MATH. SCAND. 26 (1970), 51–61

DISTRIBUTIONEN AUF RÄUMEN VOM TYP $\mathscr{S}$ IN DER QUANTENFELDTHEORIE

JÜRGEN SCHEIBA

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Beispielen zu [6], und zwar mit Räumen, die in engem Zusammenhang mit dem Schwartzschen Raum $\mathscr{S}$ stehen.

Als erstes Beispiel wird "der" Raum $\mathscr{S}^\infty$ in Analogie zu den Schwartzschen Räumen $\mathscr{S}^n$, $n=1,2,\ldots$, untersucht, gemäß der Charakterisierung von $\mathscr{S}^n$ als Durchschnitt der Definitionsbereiche aller Polynome in den selbstadjungierten linearen Transformationen $P_k=-i\,\partial/\partial\mathscr{X}_k$ und $Q_k=\mathscr{X}_k\cdot$, $k=1,\ldots,n$, des $L^2(\mathsf{R}^n)$.

Weiterhin wird gezeigt, daß der von Kristensen, Mejlbo und Poulsen [5] als maximaler Raum vom Typ $\mathfrak{S}$ bezeichnete topologische Vektorraum $\tilde{\mathfrak{S}}$ und ein weiterer von den genannten Autoren in [5] (Teil IV) untersuchter Raum $\hat{\mathfrak{S}}$ in den in [6] behandelten Rahmen gehört, so daß also alle Ergebnisse aus [6] zur Verfügung stehen. Das hat u.a. zur Folge, daß sich in einfacher Art und Weise wichtige Abschätzungen für gewisse Operatoren ergeben, die in [5] mit ganz anderen Methoden untersucht wurden.

Mein Dank gilt Herrn Professor Tillmann für seine Anregungen und Herrn Professor Poulsen für eine Einladung nach Aarhus, wo ein Teil der Arbeit entstanden ist.

1. Distributionen in unendlich vielen Veränderlichen.

Die Bezeichnungen sind im folgenden dieselben wie in [6]. Wir betrachten in diesem Paragraphen einen speziellen Raum $\mathscr{R}(S)$ (siehe [6]), und zwar wählen wir für $S=(a_n^{(m,k)})$, $a_n^{(m,k)}=(1+n)^m$, unabhängig von k. Der zugehörige Raum $\mathscr{R}(S)\subset\mathscr{H}_0$ wird im folgenden mit $\mathfrak{S}$ bezeichnet; entsprechend sei $\mathfrak{S}^{(m)}=\mathscr{R}(S)^{(m)}$. Für alle k ist hier $\lambda^{(k)}=\lambda$ der Folgenraum (s), der dem Schwartzschen Raum $\mathscr{S}$ auf R isomorph ist. $\mathfrak{S}$ wird dann durch die Normen

Eingegangen am 6. März 1969.

$$\|f\|_m = \left(\int\limits_X \Pi_{k=0}^{m}(1+\alpha_k)^m \, \|f(\alpha)\|^2 \, d\mu(\alpha)\right)^{\frac{1}{2}}$$

definiert und topologisiert. Ein äquivalentes Normensystem ist dasjenige der

$$|||f|||_m = \left(\int\limits_X (1+\alpha_0+ \ldots +\alpha_m)^m \, \|f(\alpha)\|^2 \, d\mu(\alpha)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß — analog zur Situation $\mathscr{S} \subset L^2(\mathsf{R})$, $P = -i\,d/d\mathfrak{X}$, $Q = \mathfrak{X}\cdot$ — $\mathfrak{S}$ der größte unter gewissen selbstadjungierten linearen Transformationen P_k, Q_k, $k \in N$, invariante lineare Teilraum von $\mathscr{H}_0$ ist, wobei die P_k, Q_k die quantenmechanischen Vertauschungsrelationen erfüllen (siehe Gårding–Wightman [2]). Die Operatoren P_k, Q_k sind die selbstadjungierten Abschließungen folgender linearer Transformationen p_k, q_k:

$$(p_k f)(\alpha) = 2^{-\frac{1}{2}}\left((\alpha_k+1)^{\frac{1}{2}} c_k(\alpha)\left(\frac{d\mu(\alpha+\delta_k)}{d\mu(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} f(\alpha+\delta_k) + \right.$$
$$\left. + \,(\alpha_k)^{\frac{1}{2}} c_k(\alpha-\delta_k)^{-1}\left(\frac{d\mu(\alpha-\delta_k)}{d\mu(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} f(\alpha-\delta_k)\right)$$

