MATH. SCAND. 25 (1969), 227–247

KONVEXE OPTIMIERUNGSAUFGABEN IN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN

WOLFGANG W. BRECKNER und IOSIF KOLUMBÁN

Wie W. Fenchel [5, S. 105–115] gezeigt hat, kann man mit Hilfe des Konzepts der konjugierten Funktionen auf elegante Weise Dualitäts- und Sattelpunktsätze für konvexe Optimierungsaufgaben in endlichdimensionalen Vektorräumen erhalten. Der Wert dieser Theorie wird noch dadurch hervorgehoben, dass aus ihren Sätzen alle bisher bekannten Dualitätsaussagen für Programmierungsaufgaben folgen (siehe diesbezüglich [3]).

Fenchels Untersuchungen wurden von A. Brøndsted [2], U. Dieter [4], J. J. Moreau [8] und R. T. Rockafellar [9] fortgesetzt und auf unendlichdimensionale Vektorräume übertragen. Unter einer Optimierungsaufgabe in einem topologischen Vektorraum Z über dem Körper R der reellen Zahlen versteht man dabei im allgemeinen das folgende Problem:

Gegeben sei eine nichtleere Teilmenge $\mathscr{X}$ von Z und ein auf $\mathscr{X}$ definiertes reelles Funktional χ. Bestimme diejenigen Elemente $z_0 \in \mathscr{X}$ welche der Gleichung

$$\chi(z_0) = \inf_{z \in \mathscr{X}} \chi(z)$$

genügen.

Schon H. W. Kuhn und A. W. Tucker [7], L. Hurwicz [1, S. 38–102] u. a. haben darauf hingewiesen, dass bei Anwendungen auch allgemeinere Optimierungsaufgaben auftreten können, und zwar kann χ die Menge $\mathscr{X}$ in einen halbgeordneten topologischen Vektorraum F abbilden, und gesucht werden diejenigen Elemente $z_0 \in \mathscr{X}$, für die $\chi(z_0)$ ein minimales Element (im Sinne der Ordnungsrelation von F) der Menge $\chi(\mathscr{X})$ ist. Eine Optimierungsaufgabe dieser Art wird auch in der vorliegenden Arbeit untersucht, wobei Dualitäts-, Sattelpunkt- und Existenzsätze bewiesen werden. Als Hilfsmittel wird eine entsprechende Verallgemeinerung des Begriffes der konjugierten Funktion benutzt.

1. Bezeichnungen.

Ein topologischer Vektorraum F über dem Körper R der reellen Zahlen

---

Eingegangen am 11. Juli 1968.

heisst halbgeordnet, wenn für gewisse Paare $(f_1,f_2) \in F \times F$ *eine reflexive, transitive und antisymmetrische Beziehung* $f_1 \leqq f_2$ *erklärt ist, die folgende Eigenschaften besitzt:*

(H_1): *aus* $f_1 \leqq f_2$ *folgt* $f_1+f \leqq f_2+f$ *für jedes* $f \in F$;
(H_2): *aus* $f_1 \leqq f_2$ *folgt* $\lambda f_1 \leqq \lambda f_2$ *für jede reelle positive Zahl* λ.

(Wir benutzen für die Ordnungsrelation aus F und für die in R dasselbe Zeichen $\leqq$.)

Zwei Elemente f_1 und f_2 eines halbgeordneten topologischen Vektorraumes F sind vergleichbar, wenn eine der Beziehungen $f_1 \leqq f_2$, $f_2 \leqq f_1$ gilt. Ist jedes Paar $(f_1,f_2) \in F \times F$ vergleichbar, so heisst F geordnet.

Bezeichnet θ_F das Nullelement des halbgeordneten topologischen Vektorraumes F, so ist die Menge

$$K_F = \{f \mid f \in F,\ \theta_F \leqq f\}$$

ein echter spitzer konvexer Kegel mit θ_F als Scheitel, den man auch Kegel der positiven Elemente nennt. (Wir benutzen die Terminologie von [6].)

Ist $f_1 \leqq f_2$, aber $f_1 \neq f_2$, so schreiben wir $f_1 < f_2$. Die Negation von $f_1 < f_2$ wird mit $f_1 \nless f_2$ bezeichnet.

Die Menge der auf dem topologischen Vektorraum F stetigen linearen Funktionale bezeichnen wir als den dualen Raum F^* von F. Ist F halbgeordnet, dann sei

$$K_{F^*} = \{f^* \mid f^* \in F^*, f^*(f) \geqq 0 \text{ für alle } f \in K_F\}$$

und

$$K_{F^*}^+ = \{f^* \mid f^* \in F^*, f^*(f) > 0 \text{ für alle } f \in K_F \setminus \{\theta_F\}\}.$$

Im folgenden bezeichnet ω die Menge der natürlichen Zahlen mit der üblichen Ordnung.

Ein halbgeordneter topologischer Vektorraum $F \neq \{\theta_F\}$ *heisst Fundamentalraum, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(F_1): *sind* f,g *Elemente von* F *und ist* $\theta_F < f$, *dann gibt es ein* $n \in \omega$, *so dass* $g < nf$ *ist;*
(F_2): *das Innere des Kegels* K_F *ist nicht leer.*

Beispiele. Im n-dimensionalen Vektorraum R^n führen wir eine Topologie mit Hilfe der Norm

$$\|f\| = \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} f_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{wobei } f=(f_1,f_2,\ldots,f_n) \in R^n,$$

ein. Sind $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ und $g=(g_1,g_2,\ldots,g_n)$ zwei Elemente von R^n, so definieren wir $f \leqq g$ durch $f=g$ oder $f_i < g_i$ für alle $i=1,\ldots,n$. Wie man leicht sieht, ist R^n in bezug auf diese binäre Relation ein Fundamentalraum.

Definiert man dagegen die Ordnungsrelation $f \leqq g$ in R^n durch $f_i \leqq g_i$ für alle $i=1,\ldots,n$, so erhält man zwar einen halbgeordneten topologischen Vektorraum, doch keinen Fundamentalraum, denn Bedingung (F_1) ist nicht erfüllt. In der Tat, setzt man z.B. $f=(1,0,0,\ldots,0)$ und $g=(1,1,1,\ldots,1)$, so gibt es keine natürliche Zahl n für die $g < nf$ ist.

Im folgenden benötigen wir öfters

Hilfssatz 1.1. *Es sei F ein Fundamentalraum und $f,g \in F$. Dann gibt es ein Element $h \in K_F$ und ein Element $h_1 \in -K_F$, für welche die Beziehungen $h_1 < f < h$ und $h_1 < g < h$ gelten.*

Beweis. Es sei $f_0 \in F$ und $\theta_F < f_0$. Nach (F_1) gibt es ein $n_1 \in \omega$, so dass $f < n_1 f_0$ ist und ein $n_2 \in \omega$, so dass $g < n_2 f_0$ ist. Setzen wir $n = \max\{n_1, n_2\}$, dann ist $h = nf_0$ ein Element aus K_F und es gilt $f < h$, sowie $g < h$.

Es sei nun $g_1 \in K_F$ so gewählt, dass $-f < g_1$ und $-g < g_1$ ist. Für das Element $h_1 = -g_1 \in -K_F$ gilt dann $h_1 < f$ und $h_1 < g$.

2. Die primäre und die duale Optimierungsaufgabe.

In unseren weiteren Ausführungen seien X und Y stets zwei nichtleere konvexe Teilmengen eines reellen topologischen Vektorraumes Z und F ein Fundamentalraum. Weiterhin sei φ eine konvexe Abbildung von X in F, d.h. es gilt

$$\varphi\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leqq \varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2)$$

für alle $x_1, x_2 \in X$ und alle $\lambda \in [0,1]$. ψ sei eine konkave Abbildung von Y in F, d.h. es gilt

$$\lambda\psi(y_1) + (1-\lambda)\psi(y_2) \leqq \psi\big(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\big)$$

für alle $y_1, y_2 \in Y$ und alle $\lambda \in [0,1]$.

Definition 2.1. Ein Element $z \in Z$ heisst zulässig, wenn es ein Element des Durchschnitts $X \cap Y$ ist.

