MATH. SCAND. 26 (1970), 42–50

SUR LE PROLONGEMENT DES FONCTIONS AFFINES

N. BOBOC et GH. BUCUR

0.

Soient X un espace compact, H un sous-espace de fonctions continues (réelles, complexes ou quaternioniques) qui contient les fonctions constantes et qui sépare les points de X, F un sous-ensemble fermé de X qui contient la frontière de Choquet de X par rapport à H et H_1 un sous-espace de fonctions continues (réelles, complexes ou quaternioniques) H-affines sur X. Le but de ce travail est de présenter des théorèmes de prolongement d'une fonction H-affine sur F à une fonction de H_1. Nous étendons ainsi un résultat de E. Alfsen [1].

1.

Soient X un espace compact, $\mathscr{C}(X,\mathsf{R})$ l'espace linéaire des fonctions réelles continues sur X et H un sous-espace linéaire de $\mathscr{C}(X,\mathsf{R})$ qui contient les fonctions constantes et qui sépare les points de X. Nous désignerons par $\mathscr{S}_H$ le cône convexe min-stable engendré par H, c'est-à-dire l'ensemble de fonctions continues s sur X pour lesquelles il existe une famille finie $(h_i)_{i\in I}$ d'éléments de H telle que

$$x \in X \ \Rightarrow\ s(x) = \inf\nolimits_{i\in I} h_i(x) \ .$$

Pour toutes deux mesures de Radon positives μ_1, μ_2, sur X nous désignerons par

$$\mu_1 \ll_H \mu_2$$

la relation

$$s \in \mathscr{S}_H \ \Rightarrow\ \mu_1(s) \leqq \mu_2(s) \ .$$

Cette relation est une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathscr{M}_+(X)$ des mesures de Radon positives sur X. Si $x \in X$ et $\mu \in \mathscr{M}_+(X)$, la relation

$$\mu \ll_H \varepsilon_x$$

est équivalente à la relation

$$h \in H \ \Rightarrow\ \mu(h) = h(x) \ .$$

Reçu le 22 février 1966.

Une mesure $\mu \in \mathscr{M}_+(X)$ s'appelle H-minimale (ou simple minimale) s'il n'existe pas des mesures $\nu \in \mathscr{M}_+(X)$, $\nu \neq \mu$, telles que $\nu \ll_H \mu$.

On sait (voir par exemple [3, propositions 1.5 and 1.6]) que l'ensemble de mesures minimales est un sous-cône convexe de $\mathscr{M}_+(X)$ relativement complet et solide par rapport à l'ordre de $\mathscr{M}_+(X)$.

Une mesure de Radon réelle μ s'appelle H-minimale (ou simple minimale) si la mesure positive $|\mu|$ est minimale.

L'ensemble de points $x \in X$ pour lesquels la mesure ε_x est minimale est appelé la frontière de Choquet de X par rapport à H et sera noté par $\partial_H X$.

Soit F un sous-ensemble fermé de X. Une fonction s sur F (finie ou non) sera nommée H-concave si on ait

$$x \in F,\ \mu \ll_H \varepsilon_x,\ \mu(X-F)=0 \ \Rightarrow\ \mu(s) \leqq s(x)\ .$$

(Pour une mesure de Radon positive μ sur un espace compact Y et pour une fonction f sur Y (finie ou non) nous noterons par $\mu(f)$ l'intégrale supérieure de f. Pour tout ensemble $A \subset X$ nous écrirons $\mu(A)$ au lieu de $\mu(\chi_A)$ où χ_A est la fonction caractéristique de A.) Une fonction f sur F (finie ou non) s'appelle H-affine si f et $-f$ sont H-concaves sur F. Nous désignerons par $\mathscr{S}_H{}^*$ le cône convexe de fonctions H-concaves sur X qui sont inférieurement bornées et inférieurement semicontinues. Un ensemble $A \subset X$ est dit H-frontière si la relation suivante est satisfaite:

$$s \in \mathscr{S}_H{}^*,\ s \geqq 0 \text{ sur } A \ \Rightarrow\ s \geqq 0 \text{ sur } X\ .$$

On sait (voir par exemple [3, corollary 2-1]) qu'un ensemble $A \subset X$ est H-frontière si et seulement si on ait $A \supset \partial_H X$, c'est-à-dire que la frontière de Choquet de X par rapport à H est le plus petit ensemble H-frontière.