$$(q_k f)(\alpha) = i\,2^{-\frac{1}{2}}\left((\alpha_k+1)^{\frac{1}{2}} c_k(\alpha)\left(\frac{d\mu(\alpha+\delta_k)}{d\mu(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} f(\alpha+\delta_k) - \right.$$
$$\left. - \,(\alpha_k)^{\frac{1}{2}} c_k(\alpha-\delta_k)^{-1}\left(\frac{d\mu(\alpha-\delta_k)}{d\mu(\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} f(\alpha-\delta_k)\right)$$

mit dem gemeinsamen dichten Definitionsbereich aller $f \in \mathscr{H}_0$, für welche $\int_X \alpha_k \|f(\alpha)\|^2 d\mu(\alpha) < +\infty$; letztere Vektorfelder bilden den genauen Durchschnitt der Definitionsbereiche von P_k und Q_k.

Wir formulieren zunächst zwei Hilfssätze.

Lemma 1.1. *Der Definitionsbereich $\mathscr{D}_{kn}$ von $(P_k+iQ_k)^n$ ist derselbe wie der von $(P_k-iQ_k)^n$ und besteht aus allen $f \in \mathscr{H}_0$, für die*

$$\int\limits_X \alpha_k{}^n \, \|f(\alpha)\|^2 \, d\mu(\alpha) < +\infty .$$

P_k und Q_k bilden $\mathscr{D}_{k.n+1}$ in $\mathscr{D}_{k,n}$ ab. Es gilt ferner

$$\mathscr{D}_{k,n+1} = P_k{}^{-1}(\mathscr{D}_{k,n}) \cap Q_k{}^{-1}(\mathscr{D}_{k,n}) .$$

Der dichte lineare Teilraum $\mathscr{D}_k = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathscr{D}_{k,n}$ von $\mathscr{H}_0$ ist der Durchschnitt *der Definitionsbereiche aller Polynome in den beiden Transformationen* P_k *und* Q_k *(ist also der größte unter* P_k, Q_k *invariante lineare Teilraum von* $\mathscr{H}_0$*).*

Der Beweis ergibt sich durch Induktion nach n.

Lemma 1.2. *Der dichte lineare Teilraum* $\mathscr{D}^{(m)} = \bigcap_{k=0}^{m} \mathscr{D}_k$ *von* $\mathscr{H}_0$ *besteht aus allen messbaren Vektorfeldern* f, *für die*

$$\|f\|_{m,r}^2 = \int_X (1+\alpha_0+\ldots+\alpha_m)^r \, \|f(\alpha)\|^2 \, d\mu(\alpha) < +\infty$$

für alle $r \in N$. *Der Teilraum* $\mathscr{D}^{(m)}$ *stimmt mit dem Durchschnitt der Definitionsbereiche aller Polynome in* $P_0, Q_0, \ldots, P_m, Q_m$ *— dem größten unter* $P_0, Q_0, \ldots, P_m, Q_m$ *invarianten linearen Teilraum von* $\mathscr{H}_0$ *— überein.*

Beweis. Die Invarianz von $\mathscr{D}^{(m)}$ unter $P_0, Q_0, \ldots, P_m, Q_m$ ergibt sich in einfacher Weise daraus, daß $P_k(\mathscr{D}_k \cap \mathscr{D}_j) \subset \mathscr{D}_j$ und $Q_k(\mathscr{D}_k \cap \mathscr{D}_j) \subset \mathscr{D}_j$ für alle $j, k = 0, \ldots, m$. Nach Lemma 1.1 ist dann $\mathscr{D}^{(m)}$ der Durchschnitt der Definitionsbereiche aller Polynome in $P_0, \ldots, Q_m$.

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich nun, daß $\mathfrak{S} = \bigcap_m \mathscr{D}^{(m)} = \bigcap_k \mathscr{D}_k$ der größte unter allen P_k, Q_k invariante lineare Teilraum von $\mathscr{H}_0$ ist. Man überzeugt sich ferner leicht, daß die Einschränkungen von P_0, $Q_0, \ldots, P_m, Q_m$ auf $\mathscr{D}^{(m)}$ in der durch die Familie der Normen $\|\cdot\|_{m,r}$, $r \in N$, auf $\mathscr{D}^{(m)}$ definierten lokal konvexen Topologie stetig sind; es gilt nämlich

$$\|P_k f\|_{m,r}^2 \leqq 2^{r+1} \|f\|_{m,r+1}^2$$

für P_k und ganz analog für Q_k. Folglich sind die Einschränkungen von allen P_k, Q_k auf $\mathfrak{S}$ stetig in der früher beschriebenen Topologie von $\mathfrak{S}$.