Im folgenden bezeichnen wir die Menge der zulässigen Elemente mit $\mathscr{Z}$.

DEFINITION 2.2. $z_0 \in \mathscr{Z}$ ist ein Minimalelement, wenn für jedes zulässige Element z die Beziehung

$$\varphi(z) - \psi(z) \nless \varphi(z_0) - \psi(z_0)$$

gilt.

Die primäre Optimierungsaufgabe lautet dann: ist $\mathscr{Z}$ nicht leer, so bestimme die Minimalelemente.

Um die duale Optimierungsaufgabe formulieren zu können, bilden wir die folgenden Mengen:

$$X' = \{(z^*,f^*) \mid z^* \in Z^*, f^* \in K^+_{F^*},\ \sup_{x\in X}[z^*(x) - f^*(\varphi(x))] < +\infty\}\,,$$
$$'Y = \{(z^*,f^*) \mid z^* \in Z^*, f^* \in K^+_{F^*},\ \inf_{y\in Y}[z^*(y) - f^*(\psi(y))] > -\infty\}\,.$$

Ist X' nicht leer, so verstehen wir unter dem zu φ konjugierten Funktional das auf X' definierte Funktional

$$\varphi'(z^*,f^*) = \sup_{x\in X}[z^*(x) - f^*(\varphi(x))]\,.$$

Ähnlich definiert man das zu ψ konjugierte Funktional

$$'\psi(z^*,f^*) = \inf_{y\in Y}[z^*(y) - f^*(\psi(y))], \quad (z^*,f^*) \in {'Y}\,.$$

Ist $f \in F$ ein beliebiges Element, so sei

$$'(\psi+f)(z^*,f^*) = {'\psi}(z^*,f^*) - f^*(f) \quad \text{für alle } (z^*,f^*) \in {'Y}\,.$$

$'(\psi+f)$ ist das zu $\psi+f$ konjugierte Funktional, wobei die Abbildung $\psi+f$ durch

$$(\psi+f)(y) = \psi(y)+f \quad \text{für alle } y \in Y\,,$$

definiert ist.

DEFINITION 2.3. Ein Funktional $(z^*,f^*) \in Z^* \times F^*$ heisst zulässig, wenn es ein Element des Durchschnitts $X' \cap {'Y}$ ist.

Im folgenden bezeichnen wir die Menge der zulässigen Funktionale mit $\mathscr{Z}'$.

DEFINITION 2.4. $f \in F$ ist ein Indikator des zulässigen Funktionals (z^*,f^*), wenn

$$f^*(f) = {'\psi}(z^*,f^*) - \varphi'(z^*,f^*)\,.$$

Aus dieser Definition folgt sofort, dass zwei Indikatoren eines zulässigen Funktionals entweder gleich oder nicht vergleichbar sind. Ist F ein geordneter Fundamentalraum, so besitzt also jedes zulässige Funktional genau einen Indikator.

Hilfssatz 2.1. *Es sei* $z_0 \in \mathscr{Z}$. *Ist* $f \in F$ *ein Indikator des zulässigen Funktionals* (z^*, f^*), *so gilt*

$$\varphi(z_0) - \psi(z_0) \nless f .$$

Beweis. Wir nehmen an es sei $\varphi(z_0) - \psi(z_0) < f$. Wegen $f^* \in K^+_{F^*}$ gilt dann

$$f^*(\varphi(z_0) - \psi(z_0)) < f^*(f) = {'\psi}(z^*, f^*) - \varphi'(z^*, f^*) . \tag{1}$$

Beachtet man andererseits die Definitionen von ${'\psi}(z^*, f^*)$ und von $\varphi'(z^*, f^*)$, so ergibt sich die Ungleichung

$${'\psi}(z^*, f^*) - \varphi'(z^*, f^*) \leqq f^*(\varphi(z_0) - \psi(z_0)) ,$$

die (1) widerspricht.

Definition 2.5. Ein Funktional $(z_0^*, f_0^*) \in \mathscr{Z}'$ ist ein Maximalfunktional, wenn es einen Indikator $f_0 \in F$ besitzt, so dass für jedes zulässige Funktional (z^*, f^*) und für jeden Indikator $f \in F$ von (z^*, f^*) die Beziehung $f_0 \nless f$ gilt.

Die duale Optimierungsaufgabe lautet dann: ist $\mathscr{Z}'$ *nicht leer, so bestimme die Maximalfunktionale.*

Minimalelemente und Maximalfunktionale kann man mengenmässig charakterisieren. Zu diesem Zweck bilden wir im Raum $Z \times F$ die Mengen

$$[X, \varphi] = \{(x, g) \mid x \in X, g \in F, \varphi(x) \leqq g\} ,$$
$$[Y, \psi + f] = \{(y, g) \mid y \in Y, g \in F, g \leqq \psi(y) + f\} ,$$

wobei f ein beliebiges Element des Fundamentalraumes F ist. Analog bilden wir im Raum $Z^* \times F^* \times R$ die Mengen

$$[X', \varphi'] = \{(z^*, f^*, \alpha) \mid (z^*, f^*) \in X', \alpha \in R, \varphi'(z^*, f^*) \leqq \alpha\} ,$$
$$['Y, '(\psi + f)] = \{(z^*, f^*, \alpha) \mid (z^*, f^*) \in {'Y}, \alpha \in R, \alpha \leqq {'\psi}(z^*, f^*) - f^*(f)\} .$$

Dann gilt

Hilfssatz 2.2. *Ein Element* $z_0 \in \mathscr{Z}$ *ist genau dann ein Minimalelement, wenn gilt*

$$[X, \varphi] \cap [Y, \psi + f] = \emptyset \quad \text{für alle } f \in F,\ f < \varphi(z_0) - \psi(z_0) . \tag{2}$$

Beweis. *Notwendigkeit.* Es sei z_0 ein Minimalelement. Wir nehmen an, es gebe ein $f \in F, f < \varphi(z_0) - \psi(z_0)$, für das

$$[X, \varphi] \cap [Y, \psi + f] \neq \emptyset$$

ist. Ist (z,g) ein Element dieses Durchschnitts, so gilt

$$\varphi(z)-\psi(z) \leqq g-\psi(z) \leqq f < \varphi(z_0)-\psi(z_0),$$

was der Minimalität von z_0 widerspricht.

Hinlänglichkeit. Es sei (2) erfüllt. Wäre z_0 kein Minimalelement, so würde es ein Element $z_1 \in \mathscr{Z}$ geben, für welches die Ungleichung

$$\varphi(z_1)-\psi(z_1) < \varphi(z_0)-\psi(z_0)$$

gilt. Dann hätten wir aber

$$(z_1, \varphi(z_1)) \in [X,\varphi] \cap [Y, \psi+\varphi(z_1)-\psi(z_1)],$$

was unserer Voraussetzung widerspricht.

HILFSSATZ 2.3. *Es sei* $(z^*,f^*,\alpha) \in [X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+f)]$. *Dann gibt es einen Indikator* $g \in F$ *des zulässigen Funktionals* (z^*,f^*), *so dass* $f \leqq g$ *ist.*

BEWEIS. Aus $(z^*,f^*,\alpha) \in [X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+f)]$ folgt die Ungleichung

$$\varphi'(z^*,f^*) \leqq \alpha \leqq {'\psi}(z^*,f^*)-f^*(f).$$

Ist nun

$$\varphi'(z^*,f^*) = {'\psi}(z^*,f^*)-f^*(f),$$

so genügt es g gleich f zu setzen, damit die Behauptung resultiert. Es sei daher

$$\varphi'(z^*,f^*) < {'\psi}(z^*,f^*)-f^*(f). \tag{3}$$

Nach Hilfssatz 1.1 gibt es ein $h \in F$, so dass $\theta_F < h$ und $f < h$ gilt. Wegen $f^* \in K^+_{F^*}$ ist dann $f^*(h) > 0$ und für ein genügend grosses $n \in \omega$ haben wir

$$f^*(nh) > {'\psi}(z^*,f^*)-\varphi'(z^*,f^*). \tag{4}$$

Die reelle Funktion

$$P(\lambda) = {'\psi}(z^*,f^*)-\varphi'(z^*,f^*)-\lambda f^*(f)-(1-\lambda)f^*(nh)$$

ist für $\lambda \in [0,1]$ stetig und nimmt wegen (3) und (4) die Werte $P(0) < 0$ und $P(1) > 0$ an. Daher gibt es ein $\lambda_0 \in]0,1[$, für das

$$P(\lambda_0) = {'\psi}(z^*,f^*)-\varphi'(z^*,f^*)-f^*(\lambda_0 f+(1-\lambda_0)nh) = 0$$

ist; d.h. $g = \lambda_0 f+(1-\lambda_0)nh$ ist ein Indikator des zulässigen Funktionals (z^*,f^*). Wegen $f < nh$ gilt $f < g$.