Puisque (voir par exemple [4], [5]) toute fonction $f \in \mathscr{S}_H{}^*$ est l'enveloppe supérieure d'une famille filtrante croissante de fonctions $f' \in \mathscr{S}_H$, pour qu'un ensemble fermé $F \subset X$ soit H-frontière il faut et il suffit que

$$h \in H,\ h \geqq 0 \text{ sur } F \ \Rightarrow\ h \geqq 0 \text{ sur } X\ .$$

De même il en résulte que pour toutes deux mesures $\mu, \nu \in \mathscr{M}_+(X)$ telles que

$$\mu \ll_H \nu, \quad \mu(X-F) = \nu(X-F) = 0$$

où F est un ensemble fermé, et toute fonction H-concave f sur F inférieurement semicontinue et inférieurement bornée, nous avons $\mu(f) \leqq \nu(f)$.

Soit F un ensemble fermé H-frontière et f une fonction sur F (finie ou non). Nous désignerons par $\bar{Q}_f{}^F$, $\underline{Q}_f{}^F$ les fonctions sur X definies par

$$\bar{Q}_f^F = \inf\{s(x) \mid s \in \mathcal{S}_H^*,\ s \geqq f \text{ sur } F\},$$
$$\underline{Q}_f^F = \sup\{t(x) \mid -t \in \mathcal{S}_H^*,\ t \leqq f \text{ sur } F\}.$$

(Voir H. Bauer [2].) On peut voir que la fonction $\bar{Q}_f^F$ est H-concave, que

$$\underline{Q}_f^F = -\bar{Q}_{-f}^F, \quad \underline{Q}_f^F \leqq \bar{Q}_f^F,$$

et que

$$x \in F \Rightarrow \underline{Q}_f^F(x) \leqq f(x) \leqq \bar{Q}_f^F(x).$$

D'autre part, si la fonction f est supérieurement semicontinue et supérieurement bornée nous aurons

$$\bar{Q}_f^F(x) = \inf\{h(x) \mid h \in H,\ h \geqq f \text{ sur } F\}$$

et la fonction $\bar{Q}_f^F$ sera supérieurement semicontinue.

Nous rappelons le lemme suivant (voir [3, lemme 1-1]):

LEMME. *Soient F un ensemble fermé H-frontière et f une fonction supérieurement semicontinue, supérieurement bornée sur F. Alors pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ nous avons*

$$\mu(\bar{Q}_f^F) = \sup\{\nu(f) \mid \nu \ll_H \mu,\ \nu(X-F)=0\}$$

et il existe une mesure μ_0, $\mu_0 \ll_H \mu$, $\mu(X-F)=0$ telle que

$$\mu(\bar{Q}_f^F) = \mu_0(f).$$

La mesure μ_0 peut être choisie H-minimale si la fonction $-f$ est H-concave sur F.

De ce lemme il résulte en particulier qu'un ensemble fermé F est H-frontière si et seulement si pour tout $x \in X$ il existe $\mu \ll_H \varepsilon_x$ telle que $\mu(X-F)=0$. De même pour tout ensemble fermé H-frontière F, le support de toute mesure H-minimale est contenue dans F.

2.

Soit F un ensemble fermé H-frontière et f une fonction réelle continue, affine sur F. Dans la suite nous donnerons une condition nécessaire et suffisante pour que f peut être prolongée à une fonction réelle affine, continue sur X, ou peut être prolongée à une fonction de H_1, où H_1 est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(X, \mathsf{R})$ de fonctions affines sur X. Nous obtenons ainsi un résultat qui généralise un théorème de E. Alfsen [1].