Theorem 1.1 aus § 1 von [6] gibt uns die Möglichkeit eines anderen Zugangs und darüber hinaus eine Handhabe zur Konstruktion weiterer stetiger Endomorphismen von $\mathfrak{S}$, ausgehend von solchen von $\mathscr{S}$. Durch Auszeichnung der Basis (Φ_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$, der Hermiteschen Funktionen $\Phi_n \in \mathscr{S}$

$$\Phi_n(\mathscr{X}) = (-i)^n (2^n n! \pi^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\mathscr{X}^2} H_n(\mathscr{X})$$

mit $H_n(\mathscr{X}) = e^{\mathscr{X}^2} (d/d\mathscr{X})^n e^{-\mathscr{X}^2}$ ist $\mathscr{S}$ vermöge des Isomorphismus I

$$\mathscr{S} \ni \varphi \to ((\varphi|\Phi_n))_n \quad \text{mit} \quad (\varphi|\Phi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathscr{X}) \overline{\Phi_n(\mathscr{X})} \, d\mathscr{X}$$

zum Folgenraum (s) isomorph, so daß $I\Phi_n = e_n = (\delta_{kn})_k$. Für $\boldsymbol{P} = -i\, d/d\mathscr{X}$ und $\boldsymbol{Q} = \mathscr{X}\cdot$ gilt:

$$\boldsymbol{P}\Phi_n = 2^{-\frac{1}{2}}\big((n+1)^{\frac{1}{2}}\Phi_{n+1} + n^{\frac{1}{2}}\Phi_{n-1}\big)\,,$$
$$\boldsymbol{Q}\Phi_n = 2^{-\frac{1}{2}}\big((n+1)^{\frac{1}{2}}\Phi_{n+1} - n^{\frac{1}{2}}\Phi_{n-1}\big)\,.$$

$\boldsymbol{P}\,|\,\mathscr{S}$ und $\boldsymbol{Q}\,|\,\mathscr{S}$ entsprechen hierbei in (s) also Operatoren p und q, deren zugeordnete Matrizen aus der Algebra $\Sigma((s))$ wir ebenfalls mit p und q bezeichnen wollen. Mit den Bezeichnungen von [6, Theorem 1.1] gilt dann

$$p^{(k)} = P_k\,|\,\mathfrak{S}, \quad q^{(k)} = Q_k\,|\,\mathfrak{S} \qquad \text{für alle } k \in N\,.$$

Sei $A_k = 2^{-\frac{1}{2}}(P_k - iQ_k)$. Nach Dixmier [1] gilt dann $A_k{}^* = 2^{-\frac{1}{2}}(P_k + iQ_k)$ und $A_k = A_k{}^{**}$ (*-Bildung für lineare Transformationen in $\mathscr{H}_0$). $A_k = U_k(A_k{}^*A_k)^{\frac{1}{2}} = (A_kA_k{}^*)^{\frac{1}{2}}\,U_k$ sei die Polarzerlegung von A_k in $\mathscr{H}_0$ mit $U_kU_k{}^* = \mathbf{1}$, $U_k{}^*U_k =$ orthogonale Projektion von $\mathscr{H}_0$ auf $\mathscr{H}_0 \ominus \operatorname{Ker} A_k$. Dann folgt mit Hilfe von [6, Theorem 1.1], daß die Einschränkungen all dieser Operatoren auf $\mathfrak{S}$ zu $\mathscr{L}(\mathfrak{S})$ gehören, da sie sich als Bilder von einfach zu findenden Matrizen $\in \Sigma((s))$ unter dem in [6] beschriebenen Homomorphismus $A \to A^{(k)}$ ergeben.

Wir fassen zusammen:

THEOREM 1.1. *Der Raum $\mathfrak{S}$ ist der größte unter allen selbstadjungierten linearen Transformationen P_k, Q_k, $k \in N$, von $\mathscr{H}_0$ invariante Teilraum von $\mathscr{H}_0$. Die Einschränkungen*

$$P_k\,|\,\mathfrak{S} = (I(\boldsymbol{P}\,|\,\mathscr{S})I^{-1})^{(k)} \quad \textit{und} \quad Q_k\,|\,\mathfrak{S} = (I(\boldsymbol{Q}\,|\,\mathscr{S})I^{-1})^{(k)}\,,$$

$k \in N$, gehören zu $\mathscr{L}(\mathfrak{S})$. Die Topologie von $\mathfrak{S}$ ist die gröbste Topologie auf $\mathfrak{S}$, für die alle Polynome in $P_k\,|\,\mathfrak{S}$, $Q_k\,|\,\mathfrak{S}$, $k \in N$, stetige Abbildungen von $\mathfrak{S}$ in $\mathscr{H}_0$ sind.

