1] Seite 67 dazu angegebene Gleichung ist wie folgt zu verbessern:

$$E[M(\omega)+m(\omega)] = \pi^{-1}\left(-r''''(0)/r''(0)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$r(t) = \operatorname{cov}(x(s), x(s+t)) = Ex(s)x(s+t),$$

dF das zu $x(t)$ gehörende Spektralmaß. Soweit es angebracht ist, den Gaußschen Prozeß $x(t)$ als Familie von über einem Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Omega, \mathfrak{K}, p)$ meßbaren Funktionen zu betrachten, schreiben wir für den Prozeß $x(t)$ auch $x(t,\omega)$. Wir nennen τ_0 eine lokale Maximalstelle des Pfades $x(t,\omega_0)$, wenn $x(\tau,\omega_0) \leqq x(\tau_0,\omega_0)$ für jeden Wert τ einer hinreichend kleinen Umgebung von τ_0; entsprechend erklären wir den Begriff »lokale Extremalstelle«. Wir setzen für $\tau \in (0,a)$

$$\begin{aligned} k(\tau,\omega) :=& \ 1, \text{ falls } \tau \text{ eine lokale Maximalstelle} \\ & \quad \text{von } x(t,\omega) \text{ ist,} \\ :=& \ 0 \text{ sonst} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} k(\tau,\gamma,\omega) :=& \ 1, \text{ falls } \tau \text{ eine lokale Maximalstelle} \\ & \quad \text{von } x(t,\omega) \text{ mit } x(\tau,\omega) > \gamma \text{ ist,} \\ :=& \ 0 \text{ sonst,} \end{aligned}$$

ferner für $0 \leqq t_1 < t_2 < a$

$$\begin{aligned} m(t_1,t_2;\,\omega) &:= \textstyle\sum_{\tau\in(t_1,t_2]} k(\tau,\omega)\,, \\ m(t_1,a;\,\omega) &:= m(t_1,a-0;\,\omega) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} m(t_1,t_2;\,\gamma,\omega) &:= \textstyle\sum_{\tau\in(t_1,t_2]} k(\tau,\gamma,\omega)\,, \\ m(t_1,a;\,\gamma,\omega) &:= m(t_1,a-0;\,\gamma,\omega)\,. \end{aligned}$$

Es ist $m(\omega) := m(0,a;\,\omega)$ die Anzahl der in $(0,a)$ liegenden lokalen Maximalstellen, $m(\gamma,\omega) := m(0,a;\gamma,\omega)$ die Anzahl der in $(0,a)$ liegenden Maximalstellen mit einem Maximalwert $>\gamma$; für diese beiden Zufallsgrößen schreiben wir auch kurz $m, m(\gamma)$. Wegen

$$\{\omega : m(t_1,t_2-0;\omega) \geqq 1\} = {}^{\cdot}\textstyle\sum_{t_1\leqq\tau_1<\tau_2<\tau_3\leqq t_2} \{\omega : \max(x(\tau_1,\omega), x(\tau_3,\omega)) \leqq x(\tau_2,\omega)\}$$
$$(\tau_1, \tau_2, \tau_3 \text{ rational})$$

und der $\mathfrak{K}$-Meßbarkeit von $k(t_2,\omega)$ gilt

$$\{\omega : m(t_1,t_2;\,\omega) \geqq 1\} \in \mathfrak{K},$$

und folglich ist

$$\begin{aligned} &\{\omega : m(t_1,t_2;\,\omega) \geqq n\} \\ &\quad = {}^{\cdot}\textstyle\sum_{t_1=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=t_2} \{\omega : m(\tau_{\nu-1},\tau_\nu;\,\omega) \geqq 1 \text{ für } \nu=1,\ldots,n\} \in \mathfrak{K} \end{aligned}$$

($\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}$ rational) für $n=2,3,\ldots$ (vgl. hierzu [3, Lemma 4.1]); also ist $m(t_1,t_2;\,\omega)$ $\mathfrak{K}$-meßbar für $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq a$ und damit $m(t_1,t_2;\,\omega)$ ein über $[0,a]$ definierter Zählprozeß im Sinne von [3]. Ähnlich zeigt man, daß $m(t_1,t_2;\gamma,\omega)$ ein Zählprozeß ist. Diese beiden Zählprozesse können möglicherweise für gewisse t_1,t_2 den Wert $+\infty$ mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen.