HILFSSATZ 2.4. $(z_0{}^*,f_0{}^*) \in \mathscr{Z}'$ *ist genau dann ein Maximalfunktional, wenn es einen Indikator* $f_0 \in F$ *besitzt, so dass gilt*

(5) $$[X',\varphi'] \cap [{}'Y, {}'(\psi+f)] = \emptyset \quad \textit{für alle } f \in F, f_0 < f\,.$$

Beweis. *Notwendigkeit.* Es sei (z_0^*,f_0^*) ein Maximalfunktional. Wir nehmen indirekt an, es gebe für jeden seiner Indikatoren $f_1 \in F$ ein Element $f \in F, f_1 < f$, so dass

$$[X', \varphi'] \cap [{}'Y, {}'(\psi+f)] \neq \emptyset$$

gilt. Ist (z^*,f^*,α) ein Element dieses Durchschnitts, so besitzt das zulässige Funktional (z^*,f^*) nach Hilfssatz 2.3 einen Indikator $g \in F$ mit $f \leqq g$. Daraus folgt $f_1 < g$. Dann kann (z_0^*,f_0^*) aber kein Maximalfunktional sein.

Hinlänglichkeit. Es sei (5) erfüllt. Wir nehmen an, es gebe ein zulässiges Funktional (z_1^*,f_1^*), das einen Indikator $f_1 \in F$ besitzt, für welchen die Beziehung $f_0 < f_1$ gilt. Dann ist aber

$$(z_1^*,f_1^*, \varphi'(z_1^*,f_1^*)) \in [X',\varphi'] \cap [{}'Y, {}'(\psi+f_1)]\,,$$

was unserer Voraussetzung widerspricht. Also gilt für jedes zulässige Funktional (z^*,f^*) und für jeden Indikator $f \in F$ von (z^*,f^*) die Beziehung $f_0 \not< f$; d.h. (z_0^*,f_0^*) ist ein Maximalfunktional.

3. Dualitätssätze.

Definition 3.1. Es sei W eine Teilmenge von Z und $\mathrm{Int}(W)$ ihr Inneres. Eine Abbildung $\pi: W \to F$ heisst an der Stelle $\bar{z} \in \mathrm{Int}(W)$ nach oben beschränkt, wenn es eine Umgebung U des Nullelements θ_Z und ein Element $h \in F$ gibt, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(B_1): $\bar{z} + U \subseteqq W$;
(B_2): $\pi(\bar{z}+z) \leqq h$ für alle $z \in U$.

Hilfssatz 3.1. *Es sei $f \in F$ und $\mathrm{Int}([X,\varphi]) \cap [Y, \psi+f] = \emptyset$. Gibt es ein $\bar{z} \in \mathscr{X}$, das innerer Punkt von X ist, und ist die Abbildung φ an dieser Stelle $\bar{z}$ nach oben beschränkt, dann ist*

$$[X',\varphi'] \cap [{}'Y, {}'(\psi+f)] \neq \emptyset\,.$$

Beweis. Da φ an der Stelle $\bar{z}$ nach oben beschränkt ist, gibt es eine Umgebung U des Nullelements θ_Z und ein Element $h \in F$, so dass $\bar{z} + U \subseteqq X$ und $\varphi(\bar{z}+z) \leqq h$ ist für alle $z \in U$.

Es sei nun f_0 ein innerer Punkt des Kegels K_F. Dann gibt es eine Umgebung V des Nullelements θ_F mit $f_0 + V \subseteqq K_F$, woraus

$$(\bar{z}, h+f_0) + U \times V \subseteqq [X,\varphi]$$

folgt. Demnach gilt

$$(\bar{z}, h+f_0) \in \operatorname{Int}([X,\varphi]) .$$

Da $[X,\varphi]$ und $[Y,\psi+f]$ konvexe Mengen sind, gibt es nach dem Satz von M. Eidelheit [6, S. 191] eine abgeschlossene Hyperebene H, welche die Mengen $[X,\varphi]$ und $[Y,\psi+f]$ trennt und die keinen inneren Punkt von $[X,\varphi]$ enthält. Da diese Hyperebene die Form

$$H = \{(z,g) \mid z \in Z,\ g \in F,\ z^*(z) - f^*(g) - \alpha = 0\}$$

besitzt, wobei $(z^*, f^*, \alpha) \in Z^* \times F^* \times R$, gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\sup_{(x,g)\in[X,\varphi]} [z^*(x) - f^*(g)] \leqq \alpha \leqq \inf_{(y,g)\in[Y,\psi+f]} [z^*(y) - f^*(g)] . \tag{6}$$

Um zu zeigen, dass f^* ein Funktional aus K_{F^*} ist, nehmen wir an, es gebe ein Element $f_1 \in F$, $\theta_F < f_1$, mit $f^*(f_1) < 0$. Für ein genügend grosses $n \in \omega$ gilt dann die Ungleichung

$$z^*(\bar{z}) - nf^*(f_1) - \alpha > 0 \tag{7}$$

und wegen (F_1) auch $nf_1 > \varphi(\bar{z})$. Dann ist aber $(\bar{z}, nf_1)$ ein Element aus $[X,\varphi]$ und Ungleichung (7) steht also im Widerspruch zu (6). Folglich ist $f^* \in K_{F^*}$.

Nun können wir beweisen, dass f^* aus $K^+_{F^*}$ ist. Zu diesem Zweck nehmen wir an, es gebe ein Element $f_2 \in F$, $\theta_F < f_2$, mit $f^*(f_2) = 0$. Da F ein Fundamentalraum ist, gibt es wegen (F_1) ein $n \in \omega$, so dass die Beziehung $nf_2 > -(\psi(\bar{z}) + f)$ gilt. Dann ist aber $(\bar{z}, -nf_2)$ ein Element aus $[Y,\psi+f]$, und wegen (6) haben wir

$$z^*(\bar{z}) - \alpha = z^*(\bar{z}) + nf^*(f_2) - \alpha \geqq 0 . \tag{8}$$

Ebenfalls wegen (F_1) gibt es ein $n_1 \in \omega$ mit $\varphi(\bar{z}) < n_1 f_2$, woraus

$$f^*(\varphi(\bar{z})) \leqq n_1 f^*(f_2) = 0 \tag{9}$$

folgt. Da $(\bar{z}, \varphi(\bar{z})) \in [X,\varphi]$, ergibt sich aus (9), bei Beachtung von (6), die Ungleichung

$$z^*(\bar{z}) - \alpha \leqq z^*(\bar{z}) - f^*(\varphi(\bar{z})) - \alpha \leqq 0 . \tag{10}$$

Aus (8) und (10) folgt also $z^*(\bar{z}) = \alpha$.

Wie vorhin gezeigt wurde, gilt $(\bar{z}, h+f_0) \in \operatorname{Int}([X,\varphi])$. Da die Hyperebene H keinen inneren Punkt von $[X,\varphi]$ enthält, ist dann wegen (6)

$$z^*(\bar{z}) - f^*(h_0) - \alpha = -f^*(h_0) < 0 ,$$

wobei $h_0 = h + f_0$ gesetzt wurde. Für ein $m \in \omega$ mit $h_0 < mf_2$ gilt dann

$$f^*(f_2) \geqq \frac{1}{m} f^*(h_0) > 0 ,$$

was unserer Voraussetzung widerspricht. Also ist $(z^*, f^*) \in Z^* \times K^+_{F^*}$.