Lediglich die letzte Aussage bedarf noch eines Beweises. Diese ergibt sich daraus, daß $\mathfrak{S}$ stetig in $\mathscr{H}_0$ eingebettet ist und die Normen

$$\|f\|_{k,m} = \|(P_k{}^2 + Q_k{}^2 + \mathbf{1})^m f\| = 2^m \Big(\int_X (1+\alpha_k)^{2m}\, \|f(\alpha)\|^2\, d\mu(\alpha)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

auf $\mathfrak{S}$ dieselbe Topologie erzeugen wie die Normen $\|.\|_m$.

In topologischer Hinsicht liegen die Verhältnisse bei $\mathfrak{S}$ in einem wesentlichen Punkt anders als bei $\mathscr{S}$, während nämlich $\mathscr{S}$ ein nuklearer Raum ist, kann von $\mathfrak{S}$, wie wir an einem Beispiel jetzt zeigen wollen, nicht einmal behauptet werden, $\mathfrak{S}$ sei ein Montelraum.

Z sei die Menge aller $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots) \in X$ mit nur endlich vielen $\alpha_k \neq 0$. Da alle auf Z konzentrierten diskreten Maße μ mit $\mu(\{\alpha\}) > 0$ für alle $\alpha \in Z$ quasiinvariant und äquivalent sind, nehmen wir an, daß $\mu(\{\alpha\}) = 1$ für alle $\alpha \in Z$ und $\mu(\{\alpha\}) = 0$ für alle $\alpha \notin Z$. Alle $H(\alpha)$ seien eindimensional, gleich $\mathbf{C}$, so daß also $\mathscr{H}_0 = l^2(Z)$. Der Raum $\mathfrak{S}$ besteht aus allen f, für die für alle m

$$\|f\|_m^2 = \sum_{\alpha \in Z} (1+\alpha_0+\ldots+\alpha_m)^m \, |f(\alpha)|^2 < +\infty .$$

$\mathfrak{S}$ ist also der gestufte Raum 2. Ordnung zu den Stufen $a^{(0)} \leqq a^{(1)} \leqq \ldots$ mit

$$a^{(m)} = (a_\alpha^{(m)})_{\alpha \in Z} ,$$

$$a_\alpha^{(m)} = (1+\alpha_0+\ldots+\alpha_m)^m .$$

Mit $\alpha(j) = (\delta_{kj})_k \in Z$ gilt dann

$$0 < a_{\alpha(j)}^{(m)} \leqq 2^m a_{\alpha(j)}^{(0)}$$

für alle j und m. Nach Köthe [4, S. 424] ist $\mathfrak{S}$ folglich kein Montel-Raum.

Im folgenden sei angenommen, daß $\mathfrak{S}$ in $\mathscr{H}_0$ dicht ist. Wir wollen die verallgemeinerten Eigenvektoren von $P_k \,|\, \mathfrak{S} = p^{(k)}$ und $Q_k \,|\, \mathfrak{S} = q^{(k)}$ bestimmen, d.h. die Eigenvektoren von $(P_k \,|\, \mathfrak{S})^*, (Q_k \,|\, \mathfrak{S})^* \in \mathscr{L}(\mathfrak{S}^\times)$. Nun gilt aber nach [6], daß

$$(P_k \,|\, \mathfrak{S})^* = p^{*[k]} = p^{[k]} \quad \text{und} \quad (Q_k \,|\, \mathfrak{S})^* = q^{[k]} ,$$

d.h. $(P_k \,|\, \mathfrak{S})^*$ bzw. $(Q_k \,|\, \mathfrak{S})^*$ werden durch dieselben Formeln wie $P_k \,|\, \mathfrak{S}$ bzw. $Q_k \,|\, \mathfrak{S}$ beschrieben. Satz 2.2, S. 332 in [6], liefert (vgl. die Folgerung aus Satz 1.1, S. 326 in [6]) zu gegebenem Eigenwert ε von p^* bzw. q^* Eigenvektoren von $(P_k \,|\, \mathfrak{S})^*$ bzw. $(Q_k \,|\, \mathfrak{S})^*$ zum gleichen Eigenwert ε. Die Eigenvektoren des Differentiationsoperators und des Multiplikationsoperators in $\mathscr{S}'$ sind bekanntlich $\exp(i\varepsilon\mathscr{X})$ und $\delta(\mathscr{X}-\varepsilon)$, womit sich leicht die benötigten Eigenvektoren von p^* und q^* in $(s)^\times$ ergeben, ausgedrückt mit Hilfe der Hermiteschen Funktionen. Man zeigt nun, daß die nach dem oben erwähnten Verfahren konstruierten Räume von Eigenvektoren der Operatoren $(P_k \,|\, \mathfrak{S})^*$ und $(Q_k \,|\, \mathfrak{S})^*$ bereits die vollen Eigenräume sind. Entsprechendes gilt für die Operatoren $(U_k \,|\, \mathfrak{S})^*$, $(U_k{}^* \,|\, \mathfrak{S})^*$ und $(A_k{}^* \,|\, \mathfrak{S})^*$.