Für die Zufallsgrößen $m, m(\gamma)$ gilt

SATZ 1. *Der Erwartungswert von m existiert genau dann, wenn $\int \lambda^4 dF < \infty$ ist. Ist $\int \lambda^4 dF < \infty$, so gilt:*

(1) $Em = (\frac{1}{2}a/\pi)(-r''''(0)/r''(0))^{\frac{1}{2}}$,

(2) *als Funktion von t ist $x(t,\omega)$ fast sicher in keinem Teilintervall von $[0,a]$ konstant.*

SATZ 2. *Unter der Voraussetzung $\int \lambda^4 dF < \infty$ ist*

$$Em(\gamma) = a \int_{\gamma}^{+\infty} b(z)\,dz$$

mit

$$b(z) := \frac{(-r''(0))^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp(-\tfrac{1}{2}z^2)\left\{(r_1-1)^{\frac{1}{2}} \exp(-\tfrac{1}{2}z^2(r_1-1)^{-1}) + {} + z\cdot \int_{-\infty}^{z(r_1-1)^{-1/2}} \exp(-\tfrac{1}{2}y^2)\,dy\right\},$$

$$r_1 := \frac{r''''(0)}{(r''(0))^2}.$$

2.

Beim Beweis von Satz 1 benutzen wir zwei Lemmata.

LEMMA 1. *Ist $\int \lambda^2 dF < \infty$, so gibt es einen stationären separablen Gaußschen Prozeß $y(t)$ mit Spektralmaß $\lambda^2 dF$, derart daß zu jedem $\tau \in (0,a)$ zwei Folgen $\tau_1, \tau_2, \ldots$ und $\tau_1', \tau_2', \ldots$ mit $\tau_n \nearrow \tau$, $\tau_n' \searrow \tau$ und*

$$p\left(\frac{x(\tau)-x(\tau_n)}{\tau-\tau_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} y(\tau)\right) = 1,$$

$$p\left(\frac{x(\tau)-x(\tau_n')}{\tau-\tau_n'} \xrightarrow[n\to\infty]{} y(\tau)\right) = 1$$

existieren, und es ebenso je eine Folge gegen 0 bzw. a konvergierender Werte mit der entsprechenden Eigenschaft gibt.

BEWEIS. Aus [5, Proposition 1 und Proposition 2] folgt, daß es einen stationären Gaußschen Prozeß $y(t)$ mit Spektralmaß $\lambda^2 dF$ gibt, gegen den $(x(t+h)-x(t))/h$ für $h \to 0$ im Quadratmittel und damit auch nach Wahrscheinlichkeit für jedes $t \in [0,a]$ konvergiert; folglich gibt es zu jedem $\tau \in (0,a)$ zwei Folgen $\tau_1, \tau_2, \ldots$ und $\tau_1', \tau_2', \ldots$ mit $\tau_n \nearrow \tau$, $\tau_n' \searrow \tau$ und der Eigenschaft, daß

$$\frac{x(\tau)-x(\tau_n)}{\tau-\tau_n} \quad \text{und} \quad \frac{x(\tau)-x(\tau_n')}{\tau-\tau_n'}$$

für $n \to \infty$ stark gegen $y(\tau)$ konvergiert. Das gleiche gilt natürlich für jeden stochastischen Prozeß, der sich für jedes τ von $y(\tau)$ nur um eine p-Nullmenge N_τ unterscheidet; wir können daher $y(t)$ als separabel voraussetzen. Für diesen Prozeß $y(t)$ gilt:

$$\begin{aligned} E\,y(t) &= 0\,, \\ \operatorname{cov}(y(s), y(s+t)) &= -r''(t)\,, \\ \operatorname{var} y(t) &= -r''(0)\,, \\ \operatorname{cov}(x(s), y(s+t)) &= r'(t)\,. \end{aligned}$$