Bei Beachtung von (6), folgt aus

$$(x, \varphi(x)) \in [X, \varphi] \quad \text{für alle } x \in X ,$$

dass (z^*, f^*) ein Element von X' ist und dass $\varphi'(z^*, f^*) \leqq \alpha$ gilt.

Ebenso gilt wegen

$$(y, \psi(y) + f) \in [Y, \psi + f] \quad \text{für alle } y \in Y$$

die Ungleichung

$$\alpha \leqq z^*(y) - f^*(\psi(y)) - f^*(f) \quad \text{für alle } y \in Y ,$$

woraus $(z^*, f^*) \in {}'Y$ und $\alpha \leqq {}'\psi(z^*, f^*) - f^*(f)$ folgt. Daher ist

$$(z^*, f^*, \alpha) \in [X', \varphi'] \cap [{}'Y, {}'(\psi + f)] .$$

Bemerkung. Verzichtet man auf Bedingung (F_1), so ist Hilfssatz 3.1 im allgemeinen nicht gültig. Dieses zeigt uns das folgende Beispiel.

Es seien $Z = R$ und

$$X = \{x \mid x \in R,\ x \geqq 0\} ,$$
$$Y = \{y \mid y \in R,\ y \geqq 1\} .$$

Als F wählen wir den euklidischen Raum R^2, versehen mit der Ordnung

$$f \leqq g \quad \text{genau dann, wenn} \quad f_i \leqq g_i, \quad i = 1, 2 ,$$

wobei $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ zwei Elemente aus R^2 sind. Wie in § 1 festgestellt wurde, ist dann (F_1) nicht erfüllt. Die Abbildungen $\varphi \colon X \to F$ und $\psi \colon Y \to F$ seien folgendermassen definiert:

$$\varphi(x) = (x, -x), \qquad \psi(y) = (0, 0) .$$

Man sieht sofort, dass $\bar{z} = 3$ aus $\mathscr{X} = X \cap Y$ ist und dass φ an dieser Stelle nach oben beschränkt ist. Für $f = (1, 0)$ gilt dann

$$\operatorname{Int}([X, \varphi]) \cap [Y, \psi + f] = \emptyset$$

und, wie man leicht feststellt, auch

$$[X', \varphi'] \cap [{}'Y, {}'(\psi + f)] = \emptyset .$$

Ähnlich wie Hilfssatz 3.1 beweist man

HILFSSATZ 3.2. *Es sei* $f \in F$ *und* $[X,\varphi] \cap \mathrm{Int}([Y,\psi+f]) = \emptyset$. *Gibt es ein* $\bar{z} \in \mathscr{X}$, *das innerer Punkt von* Y *ist, und ist die Abbildung* $-\psi$ *an dieser Stelle* $\bar{z}$ *nach oben beschränkt, dann ist*

$$[X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+f)] \neq \emptyset . \tag{11}$$

Aus den Hilfssätzen 3.1 und 3.2 folgt

KOROLLAR 3.1. *Es sei* $f \in F$ *und* $[X,\varphi] \cap [Y,\psi+f] = \emptyset$. *Gibt es ein* $\bar{z} \in \mathscr{X}$, *das innerer Punkt von* X *oder* Y *ist, und ist die dazugehörige Abbildung* φ *bzw.* $-\psi$ *an dieser Stelle* $\bar{z}$ *nach oben beschränkt, dann gilt* (11).

KOROLLAR 3.2. *Es sei* $f \in F$ *und*

$$[X', \varphi'] \cap ['Y, '(\psi+g)] \neq \emptyset \quad \textit{für alle } g \in F,\ g < f .$$

Gibt es ein $\bar{z} \in \mathscr{X}$, *das innerer Punkt von* X *oder* Y *ist, und ist die dazugehörige Abbildung* φ *bzw.* $-\psi$ *an dieser Stelle* $\bar{z}$ *nach oben beschränkt, dann gilt* (11).

BEWEIS. Es sei $\bar{z} \in \mathscr{X}$ ein innerer Punkt von X und φ an dieser Stelle nach oben beschränkt. Wir zeigen, dass

$$\mathrm{Int}\,([X,\varphi]) \cap [Y,\psi+f] = \emptyset$$

ist. Dazu machen wir die Annahme, es gebe ein Element

$$(z,g_0) \in \mathrm{Int}\,([X,\varphi]) \cap [Y,\psi+f] .$$

Hieraus folgt $\varphi(z) < g_0 \leqq \psi(z)+f$. Für $h = \frac{1}{2}(\varphi(z)+g_0)$ gilt dann

$$\varphi(z) < h < \psi(z)+f .$$

Setzen wir

$$g = \tfrac{1}{2}f + \tfrac{1}{2}(h-\psi(z)) ,$$

so haben wir $g < f$ und $h < \psi(z)+g$. Würde es ein

$$(z^*,f^*,\alpha) \in [X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+g)]$$

geben, so hätten wir einerseits wegen $\varphi(z) < h$ die Ungleichung

$$z^*(z) - f^*(h) - \alpha < z^*(z) - f^*(\varphi(z)) - \alpha \leqq \varphi'(z^*,f^*) - \alpha \leqq 0$$

und andererseits wegen $h < \psi(z)+g$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} z^*(z) - f^*(h) - \alpha &\geqq {'\psi}(z^*,f^*) - \alpha + f^*(\psi(z)) - f^*(h) \\ &\geqq f^*(g) + f^*(\psi(z)) - f^*(h) > 0 . \end{aligned}$$

Also ist

$$[X', \varphi'] \cap ['Y, '(\psi + g)] = \emptyset ,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Wenden wir nun Hilfssatz 3.1 an, so ergibt sich (11).

Ist $\bar{z}$ ein innerer Punkt von Y und die Abbildung $-\psi$ an dieser Stelle nach oben beschränkt, so zeigt man zunächst, dass

$$[X, \varphi] \cap \operatorname{Int}([Y, \psi + f]) = \emptyset$$

ist, und wendet dann Hilfssatz 3.2 an.

SATZ 3.1. *Ist das zulässige Element z_0 ein Minimalelement, gibt es ein $\bar{z} \in \mathscr{Z}$, das innerer Punkt von X oder Y ist, und ist die dazugehörige Abbildung φ bzw. $-\psi$ an dieser Stelle $\bar{z}$ nach oben beschränkt, so gilt*

$$[X', \varphi'] \cap ['Y, '(\psi + \varphi(z_0) - \psi(z_0))] \neq \emptyset . \tag{12}$$

Umgekehrt: gilt (12) *für ein zulässiges Element z_0, dann ist z_0 ein Minimalelement.*

BEWEIS. Es sei $\bar{z} \in \mathscr{Z}$ ein innerer Punkt von X und die Abbildung φ an dieser Stelle nach oben beschränkt. Dann ist

$$\operatorname{Int}([X, \varphi]) \cap [Y, \psi + \varphi(z_0) - \psi(z_0)] = \emptyset ,$$

denn wäre (z_1, h) ein Element dieses Durchschnitts, so hätten wir

$$\varphi(z_1) - \psi(z_1) < h - \psi(z_1) \leqq \varphi(z_0) - \psi(z_0) ,$$

was der Minimalität von z_0 widerspricht. Nach Hilfssatz 3.1 gilt dann (12).

Ist $\bar{z} \in \mathscr{Z}$ ein innerer Punkt von Y und die Abbildung $-\psi$ an dieser Stelle nach oben beschränkt, so zeigt man zunächst, dass

$$[X, \varphi] \cap \operatorname{Int}([Y, \psi + \varphi(z_0) - \psi(z_0)]) = \emptyset$$

ist, und wendet dann Hilfssatz 3.2 an.