2. Weitere Grundräume.

S sei wie in [6, § 1], jedoch mit der Zusatzbedingung $a_0{}^{(m,k)} = 1$ für alle m, k, und μ sei ein auf der Menge $Z \subset X$ aller $\alpha = (\alpha_k)_k \in X$, bei denen $\alpha_k \neq 0$ für nur endlich viele k, konzentriertes diskretes Maß auf X, für das $\mu(\{\alpha\}) > 0$ für alle $\alpha \in Z$.

Offenbar ist μ quasiinvariant. Wir setzen

$$\begin{aligned} \Psi_{m,\infty}(\alpha) &= \textstyle\prod_{k=0}^{\infty} a_{\alpha_k}^{(m,k)} && \text{falls } \alpha \in Z , \\ &= 0 && \text{sonst} . \end{aligned}$$

Mit $\mathscr{R}_0(S)$ bezeichnen wir die Menge aller $f=(f(\alpha))_{\alpha\in Z}$ mit $f(\alpha)\in H(\alpha)$, für die

$$\|f\|^2_{m,\infty} = \int_Z \Psi_{m,\infty}(\alpha)\, \|f(\alpha)\|^2\, d\mu(\alpha) \;<\; +\infty$$

für alle $m\in N$. Der Raum $\mathscr{R}_0(S)$ ist dann in der durch die Hilbert-Normen $\|.\|_{m,\infty}$ gegebenen lokal konvexen Topologie ein in $\mathscr{R}(S)\subset\mathscr{H}_0$ stetig eingebetteter (F)-Raum. Es gilt

$$\mathscr{R}_0(S) \subset \mathscr{R}(S) \subset \mathscr{H}_0 = \mathscr{H}_0{}^\times \subset \mathscr{R}(S)^\times \subset \mathscr{R}_0(S)^\times .$$

Setzen wir zum Beispiel

$$a_n^{(m,k)} = (2+k)^{mn},$$

so erhalten wir in $\mathscr{R}_0(S)$ — falls $\mu(\{\alpha\})=1$ für alle $\alpha\in Z$ — einen von Kristensen–Mejlbo–Poulsen [5] in Teil IV betrachteten Raum, der hier mit $\mathfrak{S}_4$ bezeichnet sei. In diesem Beispiel fallen alle $\lambda^{(k)}$ zusammen und sind isomorph zu $\mathscr{H}(\mathsf{C})$, dem Raum der holomorphen Funktionen auf C, durch die Zuordnung

$$\lambda = \lambda^{(k)} \ni x = (x_n)_n \to \left(z\to x(z)=\textstyle\sum_{n=0}^\infty x_n z^n\right) \in \mathscr{H}(\mathsf{C})$$

(siehe Köthe [4, S. 424]). Der für $a_n^{(m,k)}=(1+n)^m$ sich ergebende Raum $\mathscr{R}_0(S)$ heiße $\mathfrak{S}_3$; in diesem Fall sind alle $\lambda^{(k)}$ mit (s) identisch.

In $\mathfrak{S}_3$ bzw. $\mathfrak{S}_4$ bezeichnen wir $\|.\|_{m,\infty}$ mit $|||.|||_{m,3}$ bzw. $|||.|||_{m,4}$. Wir setzen ferner

$$\mathfrak{S}_2 = \{f=(f(\alpha))_{\alpha\in Z} \mid (\forall m)\; |||f|||^2_{m,2} = \textstyle\sum_{\alpha\in Z}(1+\alpha_0+2\alpha_1+3\alpha_2+\dots)^m\|f(\alpha)\|^2 < +\infty\},$$

$$\mathfrak{S}_1 = \{f=(f(\alpha))_{\alpha\in Z} \mid (\forall m)\, |||f|||^2_{m,1} = \textstyle\sum_{\alpha\in Z}(1+\alpha_0+\alpha_1+\dots)^m\|f(\alpha)\|^2 < +\infty\}.$$

Der Raum $\mathfrak{S}_2$ wurde von Kristensen-Mejlbo-Poulsen [5] in anderer Realisierung untersucht, und zwar handlet es sich dabei um den sogenannten »maximalen Raum vom Typ $\mathfrak{S}$«.