PROPOSITION 1. *Soient F un ensemble fermé H-frontière et f une fonction réelle continue sur F. Alors f est H-affine sur F si et seulement si*

$$x \in F \ \Rightarrow\ \bar{Q}_f^F(x) = \underline{Q}_f^F(x)\,.$$

DÉMONSTRATION. Si nous avons

$$\bar{Q}_f^F = \underline{Q}_f^F \ \text{sur}\ F\,,$$

alors

$$f = \bar{Q}_f^F = \underline{Q}_f^F \ \text{sur}\ F\,,$$

et il résulte que f est H-affine à cause du fait que $\bar{Q}_f^F$, $\bar{Q}_{-f}^F$ sont H-concaves.

Supposons que f est H-affine sur F. Alors pour tout $x \in F$ il existe une mesure μ_x,

$$\mu_x \ll_H \varepsilon_x, \quad \mu_x(X-F) = 0$$

telle que $\bar{Q}_f^F(x) = \mu_x(f)$. Donc

$$\bar{Q}_f^F(x) = \mu_x(f) = f(x)\,.$$

Puisque $-f$ est aussi H-affine sur F, nous avons

$$x \in F \ \Rightarrow\ \bar{Q}_{-f}^F(x) = -f(x)\,.$$

Donc $\bar{Q}_f^F(x) = \underline{Q}_f^F(x) = f(x)$ pour tout $x \in F$.

La proposition 1 a été obtenue aussi par H. Bauer [2, Satz 4].

THÉORÈME 1. *Soient F un ensemble fermé H-frontière et f une fonction réelle, continue, H-affine sur F. Alors il existe une fonction réelle, continue, H-affine $\tilde{f}$ sur X telle que $\tilde{f}_{|F} = f$ si et seulement si pour tout $x \in X$ et toutes deux mesures H-minimales $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(X)$ telles que*

$$\mu, \nu \ll_H \varepsilon_x$$

on ait

$$\mu(f) = \nu(f)\,.$$

DÉMONSTRATION. La condition est évidemment nécéssaire. Supposons que f satisfait à la condition annoncée. Nous montrerons que $\bar{Q}_f^F = \underline{Q}_f^F$ d'où il résulte que la fonction réelle

$$\tilde{f} = \bar{Q}_f^F = \underline{Q}_f^F$$

est continue, H-affine sur X et égale à f sur F.

Soit $x \in X$. Du lemme il existe deux mesures H-minimales μ', μ'',

$$\mu' \ll_H \varepsilon_x, \quad \mu'' \ll_H \varepsilon_x$$

telles que

$$\bar{Q}_f^F(x) = \mu'(f), \quad \underline{Q}_f^F(x) = \mu''(f).$$

Par hypothèse, nous avons $\mu'(f) = \mu''(f)$. Donc $\bar{Q}_f^F(x) = \underline{Q}_f^F(x)$.

THÉORÈME 2. *Soient F un ensemble fermé H-frontière, f une fonction réelle continue, H-affine sur F et H_1 un sous-espace fermé de $\mathscr{C}(X, \mathsf{R})$ de fonctions H-affines. Alors f peut être prolongée à une fonction de H_1 si et seulement si pour toute mesure (réelle) H-minimale μ la relation*

$$h \in H_1 \Rightarrow \mu(h) = 0$$

implique la relation

$$\mu(f) = 0.$$

DÉMONSTRATION. La condition est évidemment nécessaire.

Soit μ une mesure (réelle) sur F telle que

$$h \in H \Rightarrow \mu(h) = 0.$$

Pour achever la démonstration il suffit de démontrer que $\mu(f) = 0$. Soit $\mu = \mu_+ - \mu_-$. Du lemme il existe deux mesures H-minimales μ_1, μ_2 telles que

$$\mu_1 \preccurlyeq_H \mu_+, \ \mu_2 \preccurlyeq_H \mu_-$$

et telles que

$$\mu_+(\bar{Q}_f^F) = \mu_1(f), \quad \mu_-(\bar{Q}_f^F) = \mu_2(f).$$

Puisque

$$h \in H_1 \Rightarrow \mu_1(h) = \mu_+(h) = \mu_-(h) = \mu_2(h),$$

il résulte que $\mu_1(f) = \mu_2(f)$. En vertu de la proposition 1 nous avons

$$\bar{Q}_f^F = \underline{Q}_f^F = f \quad \text{sur } F.$$

Donc $\mu_+(f) = \mu_-(f)$.