Um die Umkehrung zu beweisen, nehmen wir an, z_0 sei kein Minimalelement. Dann gibt es ein $z_1 \in \mathscr{Z}$ mit

$$\varphi(z_1) - \psi(z_1) < \varphi(z_0) - \psi(z_0) .$$

Hieraus folgt für ein beliebiges Funktional

$$(z^*, f^*, \alpha) \in [X', \varphi'] \cap ['Y, '(\psi + \varphi(z_0) - \psi(z_0))] ,$$

dass

$$\begin{aligned} z^*(z_1) - f^*(\varphi(z_1)) - \alpha &= z^*(z_1) - f^*(\psi(z_1)) - \alpha - f^*(\varphi(z_1) - \psi(z_1)) \\ &\geqq {}'\psi(z^*,f^*) - \alpha - f^*(\varphi(z_1) - \psi(z_1)) \\ &\geqq f^*(\varphi(z_0) - \psi(z_0)) - f^*(\varphi(z_1) - \psi(z_1)) > 0 \end{aligned}$$

ist. Andererseits ist nach der Definition von $\varphi'(z^*,f^*)$

$$z^*(z_1) - f^*(\varphi(z_1)) - \alpha \leqq \varphi'(z^*,f^*) - \alpha \leqq 0\,,$$

was den obigen Ungleichungen widerspricht.

SATZ 3.2. *Ist z_0 ein zulässiges Element, so sind die folgenden Behauptungen äquivalent*:

1° $(z_0^*,f_0^*, \varphi'(z_0^*,f_0^*)) \in [X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi + \varphi(z_0) - \psi(z_0))]$;

2° (z_0^*,f_0^*) *ist ein zulässiges Funktional und es gelten die Gleichungen*

$$\varphi'(z_0^*,f_0^*) = z_0^*(z_0) - f_0^*(\varphi(z_0))\,, \tag{13}$$

$$'\psi(z_0^*,f_0^*) = z_0^*(z_0) - f_0^*(\psi(z_0))\,; \tag{14}$$

3° (z_0^*,f_0^*) *ist ein Maximalfunktional mit dem Indikator* $\varphi(z_0) - \psi(z_0)$.

BEWEIS. Aus 1° ergibt sich die Ungleichung

$$\varphi(z_0^*,f_0^*) \leqq {}'\psi(z_0^*,f_0^*) - f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(z_0))\,.$$

Hieraus folgt einerseits, dass

$$\varphi'(z_0^*,f_0^*) \leqq z_0^*(z_0) - f_0^*(\psi(z_0)) - f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(z_0)) = z_0^*(z_0) - f_0^*(\varphi(z_0))$$

ist, und andererseits, dass

$$\begin{aligned} z_0^*(z_0) - f_0^*(\psi(z_0)) &= z_0^*(z_0) - f_0^*(\varphi(z_0)) + f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(z_0)) \\ &\leqq \varphi'(z_0^*,f_0^*) + f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(z_0)) \leqq {}'\psi(z_0^*,f_0^*) \end{aligned}$$

ist. Bei Beachtung der Definition von $\varphi'(z_0^*,f_0^*)$ und von $'\psi(z_0^*,f_0^*)$ erhält man dann (13) und (14). Demnach folgt Behauptung 2° aus 1°.

Aus (13) und (14) folgt durch Subtraktion die Gleichung

$$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(z_0)) = {}'\psi(z_0^*,f_0^*) - \varphi'(z_0^*,f_0^*)\,, \tag{15}$$

die aber nichts anderes bedeutet, als dass $\varphi(z_0) - \psi(z_0)$ ein Indikator des zulässigen Funktionals (z_0^*,f_0^*) ist.

Andererseits gilt nach Hilfssatz 2.1 für jedes zulässige Funktional (z^*,f^*) und für jeden Indikator $f \in F$ von (z^*,f^*) die Beziehung

$$\varphi(z_0) - \psi(z_0) \nless f\,.$$

Also ist (z_0^*,f_0^*) ein Maximalfunktional. Demnach folgt Behauptung 3° aus 2°.

Aus Behauptung 3° folgt wegen (15) sofort die Behauptung 1°.

KOROLLAR 3.3. *Ist z_0 ein zulässiges Element, so gilt* (12) *genau dann, wenn es ein Maximalfunktional mit dem Indikator $\varphi(z_0)-\psi(z_0)$ gibt.*

Aus Satz 3.1 und Korollar 3.3 ergibt sich der folgende

DUALITÄTSSATZ I. *Ist das zulässige Element z_0 ein Minimalelement, gibt es ein $\bar{z} \in \mathscr{Z}$, das innerer Punkt von X oder Y ist, und ist die dazugehörige Abbildung φ bzw. $-\psi$ an dieser Stelle $\bar{z}$ nach oben beschränkt, so gibt es ein Maximalfunktional mit dem Indikator $\varphi(z_0)-\psi(z_0)$.*

Umgekehrt: ist z_0 ein zulässiges Element und gibt es ein Maximalfunktional mit dem Indikator $\varphi(z_0)-\psi(z_0)$, so ist z_0 ein Minimalelement.

KOROLLAR 3.4. *Ist das zulässige Element z_0 ein Minimalelement, gibt es ein $\bar{z} \in \mathscr{Z}$, das innerer Punkt von X oder Y ist, und ist die dazugehörige Abbildung φ bzw. $-\psi$ an dieser Stelle $\bar{z}$ nach oben beschränkt, so gibt es ein Funktional $f_0^* \in K^+_{F^*}$, das der Gleichung*

$$f_0^*(\varphi(z_0)-\psi(z_0)) = \inf_{z\in Z} f_0^*(\varphi(z)-\psi(z)) \tag{16}$$

genügt.

Umgekehrt: gilt Gleichung (16) *für ein zulässiges Element z_0 und für ein Funktional $f_0^* \in K^+_{F^*}$, dann ist z_0 ein Minimalelement.*

BEWEIS. Nach Dualitätssatz I gibt es ein Maximalfunktional (z_0^*, f_0^*), so dass

$$f_0^*(\varphi(z_0)-\psi(z_0)) = {}'\psi(z_0^*, f_0^*)-\varphi'(z_0^*, f_0^*)$$

ist. Hieraus folgt für alle $z \in \mathscr{Z}$

$$\begin{aligned} f_0^*(\varphi(z_0)-\psi(z_0)) &\leqq z_0^*(z)-f_0^*(\psi(z))-[z_0^*(z)-f_0^*(\varphi(z))] \\ &= f_0^*(\varphi(z)-\psi(z)) \, , \end{aligned}$$

woraus (16) resultiert.

Um die Umkehrung zu beweisen, nehmen wir an, es gebe ein $z_1 \in \mathscr{Z}$ mit

$$\varphi(z_1)-\psi(z_1) < \varphi(z_0)-\psi(z_0) \, .$$

Hieraus folgt wegen $f_0^* \in K^+_{F^*}$ und wegen (16) die Ungleichung

$$f_0^*(\varphi(z_1)-\psi(z_1)) < \inf_{z\in Z} f_0^*(\varphi(z)-\psi(z)) \, ,$$

was nicht möglich ist. Demnach ist z_0 ein Minimalelement.

In unseren weiteren Ausführungen benötigen wir eine zusätzliche Bedingung:

(E): *Es sei $f \in F$. Gibt es für jedes $g \in F$, $f < g$, ein Element $z_g \in \mathscr{Z}$ mit*

> $\varphi(z_g)-\psi(z_g) \leqq g$, *dann gibt es ein Element* $z \in \mathscr{Z}$ *mit* $\varphi(z)-\psi(z) \leqq g$ *für alle* $g \in F, f<g$;

die wir kurz als Existenzbedingung bezeichnen.