Wir wollen nun zeigen, daß für die eben genannten Räume die Bemerkung zu Theorem 1.1 in [6] zutrifft, so daß also die Ergebnisse aus [6] anwendbar sind. Für $\mathscr{R}_0(S)$ folgt dies, da

$$\psi_{m,\infty}(\alpha+n\delta_k) = a_n^{(m,k)}\psi_{m,\infty}(\alpha),$$

falls $\alpha\in X_{k0}\cap Z$ und m,k beliebig. Für $\mathfrak{S}_1$ and $\mathfrak{S}_2$ ergibt sich dies aus folgenden Ungleichungen für

$$\varphi_m(\alpha) = (1+\alpha_0+\alpha_1+\dots)^m$$

und

$$\tau_m(\alpha) = (1+\alpha_0+2\alpha_1+3\alpha_2+\ldots)^m ,$$

wo $\alpha \in Z$:

$$2^{-m}(1+n)^m\varphi_m(\alpha) \leqq \varphi_{2m}(\alpha+n\delta_k) ,$$
$$\varphi_m(\alpha+n\delta_k) \leqq 2^m(1+n)^m\varphi_m(\alpha) ,$$
$$2^{-m}(1+n)^m\tau_m(\alpha) \leqq \tau_{2m}(\alpha+n\delta_k) ,$$
$$\tau_m(\alpha+n\delta_k) \leqq (1+k)^m 2^m(1+n)^m\tau_m(\alpha)$$

für alle $\alpha \in X_{k0} \cap Z$ und alle m,k. Die Räume $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ gehören also zu $S=(a_n^{(m,k)})$ mit $a_n^{(m,k)}=(1+n)^m$. Daher ergeben sich aus

$$\|Ax\|_{m_1} \leqq C\|x\|_{m_2}$$

für alle $x \in (s)$ $[A \in \Sigma((s)),\ \|x\|_m{}^2=\sum_n(1+n)^m|x_n|^2,\ m_1 \leqq m_2]$ folgende Ungleichungen für alle $k \in N$:

$$|||A^{(k)}f|||_{m_1,r} \leqq C'\,|||f|||_{m_3,r}, \quad r = 1,3 ,$$

für $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_3$ und

$$|||A^{(k)}f|||_{m_1,2} \leqq C'\,(1+k)^{\frac{1}{2}m_1}\,|||f|||_{m_3,2}$$

für $\mathfrak{S}_2$ mit jeweils von k unabhängigem m_3 und C'.

Sind die Φ_k die früher eingeführten Hermiteschen Funktionen, so folgt mit Hilfe dieser Ungleichungen

Satz 2.1. *Zu jedem stetigen Endomorphismus A des Schwartzschen Raumes $\mathscr{S}$ existiert eine operatorwertige Distribution*

$$\mathscr{S} \ni \varphi \to A[\varphi] \in \mathscr{L}(\mathfrak{S}_j), \quad j=1,2,3 ,$$

so daß $A[\Phi_k]=A^{(k)}$ für alle k bei Identifizierung von $\mathscr{L}(\mathscr{S})$ mit $\Sigma((s))$ bezüglich der Φ_k.

Die Abbildung $A[.]$ ist eine stetige lineare Abbildung von $\mathscr{S}$ in $\mathscr{L}_b(\mathfrak{S}_j)$.

Für $P=-i\,d/d\mathscr{X}$ und $Q=\mathscr{X}\cdot$ aus $\mathscr{L}(\mathscr{S})$ gilt

$$i\big[P[\varphi],Q[\psi^*]\big]_- = (\varphi\,|\,\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathscr{X})\overline{\psi(\mathscr{X})}\,d\mathscr{X} ,$$
$$\big[P[\varphi],P[\psi]\big]_- = 0 ,$$
$$\big[Q[\varphi],Q[\psi]\big]_- = 0 ,$$

für alle $\varphi,\psi \in \mathscr{S}$, wobei $\psi^*(\mathscr{X})=\overline{\psi(-\mathscr{X})}$.

Es gilt $P[\Phi_k]=P_k\,|\,\mathfrak{S}_j$, $Q[\Phi_k]=Q_k\,|\,\mathfrak{S}_j$ für alle k.

Wir bemerken, daß $\Phi_k{}^*=\Phi_k$ für alle k.