Unmittelbar einzusehen ist

LEMMA 2. *Ist $f(t)$ eine in $[\tau', \tau'']$ stetige Funktion, und gibt es zwei Folgen τ_n', τ_n'' mit $\tau_n' \searrow \tau'$, $\tau_n'' \nearrow \tau''$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\tau')-f(\tau_n')}{\tau'-\tau_n'} > 0 > \lim_{n\to\infty} \frac{f(\tau'')-f(\tau_n'')}{\tau''-\tau_n''}\,,$$

so hat $f(t)$ in (τ', τ'') mindestens eine lokale Maximalstelle.

BEWEIS VON SATZ 1.

(a) Wir gehen zunächst von der Voraussetzung $\int \lambda^4 dF < \infty$ aus. Dann hat der in Lemma 1 eingeführte Gaußsche Prozeß $y(t)$ in $[0,a]$ mit Wahrscheinlichkeit Eins stetige Pfade [4]; wir können, da bei einer Abänderung von $y(t)$ auf einer p-Nullmenge $N \subset \Omega$ die in Lemma 1 angegebenen Eigenschaften erhalten bleiben, annehmen, daß $y(t,\omega)$ für jedes $\omega \in \Omega$ stetig ist. Einfache Berechnungen zeigen

$$E[x(\tau_2)-x(\tau_1)-\textstyle\int_{\tau_1}^{\tau_2} y(u)\,du]^2 = 0$$

für $0 \leqq \tau_1 < \tau_2 \leqq a$; es gilt daher

$$p\big(x(\tau_2)-x(\tau_1) = \textstyle\int_{\tau_1}^{\tau_2} y(u)\,du\big) = 1$$

für $0 \leqq \tau_1 < \tau_2 \leqq a$ und somit

$$p\left(x(\tau_2)-x(\tau_1)=\int_{\tau_1}^{\tau_2} y(u)du \text{ für rationale } \tau_1,\tau_2 \text{ mit } 0\leqq\tau_1<\tau_2\leqq a\right) = 1 ,$$

also wegen der Stetigkeit der Pfade $x(t,\omega)$, $\int_0^t y(u,\omega)du$

$$p\left(x(\tau_2)-x(\tau_1)=\int_{\tau_1}^{\tau_2} y(u)du \text{ für } 0\leqq\tau_1<\tau_2\leqq a\right) = 1$$

und

$$p\left(dx(\tau,\omega)/d\tau=y(\tau,\omega) \text{ für } \tau\in[0,a]\right) = 1 .$$

Wegen

$$p\left(y(t,\omega)=0 \text{ für irgendein nicht ausgeartetes Teilintervall von } [0,a]\right) = 0$$

(vergl. [5]) gilt daher

$$p\left(x(t,\omega) \text{ ist in irgendeinem nicht ausgearteten Teilintervall von } [0,a] \text{ konstant}\right) = 0 .$$

Sehen wir von den Elementen ω einer p-Nullmenge $N\subset\Omega$ ab, so ist weiter, da wegen $\int\lambda^2(\lambda^2 dF)<\infty$ mit Wahrscheinlichkeit Eins die Anzahl der Nullstellen von $y(t)$ endlich ist und $y(t)$ keine tangentiale Nullstelle (d. h. keine Nullstelle τ' mit $y(\tau,\omega)\leqq 0$ für eine ganze Umgebung von τ' oder $y(\tau,\omega)\geqq 0$ für eine ganze Umgebung von τ') hat, τ_0 genau dann eine lokale Maximalstelle von $x(t,\omega)$, wenn für jede hinreichend kleine Umgebung $U(\tau_0)$ von τ_0

$$\begin{aligned} y(\tau,\omega) &> 0 \quad \text{für} \quad \tau\in U(\tau_0)\cap[0,\tau_0) ,\\ y(\tau,\omega) &< 0 \quad \text{für} \quad \tau\in U(\tau_0)\cap(\tau_0,a] \end{aligned}$$