Dualitätssatz II. *Die Existenzbedingung* (E) *sei erfüllt. Ist das zulässige Funktional* $(z_0{}^*, f_0{}^*)$ *ein Maximalfunktional, gibt es ein* $\bar{z} \in \mathscr{Z}$, *das innerer Punkt von* X *oder* Y *ist, und ist die dazugehörige Abbildung* φ *bzw.* $-\psi$ *an dieser Stelle* $\bar{z}$ *nach oben beschränkt, dann gibt es ein Minimalelement* z_0, *so dass* $\varphi(z_0)-\psi(z_0)$ *ein Indikator von* $(z_0{}^*, f_0{}^*)$ *ist.*

Umgekehrt: ist $\varphi(z_0)-\psi(z_0)$ *ein Indikator des zulässigen Funktionals* $(z_0{}^*, f_0{}^*)$, *wobei* z_0 *ein Minimalelement ist, so ist* $(z_0{}^*, f_0{}^*)$ *ein Maximalfunktional.*

Beweis. Es sei $(z_0{}^*, f_0{}^*) \in \mathscr{Z}'$ ein Maximalfunktional. Nach Hilfssatz 2.4 besitzt es einen Indikator $f_0 \in F$, so dass gilt

$$[X', \varphi'] \cap ['Y, '(\psi+f)] = \emptyset \quad \text{für alle } f \in F,\ f_0 < f .$$

Dann ist

$$[X, \varphi] \cap [Y, \psi+f] \neq \emptyset \quad \text{für alle } f \in F,\ f_0 < f , \tag{17}$$

denn wäre für ein $f \in F$, $f_0 < f$,

$$[X, \varphi] \cap [Y, \psi+f] = \emptyset ,$$

so müsste nach Korollar 3.1

$$[X', \varphi'] \cap ['Y, '(\psi+f)] \neq \emptyset$$

sein.

Da die Existenzbedingung erfüllt ist, gibt es wegen (17) ein $z_0 \in \mathscr{Z}$ mit

$$\varphi(z_0) - \psi(z_0) \leqq f \quad \text{für alle } f \in F,\ f_0 < f .$$

Hieraus folgt

$$f_0{}^*(\varphi(z_0)-\psi(z_0)) \leqq f_0{}^*(f) \quad \text{für alle } f \in F,\ f_0 < f . \tag{18}$$

Mit Hilfe eines Elements $f_1 \in F$, $f_0 < f_1$ konstruieren wir die Folge

$$f_n = f_0 - 2^{1-n} f_0 + 2^{1-n} f_1, \quad n \in \omega .$$

Dann gilt $f_0 < f_n$ für alle $n \in \omega$ und

$$\lim_{n\to\infty} f_0{}^*(f_n) = f_0{}^*(f_0) .$$

Infolgedessen ist wegen (18)

$$f_0{}^*(\varphi(z_0)-\psi(z_0)) \leqq f_0{}^*(f_0) . \tag{19}$$

Beachtet man nun einerseits, dass f_0 ein Indikator des Funktionals (z_0^*,f_0^*) ist, und andererseits die Ungleichung

$$'\psi(z_0^*,f_0^*) - \varphi'(z_0^*,f_0^*) \leqq f_0^*(\varphi(z_0)-\psi(z_0)),$$

so folgt aus (19), dass

$$f_0^*(\varphi(z_0)-\psi(z_0)) = '\psi(z_0^*,f_0^*) - \varphi'(z_0^*,f_0^*)$$

ist, d.h. $\varphi(z_0)-\psi(z_0)$ ist ein Indikator des Maximalfunktionals (z_0^*,f_0^*). Nach Dualitätssatz I ist z_0 also ein Minimalelement.

Umgekehrt: ist $\varphi(z_0)-\psi(z_0)$ ein Indikator des zulässigen Funktionals (z_0^*,f_0^*), so folgt nach Hilfssatz 2.1 sofort, dass (z_0^*,f_0^*) ein Maximalfunktional ist.

4. Sattelpunktsätze.

In diesem Paragraphen setzen wir voraus, dass Z lokalkonvex ist.

SATZ 4.1. *Es sei $z_0 \in \mathscr{Z}$. Damit $\varphi(z_0)-\psi(z_0)$ ein Indikator des zulässigen Funktionals (z_0^*,f_0^*) ist, ist es notwendig und, falls $f_0^*(\varphi(\cdot))$ (im Sinne von* [2, *S.* 7]) *abgeschlossen ist, auch hinreichend, dass die Ungleichungen*

$$L_1(z_0,z^*) \leqq L_1(z_0,z_0^*) \leqq L_1(z,z_0^*) \tag{20}$$

für alle $z \in Y$ und alle $z^* \in Z_1^* = \{z^* \mid z^* \in Z^*,\ (z^*,f_0^*) \in X'\}$ gelten, wobei

$$L_1(z,z^*) = z^*(z) - f_0^*(\psi(z)) - \varphi'(z^*,f_0^*)$$

ist.

BEWEIS. *Notwendigkeit.* Ist $\varphi(z_0)-\psi(z_0)$ ein Indikator von (z_0^*,f_0^*), so haben wir

$$f_0^*(\varphi(z_0)-\psi(z_0)) = '\psi(z_0^*,f_0^*) - \varphi'(z_0^*,f_0^*)\,. \tag{21}$$

Andererseits gelten für alle $z \in Y$ und alle $z^* \in Z_1^*$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned} '\psi(z_0^*,f_0^*) - \varphi'(z_0^*,f_0^*) &\leqq L_1(z,z_0^*)\,, \\ L_1(z_0,z^*) &\leqq z^*(z_0) - f_0^*(\psi(z_0)) - [z^*(z_0) - f_0^*(\varphi(z_0))] \\ &= f_0^*(\varphi(z_0)-\psi(z_0))\,. \end{aligned}$$

Beachtet man (21), so folgt hieraus, dass

$$L_1(z_0,z^*) \leqq f_0^*(\varphi(z_0)-\psi(z_0)) \leqq L_1(z,z_0^*)$$

ist, woraus sich die Ungleichungen (20) ergeben.

Hinlänglichkeit. Aus der Ungleichung

$$L_1(z_0,z_0^*) \leqq L_1(z,z_0^*) \quad \text{für alle } z \in Y$$

folgt

$$L_1(z_0, z_0^*) \leqq {}'\psi(z_0^*, f_0^*) - \varphi'(z_0^*, f_0^*) \,. \tag{22}$$

Aus

$$L_1(z_0, z^*) \leqq L_1(z_0, z_0^*) \quad \text{für alle } z^* \in Z_1^*$$

folgt

$$\sup_{z^* \in Z_1^*} [z^*(z_0) - \varphi'(z^*, f_0^*)] - f_0^*(\psi(z_0)) \leqq L_1(z_0, z_0^*) \,. \tag{23}$$

Definieren wir nun die Funktion $\vartheta \colon X \to R$ durch

$$\vartheta(x) = f_0^*(\varphi(x)) \quad \text{für alle } x \in X \,,$$

so ist ϑ konvex und es gilt

$$\vartheta'(z^*) = \varphi'(z^*, f_0^*) \quad \text{für alle } z^* \in Z_1^* \,,$$

wobei ϑ' die zu ϑ konjugierte Funktion bezeichnet (siehe [2, S. 11]). Nach einem bekannten Satz [2, S. 15] ist $\vartheta(z_0) = \vartheta''(z_0)$, d.h. es gilt

$$f_0^*(\varphi(z_0)) = \sup_{z^* \in Z_1^*} [z^*(z_0) - \varphi'(z^*, f_0^*)] \,.$$

Daher kann man (23) auch folgendermassen schreiben:

$$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(z_0)) \leqq L_1(z_0, z_0^*) \,.$$

Wegen (22) haben wir also

$$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(z_0)) \leqq {}'\psi(z_0^*, f_0^*) - \varphi'(z_0^*, f_0^*) \,.$$

Andererseits ergibt sich aus der Definition von $\varphi'(z_0^*, f_0^*)$ und von ${}'\psi(z_0^*, f_0^*)$ die Ungleichung

$${}'\psi(z_0^*, f_0^*) - \varphi'(z_0^*, f_0^*) \leqq f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(z_0)) \,.$$

Demnach ist

$$f_0^*(\varphi(z_0) - \psi(z_0)) = {}'\psi(z_0^*, f_0^*) - \varphi'(z_0^*, f_0^*) \,,$$

d.h. $\varphi(z_0) - \psi(z_0)$ ist ein Indikator des zulässigen Funktionals (z_0^*, f_0^*).