Beweis. Wir identifizieren $\mathscr{S}$ mit (s) vermittels des Isomorphismus I aus § 1, desgleichen identifizieren wir $\mathscr{L}((s))$ mit $\Sigma((s))$. Für $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_3$ ergibt sich dann, falls $A \in \Sigma((s))$, $x=(x_k)_k \in (s)$ und K eine endliche Teilmenge von N ist,

$$\textstyle\sum_{k\in K} |||x_k A^{(k)} f|||_{m_1,r} \leqq C' (\sum_{k\in K} |x_k|)\, |||f|||_{m_3,r}$$

für alle $f \in \mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_3$, je nachdem, ob $r=1$ oder 3. Somit ist $(\sum_{k=0}^{l} x_k A^{(k)})_l$ eine Cauchyfolge in $\mathscr{L}_b(\mathfrak{S}_1)$ bzw. in $\mathscr{L}_b(\mathfrak{S}_3)$. Folglich existiert

$$A[x] = \textstyle\sum_k x_k A^{(k)}$$

in $\mathscr{L}_b(\mathfrak{S}_1)$ bzw. $\mathscr{L}_b(\mathfrak{S}_3)$. Die Stetigkeit von $A[\cdot]$ folgt aus derjenigen von $(s) \ni x \to \sum_k |x_k|$ und obiger Abschätzung. Für $\mathfrak{S}_2$ ergibt sich

$$\textstyle\sum_{k\in K} |||x_k A^{(k)} f|||_{m_1,2} \leqq C' \sum_{k\in K} (1+k)^{\frac{1}{2}m_1}\, |x_k|\; |||f|||_{m_3,2}\,,$$

woraus Satz 2.1 ganz entsprechend für $\mathfrak{S}_2$ folgt.

Im Anschluss an diesen Satz für $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ untersuchen wir noch spezielle operatorwertige Distributionen mit Werten in $\mathscr{L}(\mathfrak{S}_4)$. Unter $A=(a_{jk})$ verstehen wir im folgenden die Matrix mit den Elementen

$$a_{jk} = \delta_{j+1,k}(j+1)^{\frac{1}{2}}$$

für alle $j,k=0,1,2,\ldots$. Die Matrizen A und A^* gehören zu $\Sigma(\lambda^{(k)})$ [dabei sind die $\lambda^{(k)}$ die zu $\mathfrak{S}_4$ gehörigen, zu $\mathscr{H}(\mathsf{C})$ isomorphen Räume]. Da $n \leqq (e \log a)^{-1} a^n$ für $a>1$, gelten folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{m,k}^2 &= \textstyle\sum_n (2+k)^{mn}\,(n+1)\,|x_{n+1}|^2 \\ &\leqq (2+k)^{-m}\,(e\varepsilon \log(2+k))^{-1}\,\|x\|_{m+\varepsilon,k}^2 \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\|A^*x\|_{m,k}^2 \leqq (2+k)^{m+\varepsilon}\,(e\varepsilon \log(2+k))^{-1}\,\|x\|_{m+\varepsilon,k}^2$$

für jedes $\varepsilon>0$, alle m,k und alle $x \in \lambda^{(k)}$. Hieraus folgt für $y \in (s)^\times$, daß

$$A[y] = \textstyle\sum_k y_k A^{(k)} \in \mathscr{L}(\mathfrak{S}_4)\,,$$

und daß für jedes $\varepsilon>0$ und $f \in \mathfrak{S}_4$

$$|||A[y]f|||_{m,4} \leqq (e\varepsilon \log 2)^{-\frac{1}{2}}\, \left(\textstyle\sum_k (2+k)^{-\frac{1}{2}m}|y_k|\right) |||f|||_{m+\varepsilon,4}\,,$$

so daß $A[\cdot]$ eine stetige lineare Abbildung von $(s)^\times$ in $\mathscr{L}_b(\mathfrak{S}_4)$ ist. Mit Hilfe der weiteren Abschätzung

$$|||A[y]^n f|||_{m,4} \leqq (e\varepsilon n^{-1} \log 2)^{-\frac{1}{2}n}\, \left(\textstyle\sum_k (2+k)^{-\frac{1}{2}m}|y_k|\right)^n |||f|||_{m+\varepsilon,4}$$

sieht man leicht, daß

$$e^{A[y]} \in \mathscr{L}(\mathfrak{S}_4)\,,$$

und daß $e^{A[\cdot]}$ eine stetige nicht-lineare Abbildung von $(s)^\times$ in $\mathscr{L}_b(\mathfrak{S}_4)$ ist. Entsprechend ist $e^{A^*[\cdot]}$ stetig von (s) nach $\mathscr{L}_b(\mathfrak{S}_4)$. Diese Ergebnisse wurden auch von Kristensen, Mejlbo und Poulsen in Teil IV von [5] hergeleitet. Aus