gilt. Da somit mit Wahrscheinlichkeit Eins $m(\omega)$ gleich der Anzahl der in $(0,a)$ liegenden Kreuzungspunkte von $y(t,\omega)$ mit dem Niveau Null ist, existiert Em und ist gleich

$$(\tfrac{1}{2}a/\pi)\left(-r''''(0)/r''(0)\right)^{\frac{1}{2}} .$$

(b) Existiert Em, so existiert natürlich auch der Erwartungswert der Anzahl der lokalen Extremalstellen von $x(t)$. Da zwischen je zwei Kreuzungspunkten von $x(t,\omega)$ mit dem Niveau Null mindestens ein Extremalpunkt von $x(t,\omega)$ liegt, existiert folglich auch der Erwartungswert der Anzahl der Kreuzungspunkte von $x(t)$ mit dem Niveau Null, was wiederum $\int\lambda^2 dF<\infty$ zur Folge hat. Nach Lemma 1 existiert daher ein separabler stationärer Gaußscher Prozeß $y(t)$ derart, daß es zu beliebigen τ', τ'' mit $0\leqq\tau'<\tau''\leqq a$ stets zwei Folgen $\tau_1',\tau_2',\ldots$ und $\tau_1'',\tau_2'',\ldots$ gibt mit $\tau_n'\searrow\tau'$, $\tau_n''\nearrow\tau''$ und

$$p\left(\frac{x(\tau')-x(\tau_n')}{\tau'-\tau_n'} \xrightarrow[n\to\infty]{} y(\tau')\right) = 1 ,$$

$$p\left(\frac{x(\tau'')-x(\tau_n'')}{\tau''-\tau_n''} \xrightarrow[n\to\infty]{} y(\tau'')\right) = 1 .$$

Da $x(t)$ stetige Pfade hat, gilt nach Lemma 2

$$p(x(t,\omega) \text{ hat in } (\tau',\tau'') \text{ mindestens eine lokale Maximalstelle}) \geqq p(y(\tau')>0>y(\tau''))$$

und somit

$$Em(\tau',\tau'') \geqq p(y(\tau')>0>y(\tau''))$$

für $0 \leqq \tau' < \tau'' \leqq a$. Da für $0 \leqq \tau' < \tau'' < \tau''' \leqq a$ stets

$$m(\tau',\tau'';\omega)+m(\tau'',\tau''';\omega) = m(\tau',\tau''';\omega)$$

ist, gilt für jede Zerlegung $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=a$ von $[0,a]$

$$\sum_{\nu=1}^{n} p(y(\tau_{\nu-1})>0>y(\tau_\nu)) \leqq Em < \infty .$$

Folglich existiert der Erwartungswert der Anzahl der Kreuzungspunkte von $y(t)$ mit dem Niveau Null ([2], [5]) und somit gilt $\int \lambda^4 dF < \infty$.

3.

Beim Beweis von Satz 2 benutzen wir einige der in [3] über ausschöpfende Mengensysteme angegebenen Sätze und

Lemma 3. *Ist $g(\tau)$ eine reelle, für $\tau \in [0,a]$ definierte, beschränkte Funktion, so ist die für $0 \leqq \tau' < \tau'' \leqq a$ erklärte Intervallfunktion $h(\tau',\tau'') := g(\tau''-\tau')$ genau dann über $[0,a]$ Burkill-unterteilungsintegrabel, wenn $\lim_{\tau\searrow 0} g(\tau)/\tau$ existiert.*

Falls das Burkill-Unterteilungsintegral $\int_0^a h(.,.)$ existiert, gilt

$$\int_0^a h(.,.) = a \lim_{\tau\searrow 0} \frac{g(\tau)}{\tau}.$$

Beweis. Der in der Arbeit [2] angegebene Satz (2.1) und Beweisteil 3 zu Satz (2.5) zusammen mit dem Nachweis, daß aus der Existenz von $\int_0^a h(.,.)$ notwendigerweise $\lim_{\tau\searrow 0} g(\tau)=0$ folgt, liefern den Beweis für Lemma 3.