3.

Soient $(X_i)_{i \in I}$ une famille finie d'espaces compacts et $X = \bigoplus_{i \in I} X_i$ la somme topologique de $(X_i)_{i \in I}$. Considérons un sous-espace linéaire H de $\mathscr{C}(X, \mathsf{R})$ qui sépare les points de X et qui contient toute fonction f sur X telle que pour tout $i \in I$ la restriction $f_{|X_i}$ est constante. Pour tout $i \in I$ nous désignerons par H_i le sous-espace linéaire de $\mathscr{C}(X_i, \mathsf{R})$ définie par

$$f \in H_i \Leftrightarrow \exists h \in H, \quad h_{|X_i} = f.$$

On peut remarquer que pour toute mesure $\mu \in \mathscr{M}_+(X)$, tout $i \in I$ tels que $\mu(X_i)=\mu(X)$ et toute mesure $\nu \in \mathscr{M}_+(X)$ la relation $\nu \ll_H \mu$ est équivalente au couple de relations

$$\nu(X_i) = \nu(X), \quad \nu \ll_{H_i} \mu .$$

Il en résulte que pour tout ensemble fermé $F \subset X$, une fonction f sur F est H-concave (resp. H-affine) si et seulement si pour tout $i \in I$ la fonction $f_{|F\cap X_i}$ est H_i-concave (resp. H_i-affine).

De même, un ensemble $A \subset X$ est H-frontière si et seulement si, pour tout $i \in I$, $A \cap X_i$ est H_i-frontière. Donc on a

$$\partial_H X = \oplus_{i\in I} \partial_{H_i} X_i .$$

Puisque chaque fonction de $\mathscr{S}_H{}^*$ (c'est-à-dire une fonction H-concave, inférieurement semicontinue, inférieurement bornée) est l'enveloppe supérieure d'une famille filtrante croissante d'éléments de $\mathscr{S}_H$, nous avons que la relation $\mu \ll_H \nu$ implique la relation

$$s \in \mathscr{S}_H{}^* \Rightarrow \mu(s) \leqq \nu(s) .$$

Donc la relation $\mu \ll_H \nu$ est équivalente à la relation

$$i \in I \Rightarrow \mu_i \ll_{H_i} \nu_i$$

où pour tout $i \in I$, μ_i signifie la restriction de μ à X_i. De ce fait on déduit qu'une mesure $\mu \in \mathscr{M}_+(X)$ est H-minimale si et seulement si pour tout $i \in I$ la mesure $\mu_i = \mu_{|X_i}$ est H_i-minimale.

Soient X un espace compact, C le corp complexe, $\mathscr{C}(X,\mathsf{C})$ l'espace linéaire des fonctions complexes continues sur X et H un sous-espace de $\mathscr{C}(X,\mathsf{C})$ qui contient les constantes et qui sépare les points de X.

Soient $X_1 = X_2 = X$ et $\mathscr{C}(X_1 \oplus X_2, \mathsf{R})$ l'espace des fonctions réelles continues définies sur la somme topologique $X_1 \oplus X_2$. Un élément f de $\mathscr{C}(X_1 \oplus X_2, \mathsf{R})$ sera noté par $f_1 \oplus f_2$ où f_1 (resp. f_2) est la restriction de f à X_1 (resp. X_2).

Une mesure réelle μ sur $X_1 \oplus X_2$ sera notée par $\mu_1 \oplus \mu_2$ où μ_i est la restriction de μ à X_i. Nous noterons par ψ l'application linéaire réelle

$$\psi\colon \mathscr{C}(X,\mathsf{C}) \to \mathscr{C}(X_1 \oplus X_2, \mathsf{R})$$

définie de la manière suivante:

$$f = f_1 + i f_2 \to \psi(f) = f_1 \oplus f_2 ,$$

et par ψ' l'application de l'espace linéaire réel des mesures complexes sur X dans l'espace de mesures réelles sur $X_1 \oplus X_2$ définie de la manière suivante:

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2 \to \psi'(\mu) = \mu_1 \oplus (-\mu_2) .$$

L'ensemble $\psi(H)$ est un sous-espace réel de $\mathscr{C}(X_1 \oplus X_2, \mathsf{R})$ tel que

$$f_1 \oplus f_2 \in \psi(H) \Rightarrow (-f_2) \oplus f_1 \in \psi(H).$$

Une fonction $f \in \mathscr{C}(F, \mathsf{C})$ où F est un sous-ensemble fermé de X s'appelle H-affine si la fonction $\psi(f)$ est $\psi(H)$-affine sur la somme topologique $F \oplus F$. On voit tout de suite que $f = f_1 + i f_2$ est H-affine sur F si et seulement si f_1, f_2 sont $(\mathrm{Re}\, H)$-affines sur F.

Une mesure complexe μ s'appelle H-minimale si la mesure $\psi'(\mu)$ est $\psi(H)$-minimale. Évidemment $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ est H-minimale si et seulement si les mesures μ_1, μ_2 sont $(\mathrm{Re}\, H)$-minimales.

L'ensemble des points $x \in X$ tels que ε_x est H-minimale s'appelle la frontière de Choquet de X par rapport à H. Un ensemble $A \subset X$ est dit H-frontière si la somme topologique $A \oplus A$ est $\psi(H)$-frontière. On voit qu'un ensemble $F \subset X$ fermé est H-frontière si et seulement si pour tout $h \in H$ on a

$$\sup_{x \in X} |h(x)| = \sup_{x \in F} |h(x)|.$$

De la définition d'une mesure H-minimale il en résulte que son support est contenu dans tout ensemble fermé H-frontière.

Soit H_1 un espace linéaire complexe de fonctions continues H-affines sur X. Puisque

$$f_1 \oplus f_2 \in \psi(H_1) \Rightarrow (-f_2) \oplus f_1 \in \psi(H_1),$$

une mesure complexe μ s'annule sur H_1 si et seulement si la mesure réelle $\psi'(\mu)$ s'annule sur $\psi(H_1)$.

THÉORÈME 3. *Soient F un ensemble fermé H-frontière, f une fonction H-affine sur F et H_1 un sous-espace complexe fermé de $\mathscr{C}(X, \mathsf{C})$ de fonctions H-affines sur X. Alors f peut être prolonger à une fonction de H_1 si et seulement si pour toute mesure complexe μ, H-minimale, la relation*

$$h \in H_1 \Rightarrow \mu(h) = 0$$

implique la relation

$$\mu(f) = 0.$$

DÉMONSTRATION. L'assertion résulte des considérations précédentes et du théorème 2.

Soient X un espace compact, K le corp des quaternions, $\mathscr{C}(X, \mathsf{K})$ l'espace linéaire sur K des fonctions continues sur X à valeurs dans K et H un sous-espace de $\mathscr{C}(X, \mathsf{K})$ que contient les fonctions constantes et qui sépare les points de X

Soient $X_0 = X_1 = X_2 = X_3 = X$ et $\mathscr{C}(\oplus_{e=0}^{3} X_e, \mathsf{R})$ l'espace des fonctions réelles continues définies sur la somme topologique $\oplus_{e=0}^{3} X_e$. Un élément f de $\mathscr{C}(\oplus_{e=0}^{3} X_e, \mathsf{R})$ sera noté par $\oplus_{e=0}^{3} f_e$ où f_e est la restriction de f à X_e. Nous désignerons par ψ l'application linéaire réelle

$$\psi\colon\ \mathscr{C}(X,\mathsf{K}) \to \mathscr{C}(\oplus_{e=0}^{3} X_e, \mathsf{R})$$

définie de la manière suivante:

$$f = f_0 + if_1 + jf_2 + kf_3 \to \psi(f) = \oplus_{e=0}^{3} f_e\,,$$

et par ψ' l'application de l'espace linéaire réel des mesures quaternioniques sur X dans l'espace des mesures réelles sur $\oplus_{e=0}^{3} X_e$ définie de la manière suivante:

$$\mu = \mu_0 + i\mu_1 + j\mu_2 + k\mu_3 \to \psi'(\mu) = (-\mu_0)\oplus\mu_1\oplus\mu_2\oplus\mu_3\,.$$