Aus Dualitätssatz I und Satz 4.1 ergibt sich der folgende

SATTELPUNKTSATZ I. *Ist das zulässige Element z_0 ein Minimalelement, gibt es ein $\bar{z} \in \mathscr{Z}$, das innerer Punkt von X oder Y ist, und ist die dazugehörige Abbildung φ bzw. $-\psi$ an dieser Stelle $\bar{z}$ nach oben beschränkt, so gibt es ein Maximalfunktional (z_0^*, f_0^*), für welches die Ungleichungen* (20) *gelten.*

Umgekehrt: gibt es ein Maximalfunktional (z_0^*, f_0^*), für welches die Ungleichungen (20) *gelten, wobei $z_0 \in \mathscr{Z}$, und ist $f_0^*(\varphi(\cdot))$ abgeschlossen, dann ist z_0 ein Minimalelement.*

Ähnlich wie Satz 4.1 beweist man

SATZ 4.2. *Es sei* $z_0 \in \mathscr{Z}$. *Damit* $\varphi(z_0)-\psi(z_0)$ *ein Indikator des zulässigen Funktionals* (z_0^*,f_0^*) *ist, ist es notwendig und, falls* $f_0^*(\psi(\cdot))$ *abgeschlossen ist, auch hinreichend, dass die Ungleichungen*

$$L_2(z,z_0^*) \leqq L_2(z_0,z_0^*) \leqq L_2(z_0,z^*) \tag{24}$$

für alle $z \in X$ *und alle* $z^* \in Z_2^* = \{z^* \mid z^* \in Z^*,\ (z^*,f_0^*) \in {}'Y\}$ *gelten, wobei*

$$L_2(z,z^*) = z^*(z) - f_0^*(\varphi(z)) - {}'\psi(z^*,f_0^*)$$

ist.

Bei Beachtung von Dualitätssatz I, ergibt sich dann aus Satz 4.2 der folgende

SATTELPUNKTSATZ II. *Ist das zulässige Element* z_0 *ein Minimalelement, gibt es ein* $\bar{z} \in \mathscr{Z}$, *das innerer Punkt von* X *oder* Y *ist, und ist die dazugehörige Abbildung* φ *bzw.* $-\psi$ *an dieser Stelle* $\bar{z}$ *nach oben beschränkt, so gibt es ein Maximalfunktional* (z_0^*,f_0^*), *für welches die Ungleichungen* (24) *gelten.*

Umgekehrt: gibt es ein Maximalfunktional (z_0^*,f_0^*), *für welches die Ungleichungen* (24) *gelten, wobei* $z_0 \in \mathscr{Z}$, *und ist* $f_0^*(\psi(\cdot))$ *abgeschlossen, dann ist* z_0 *ein Minimalelement.*

5. Existenzsätze.

Aus Dualitätssatz II folgt, dass es in $\mathscr{Z}$ Minimalelemente gibt, wenn

a) die Existenzbedingung (E) erfüllt ist; und
b) es ein zulässiges Element $\bar{z}$ gibt, das innerer Punkt von X oder Y ist und die dazugehörige Abbildung φ bzw. $-\psi$ an dieser Stelle $\bar{z}$ nach oben beschränkt ist; und
c) es in $\mathscr{Z}'$ Maximalfunktionale gibt.

Der folgende Satz zeigt, dass es in $\mathscr{Z}$ auch unter schwächeren Voraussetzungen Minimalelemente gibt.

EXISTENZSATZ I. *Ist die Existenzbedingung* (E) *erfüllt, und sind die Mengen* $\mathscr{Z}$, $\mathscr{Z}'$ *nicht leer, so gibt es in* $\mathscr{Z}$ *Minimalelemente.*

BEWEIS. Es sei $z \in \mathscr{Z}$ und $(z^*,f^*) \in \mathscr{Z}'$. Das Element $f \in F$ sei ein Indikator von (z^*,f^*) und $f_1 \in F$, $f_1 < \varphi(z)-\psi(z)$, $f_1 < f$. Dann ist

$$[X,\varphi] \cap [Y, \psi+f_1] = \emptyset ,$$

denn im entgegengesetzten Fall würde es ein $z_1 \in \mathscr{X}$ mit

$$\varphi(z_1) - \psi(z_1) \leqq f_1 < f$$

geben, was nach Hilfssatz 2.1 nicht möglich ist.

Es sei $g_1 \in F$, $\varphi(z) - \psi(z) < g_1$. Dann ist

$$[X, \varphi] \cap [Y, \psi + g_1] \neq \emptyset ,$$

denn $(z, \varphi(z))$ ist ein Element dieses Durchschnitts.

Nun konstruieren wir rekursiv für jedes $n \in \omega$ die Elemente

$$f_{n+1} = \begin{cases} f_n & \text{wenn} \quad [X,\varphi] \cap [Y, \psi + \frac{1}{2}(f_n + g_n)] \neq \emptyset , \\ \frac{1}{2}(f_n + g_n) & \text{wenn} \quad [X,\varphi] \cap [Y, \psi + \frac{1}{2}(f_n + g_n)] = \emptyset , \end{cases}$$

$$g_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(f_n + g_n) & \text{wenn} \quad [X,\varphi] \cap [Y, \psi + \frac{1}{2}(f_n + g_n)] \neq \emptyset , \\ g_n & \text{wenn} \quad [X,\varphi] \cap [Y, \psi + \frac{1}{2}(f_n + g_n)] = \emptyset . \end{cases}$$

Man sieht sofort, dass

$$\begin{aligned} f_n &= \alpha_n f_1 + (1 - \alpha_n) g_1, \quad & n \in \omega , \\ g_n &= \beta_n f_1 + (1 - \beta_n) g_1, \quad & n \in \omega , \end{aligned}$$

ist, wobei die reellen Zahlenfolgen $(\alpha_n)_{n \in \omega}$ und $(\beta_n)_{n \in \omega}$ folgende Eigenschaften besitzen:

a) $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_n \geqq \ldots ;$
$\beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \ldots \leqq \beta_n \leqq \ldots ;$

b) $0 \leqq \beta_n < \alpha_n \leqq 1$ für alle $n \in \omega$;

c) $\alpha_n - \beta_n = 2^{-n}$ für alle $n \in \omega$.

Hieraus folgt, dass die beiden Zahlenfolgen einen gemeinsamen Grenzwert γ mit $0 \leqq \gamma \leqq 1$ besitzen und dass $\beta_n \leqq \gamma \leqq \alpha_n$ für alle $n \in \omega$ gilt.

Es sei $f_0 = \gamma f_1 + (1 - \gamma) g_1$. Es können nun zwei Fälle eintreten:

1° Es gibt ein $n_0 \in \omega$, so dass $f_0 = g_{n_0}$ ist. Wegen

$$[X, \varphi] \cap [Y, \psi + g_{n_0}] \neq \emptyset$$

haben wir dann

$$[X, \varphi] \cap [Y, \psi + g] \neq \emptyset \quad \text{für alle } g \in F,\ f_0 < g . \tag{25}$$

2° Für alle $n \in \omega$ haben wir $f_0 \neq g_n$. Trotzdem gilt auch in diesem Fall Beziehung (25). In der Tat, ist $g \in F$, $f_0 < g$, dann gibt es nach (F_1) ein $k \in \omega$, so dass

$$g_1 - f_1 < k(g - f_0) \tag{26}$$

ist. Wir wählen nun ein $n_0 \in \omega$, so dass

$$0 < \gamma - \beta_{n_0} < k^{-1} \tag{27}$$

ist. Aus (26) und (27) ergibt sich dann die Beziehung

$$(\gamma - \beta_{n_0})(g_1 - f_1) < g - f_0 = g - \gamma(f_1 - g_1) - g_1 ,$$

woraus

$$g_{n_0} = \beta_{n_0}(f_1 - g_1) + g_1 < g$$

folgt. Wegen

$$[X,\varphi] \cap [Y,\psi + g_{n_0}] \neq \emptyset$$

ist dann auch

$$[X,\varphi] \cap [Y,\psi + g] \neq \emptyset .$$

Da die Existenzbedingung erfüllt ist, gibt es wegen (25) ein $z_0 \in \mathscr{Z}$ mit

$$\varphi(z_0) - \psi(z_0) \leqq g \quad \text{für alle } g \in F,\ f_0 < g . \tag{28}$$