Wegen Lemma 3 kann man in den in [3] bewiesenen Sätzen über ausschöpfende Mengenfunktionen $S(\tau',\tau'')$, $0 \leqq \tau' < \tau'' \leqq a$, die Aussage »das Integral $\int_0^a p(S(.,.))$ existiert« durch die Aussage »$\lim_{\tau\searrow 0} p(S(0,\tau))/\tau$ existiert« ersetzen, sofern $p(S(\tau',\tau''))=p(S(0,\tau''-\tau'))$ für $0 \leqq \tau' < \tau'' \leqq a$ ist.

Beweis von Satz 2:

(a) Mit $y(t,\omega)$ bezeichnen wir wiederum einen (wegen $\int \lambda^4 dF < \infty$ nach Beweisteil (a) zu Satz 1 existierenden) separablen stationären Gaußschen Prozeß mit

$$p\big(dx(\tau,\omega)/d\tau = y(\tau,\omega) \text{ für } \tau \in [0,a]\big) = 1 .$$

Für die Mengenfunktion

$$S_1(\tau',\tau'';\gamma) := \{\,\omega\colon y(\tau',\omega) > 0 > y(\tau'',\omega),\, x(\tau',\omega) > \gamma,\, m(\tau',\tau'';\omega) = 1\}$$

gilt für $0 \leqq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \leqq a$ stets

$$p\big(S_1(\tau_1,\tau_3;\gamma) - (S_1(\tau_1,\tau_2;\gamma) + S_1(\tau_2,\tau_3;\gamma))\big) = 0 .$$

Da weiter $S_1(\tau',\tau'';\gamma)$ bezüglich des Zählprozesses $m(\tau',\tau'';\gamma,\omega)$ die Eigenschaft [3, (3.5), (2)] hat und

$$S_1(\tau',\tau'';\gamma) \subset \{\omega : m(\tau',\tau'';\gamma,\omega) \geqq 1\}$$

erfüllt, gilt nach [3, Satz (3.5)]

$$\lim_{\tau\searrow 0} p\big(m(0,\tau;\gamma,\omega) \geqq 1\big)/\tau = \lim_{\tau\searrow 0} p\big(S_1(0,\tau;\gamma)\big)/\tau$$

und, da $m(\tau',\tau'';\gamma,\omega)$ die Eigenschaft I aus [3] besitzt (das bedeutet hier, daß $m(\tau',\tau'';\gamma,\omega)$ ordinär ist), nach [3, Satz (2.9)]

$$Em(\gamma) = a \lim_{\tau\searrow 0} p\big(S_1(0,\tau;\gamma)\big)/\tau .$$

Da für

$$S(\tau',\tau'';\gamma) := \{\omega : y(\tau',\omega) > 0 > y(\tau'',\omega),\, x(\tau',\omega) > \gamma\}$$

für $0 \leqq \tau' < \tau'' \leqq a$ die Beziehungen

$$S_1(\tau',\tau'';\gamma) \subset S(\tau',\tau'';\gamma) ,$$
$$p\big(S(\tau',\tau'';\gamma) - \{\omega : m(\tau',\tau'';\gamma,\omega) \geqq 1\}\big) = 0$$

und somit

$$p\big(S_1(\tau',\tau'';\gamma)\big) \leqq p\big(S(\tau',\tau'';\gamma)\big) \leqq p\big(m(\tau',\tau'';\gamma,\omega) \geqq 1\big)$$

bestehen, erhalten wir

$$Em(\gamma) = a \lim_{\tau\searrow 0} p\big(y(0) > 0 > y(\tau),\, x(0) > \gamma\big)/\tau .$$