Une fonction $f \in \mathscr{C}(F,\mathsf{K})$ où F est un ensemble fermé de X s'appelle H-affine si la fonction $\psi(f)$ est $\psi(H)$-affine sur la somme topologique $F\oplus F\oplus F\oplus F$. Evidemment $f \in \mathscr{C}(F,\mathsf{K})$ est H-affine sur F si et seulement si pour toute mesure $\mu \in \mathscr{M}_+(F)$ et tout $x \in F$ la relation

$$h \in H \ \Rightarrow\ \mu(h) = h(x)$$

implique la relation $\mu(f) = f(x)$.

Une mesure quaternionique μ sur X s'appelle H-minimale si la mesure $\psi'(\mu)$ est $\psi(H)$-minimale. Si $x \in X$, la mesure ε_x est H-minimale si et seulement si pour tout mesure $\mu \in \mathscr{M}_+(X)$ la relation

$$h \in H \ \Rightarrow\ \mu(h) = h(x)$$

implique $\mu = \varepsilon_x$. L'ensemble des points $x \in X$ tels que la mesure ε_x est H-minimale s'appelle la frontière de Choquet de X par rapport à H.

Un ensemble $A \subset X$ est dit H-frontière si la somme topologique $A\oplus A\oplus A\oplus A$ est $\psi(H)$-frontière. De la définition d'une mesure H-minimale il en résulte que son support est contenu dans tout ensemble fermé H-frontière.

Soit H_1 un sous-espace fermé de $\mathscr{C}(X,\mathsf{K})$ de fonctions H-affines sur X. Puisque

$$f_0\oplus f_1\oplus f_2\oplus f_3 \in \psi(H_1) \ \Rightarrow\ \begin{cases} f_1\oplus(-f_0)\oplus f_3\oplus(-f_2) \in \psi(H_1)\,, \\ f_2\oplus(-f_3)\oplus(-f_0)\oplus f_1 \in \psi(H_1)\,, \\ f_3\oplus f_2\oplus(-f_1)\oplus(-f_0) \in \psi(H_1)\,, \end{cases}$$

on déduit qu'une mesure quaternionique μ sur X s'annulle sur H_1 si et seulement si la mesure réelle $\psi'(\mu)$ s'annule sur $\psi(H_1)$.

Théorème 4. *Soient F un ensemble fermé H-frontière, f une fonction H-affine sur F et H_1 un sous-espace fermé de $\mathscr{C}(X,\mathsf{K})$ de fonctions H-affines* *sur X. Alors f peut être prolongèe à une fonction de H_1 si et seulement si pour toute mesure quaternionique μ, H-minimale, la relation*

$$h \in H_1 \Rightarrow \mu(h) = 0$$

implique la relation

$$\mu(f) = 0 .$$

L'assertion résulte des considérations précédentes et du théorème 2.

Remarque. Les théorèmes 2 et 3 généralisent les résultats de E. Alfsen [1] puisque pour chaque mesure minimale, la complémentaire de la frontière de Choquet a la mesure intérieure (Baire) égale à zero (voir par exemple [2, Satz 2 und Satz 3]).

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Alfsen, *On the Dirichlet problem of the Choquet boundary*, Acta Math. 120 (1968), 149–159.
2. H. Bauer, *Šilovscher Rand und Dirichletsches Problem*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 11 (1961), 89–136.
3. N. Boboc et A. Cornea, *Convex cones of lower semicontinuous functions on compact spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 12 (1967), 471–525.
4. D. A. Edwards, *Minimum stable wedges of semi-continuous functions*, Math. Scand. 19 (1966), 15–26.
5. G. Mokobodski, *Quelques propriétés des fonctions numériques convexes sur un ensemble convexe compact*, Seminaire Brelot–Choquet–Deny de la theorie du potentiel, 6e Année (1961/62), Exposé no. 9, pp. 3.

INSTITUT DE MATHÊMATIQUE
ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE SOCIALISTE DE ROUMANIE, BUCAREST