Wir zeigen nun, dass z_0 ein Minimalelement ist. Dazu nehmen wir an, es gebe ein $h \in F$, $h < \varphi(z_0) - \psi(z_0)$, für welches

$$[X,\varphi] \cap [Y,\psi + h] \neq \emptyset$$

gilt. Dann ist $h_0 = \varphi(z_0) - \psi(z_0) - h + f_0 > f_0$, und wegen (28) haben wir also $\varphi(z_0) - \psi(z_0) \leqq h_0$. Hieraus folgt $h \leqq f_0$. Das Element h kann nicht gleich f_0 sein, denn sonst hätten wir einerseits $f_0 < \varphi(z_0) - \psi(z_0)$ und andererseits wegen (28) die Ungleichung

$$\varphi(z_0) - \psi(z_0) \leqq \tfrac{1}{2}(f_0 + \varphi(z_0) - \psi(z_0)) ,$$

die $\varphi(z_0) - \psi(z_0) \leqq f_0$ zur Folge hätte. Demnach ist $h < f_0$. Man kann nun zeigen, dass es ein $n_1 \in \omega$ gibt, so dass $h < f_{n_1}$ gilt. Da nach Konstruktion der Folge $(f_n)_{n \in \omega}$

$$[X,\varphi] \cap [Y,\psi + f_{n_1}] = \emptyset$$

ist, haben wir auch

$$[X,\varphi] \cap [Y,\psi + h] = \emptyset ,$$

was unserer Annahme widerspricht. Nach Hilfssatz 2.2 ist z_0 ein Minimalelement.

Existenzsatz II. *Es sei $\mathscr{Z}' \neq \emptyset$. Gibt es ein $\bar{z} \in \mathscr{Z}$, das innerer Punkt von X oder Y ist, und ist die dazugehörige Abbildung φ bzw. $-\psi$ an dieser Stelle $\bar{z}$ nach oben beschränkt, so gibt es in $\mathscr{Z}'$ Maximalfunktionale.*

Beweis. Es sei $(z^*, f^*) \in \mathscr{Z}'$ und $f \in F$ ein Indikator dieses Funktionals. Weiterhin sei $f_1 \in F$, $f_1 < f$. Dann ist

$$[X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+f_1)] \neq \emptyset ,$$

denn $(z^*,f^*, \varphi'(z^*,f^*))$ ist ein Element dieses Durchschnitts.

Es sei $g_1 \in F$, $\varphi(\bar{z})-\psi(\bar{z})<g_1$, $f<g_1$. Dann ist

$$[X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+g_1)] = \emptyset ,$$

denn wäre (z_1^*,f_1^*,α) ein Element dieses Durchschnitts, so würde das zulässige Funktional (z_1^*,f_1^*) nach Hilfssatz 2.3 einen Indikator $g \in F$ besitzen, für den

$$\varphi(\bar{z}) - \psi(\bar{z}) < g_1 \leqq g$$

gilt, was nach Hilfssatz 2.1 nicht möglich ist.

Nun konstruieren wir rekursiv für jedes $n \in \omega$ die Elemente

$$f_{n+1} = \begin{cases} f_n & \text{wenn} \quad [X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+\frac{1}{2}(f_n+g_n))] = \emptyset , \\ \frac{1}{2}(f_n+g_n) & \text{wenn} \quad [X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+\frac{1}{2}(f_n+g_n))] \neq \emptyset , \end{cases}$$

$$g_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}(f_n+g_n) & \text{wenn} \quad [X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+\frac{1}{2}(f_n+g_n))] = \emptyset , \\ g_n & \text{wenn} \quad [X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+\frac{1}{2}(f_n+g_n))] \neq \emptyset . \end{cases}$$

Man sieht sofort, dass

$$f_n = \alpha_n f_1 + (1-\alpha_n)g_1, \quad n \in \omega ,$$
$$g_n = \beta_n f_1 + (1-\beta_n)g_1, \quad n \in \omega ,$$

ist, wobei die reellen Zahlenfolgen $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ und $(\beta_n)_{n\in\omega}$, wie vorhin, die Eigenschaften a), b) und c) besitzen. Es sei γ der gemeinsame Grenzwert dieser beiden Zahlenfolgen und $f_0=\gamma f_1+(1-\gamma)g_1$. Dann können auch hier zwei Fälle eintreten:

1° Es gibt ein $n_0 \in \omega$, so dass $f_0=f_{n_0}$ ist. Wegen

$$[X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+f_{n_0})] \neq \emptyset$$

haben wir dann

(29) $$[X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+g)] \neq \emptyset \quad \text{für alle } g \in F,\ g<f_0 .$$

2° Für alle $n \in \omega$ haben wir $f_0 \neq f_n$. Auch in diesem Fall gilt (29). In der Tat, ist $g \in F$, $g<f_0$, so zeigt man zunächst, dass es ein $n_0 \in \omega$ gibt, so dass $g<f_{n_0}$ gilt. Hieraus folgt dann

$$[X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+g)] \neq \emptyset .$$

Durch ähnliche Überlegungen zeigt man, dass

(30) $$[X',\varphi'] \cap ['Y, '(\psi+h)] = \emptyset \quad \text{für alle } h \in F,\ f_0<h$$

gilt.

Nach Korollar 3.2 folgt aus (29), dass

$$[X', \varphi'] \cap ['Y, '(\psi + f_0)] \neq \emptyset$$

ist. Es sei (z_0^*, f_0^*, α) ein Element dieses Durchschnitts. Das zulässige Funktional (z_0^*, f_0^*) besitzt dann nach Hilfssatz 2.3 einen Indikator $h_0 \in F$, für den $f_0 \leqq h_0$ gilt. Es muss $f_0 = h_0$ sein, denn im Falle $f_0 < h_0$ würde

$$(z_0^*, f_0^*, \varphi'(z_0^*, f_0^*)) \in [X', \varphi'] \cap ['Y, '(\psi + h_0)]$$

Beziehung (30) widersprechen.

Wendet man nun Hilfssatz 2.4 an, so ergibt sich aus (30), dass (z_0^*, f_0^*) ein Maximalfunktional ist.

Schlussbemerkung. Die duale Optimierungsaufgabe wurde mit Hilfe der Mengen X' und $'Y$ formuliert. Wie aus den Beweisen dieser Arbeit ersichtlich ist, kann man sich im Falle eines normierten Fundamentalraumes F in der Definition dieser Mengen sowie in den weiteren Ausführungen auf diejenigen Funktionale $f^* \in K_{F^*}^+$ beschränken, für welche $\|f^*\| = 1$ ist. Für $F = R$ erhält man dann genau die beiden Optimierungsaufgaben, welche die anfangs zitierten Autoren behandelt haben.

LITERATUR

1. K. J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa, *Studies in linear and non-linear programming*, Stanford University Press, 1958.
2. A. Brøndsted, *Conjugate convex functions in topological vector spaces*, Mat. Fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 34, nr. 2 (1964).
3. U. Dieter, *Dualität bei konvexen Optimierungs-(Programmierungs-)Aufgaben*, Z. Unternehmensforschung 9 (1965), 91–111.
4. U. Dieter, *Optimierungsaufgaben in topologischen Vektorräumen*. I: *Dualitätstheorie*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 5 (1966), 89–117.
5. W. Fenchel, *Convex cones, sets and functions*, Lecture notes, Princeton University, 1953.
6. G. Köthe, *Topologische lineare Räume* I, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1960.
7. H. W. Kuhn, and A. W. Tucker, *Nonlinear programming*, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, 1951, 481–492.
8. J. J. Moreau, *Fonctions convexes en dualité*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1962.
9. R. T. Rockafellar, *Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions*, Duke Math. J. 33 (1966), 81–90.

MATHEMATIK-MECHANIK-FAKULTÄT DER »BABEŞ-BOLYAI«-UNIVERSITÄT,
CLUJ, RUMÄNIEN