(b) Sind g_1, g_2, g_3 drei unabhängige Gaußsche Einheitsvariable, so ist die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung von $x(0)$, $y(0)$, $y(\tau)$ gleich der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung von g_1, $(-r''(0))^{\frac{1}{2}} g_2$ und

$$r'(\tau) g_1 - r''(\tau)(-r''(0))^{-\frac{1}{2}} g_2 + \big(-r''(0) - (r'(\tau))^2 + (r''(\tau))^2/r''(0)\big)^{\frac{1}{2}} g_3 ;$$

folglich gilt

$$p(y(0)>0>y(\tau),x(0)>\gamma)/\tau$$

$$= \tau^{-1}p\left(g_1>\gamma, \tau^{-1}g_2>0, g_3<\frac{-(-r''(0))^{\frac{1}{2}}r'(\tau)g_1+\tau r''(\tau)\tau^{-1}g_2}{\left((r''(0))^2+r''(0)(r'(\tau))^2-(r''(\tau))^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{y_1>\gamma}\int\limits_{y_2>0}\int\limits_{y_3<c(y_1,y_2;\tau)} e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+\tau^2y_2+y_3^2)}\,dy_3dy_2dy_1$$

mit

$$c(y_1,y_2;\,\tau):=\frac{-(-r''(0))^{\frac{1}{2}}r'(\tau)y_1+\tau r''(\tau)y_2}{\left((r''(0))^2+r''(0)(r'(\tau))^2-(r''(\tau))^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Wegen $\int\lambda^4dF<\infty$ existiert $r''''(\tau)$ und ist stetig; elementare Berechnungen ergeben deshalb

$$\lim_{\tau\searrow 0}c(y_1,y_2;\,\tau) = R\left(y_1-(-r''(0))^{-\frac{1}{2}}y_2\right)$$

mit der Abkürzung

$$R:=\left((r''''(0))/r''(0)^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Wenden wir den Satz von der majorisierten Konvergenz an, so erhalten wir

$$\lim_{\tau\searrow 0}p(y(0)>0>y(\tau),\,x(0)>\gamma)/\tau$$

$$= (2\pi)^{-3/2}\int\limits_{y_1>\gamma}\int\limits_{y_2>0}\int\limits_{y_3<R(y_1-(-r''(0))^{-1/2}y_2)} e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+y_3^2)}\,dy_3dy_2dy_1;$$

wegen

$$\int\limits_{y_2>0}\int\limits_{y_2<R(y_1-(-r''(0))^{-1/2}y_2)} e^{-\frac{1}{2}y_3^2}\,dy_3dy_2 = \int\limits_{-\infty}^{Ry_1}(-r''(0))^{\frac{1}{2}}(y_1-y_3R^{-1})e^{-\frac{1}{2}y_3^2}\,dy_3$$

$$= (-r''(0))^{\frac{1}{2}}y_1\int\limits_{-\infty}^{Ry_1}e^{-\frac{1}{2}y_3^2}\,dy_3 + R^{-1}(-r''(0))^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}R^2y_1^2}$$

ergibt sich

$$Em(\gamma) = a\int\limits_{\gamma}^{+\infty}b(z)\,dz\,.$$

LITERATURHINWEISE

1. W. Fieger, *Die Anzahl der Niveaudurchgänge und der lokalen Maximalstellen von Gauß-schen Prozessen*, Symposium on Probability Methods in Analysis, Lectures delivered at a symposium at Loutraki, Greece, 1966 (Lecture Notes in Mathematics 31), 63–68. Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1967.

2. W. Fieger, *Die Transformation von Burkill-Unterteilungsintegralen*, Math. Annalen 183 (1969), 115–129.
3. W. Fieger, *Die Anzahl der γ-Niveau-Kreuzungspunkte von stochastischen Prozessen*, Zur Veröffentlichung in der Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und vervandte Gebiete eingereicht.
4. G. Hunt, *Random Fourier transforms*, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1956), 38–69.
5. K. Itô, *The expected number of zeros of continuous stationary Gaussian processes*, J. Math. Kyoto Univ. 3 (1964), 207–216.
6. N. D. Ylvisaker, *The expected number of zeros of a stationary Gaussian process*, Ann. Math. Statist. 36 (1965), 1043–1046.

INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE STATISTIK DER UNIVERSITÄT (TH) KARLSRUHE, DEUTSCHLAND