$$\big[A[y], A^*[x]\big]_- = \Sigma_k x_k y_k$$

erhält man

$$e^{A[y]}\, e^{A^*[x]} = e^{\Sigma_k x_k y_k}\, e^{A^*[x]}\, e^{A[y]}\,.$$

Eine ähnliche Behandlung gestatten die Operatoren $-i\,d/dz$ und $z\cdot$ aus $\mathscr{L}(\mathscr{H}(\mathsf{C}))$. Bei Verwendung der zu Anfang dieses Paragraphen angegebenen Isomorphie von λ und $\mathscr{H}(\mathsf{C})$ gehören zu diesen Operatoren die Matrizen

$$P = -i(\delta_{j+1,k}(j+1)) \quad \text{und} \quad Q = (\delta_{j-1,k})\,,$$

für die sich ähnliche Abschätzungen wie für A und A^* ergeben. Das hat — wie oben bei A und A^* — die Konvergenz in $\mathscr{L}_b(\mathfrak{S}_4)$ von

$$\left.\begin{aligned} P[u] &= \Sigma_k \langle \Phi_k, u\rangle P^{(k)} \\ V(u) &= e^{P[u]} \end{aligned}\right. \quad \text{für alle } u \in \mathscr{S}'$$

und

$$\left.\begin{aligned} Q[\varphi] &= \Sigma_k (\varphi \,|\, \Phi_k) Q^{(k)} \\ U(\varphi) &= e^{Q[\varphi]} \end{aligned}\right. \quad \text{für alle } \varphi \in \mathscr{S}$$

zur Folge. Aus

$$i[P, Q]_- = \mathbf{1}$$

ergibt sich mit Theorem 1.1 in [6]

$$i\big[P[u], Q[\varphi]\big]_- = \langle \varphi, u\rangle$$

für alle $u \in \mathscr{S}'$, $\varphi \in \mathscr{S}$, woraus wie üblich

$$\big[Q[\varphi], P[u]^n\big]_- = n\,i\,\langle \varphi, u\rangle P[u]^{n-1}\,,$$

$n = 1, 2, \ldots$, folgt. Mit Hilfe des eben Bewiesenen erhalten wir dann in $\mathscr{L}(\mathfrak{S}_4)$ die Weylschen Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} U(\varphi_1 + \varphi_2) &= U(\varphi_1)\; U(\varphi_2)\,, \\ V(u_1 + u_2) &= V(u_1)\; V(u_2)\,, \\ U(\varphi)\; V(u) &= e^{+i\langle \varphi, u\rangle}\; V(u)\; U(\varphi) \end{aligned}$$

für alle $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}$, $u, u_1, u_2 \in \mathscr{S}'$. Ganz entsprechend erhält man für

$$\tilde{U}(\varphi) = e^{P^*[\varphi]}, \qquad \tilde{V}(u) = e^{Q^*[u]}$$

in $\mathscr{L}(\mathfrak{S}_4)$ die Relationen

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\varphi_1+\varphi_2) &= \tilde{U}(\varphi_1)\,\tilde{U}(\varphi_2)\,, \\ \tilde{V}(u_1+u_2) &= \tilde{V}(u_1)\,\tilde{V}(u_2)\,, \\ \tilde{U}(\varphi)\,\tilde{V}(u) &= e^{i\langle\varphi,u\rangle}\,\tilde{V}(u)\,\tilde{U}(\varphi) \end{aligned}$$

für alle $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{S}$, $u, u_1, u_2 \in \mathscr{S}'$.

An Satz 2.1 anknüpfend betrachten wir als abschließendes Beispiel noch die sog. 2. Quantisierung der Schrödingergleichung

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi(\mathscr{X},t) = -\,\frac{\partial^2}{\partial\mathscr{X}^2}\,\varphi(\mathscr{X},t)$$

(siehe Kastler [3, Chap. III]). Dabei handelt es sich in der üblichen Schreibweise um eine diese Differentialgleichung erfüllende operatorwertige — $\mathscr{L}(E)$-wertige (E lokal konvex) — Distribution

$$\Phi(\mathscr{X},t) = \textstyle\sum_k A_k \Phi_k(\mathscr{X},t)\,,$$

$\mathscr{X}, t$ reell mit einem Orthonormalsystem $(\Phi_k(\mathscr{X},t))_k$ derart, daß

$$\textstyle\sum_k \Phi_k(\mathscr{X},t)\,\Phi_k^*(\mathscr{X}',t) = \delta(\mathscr{X}-\mathscr{X}')\,;$$

von den A_k wird verlangt, daß

$$[A_k, A_j]_- = 0, \quad [A_k, A_j^*]_- = \delta_{kj}\mathbf{1}\,.$$

Die Frage ist, auf welchen Räumen E sich solche $\Phi(\mathscr{X},t)$ überhaupt sinnvoll erklären lassen. Definieren wir die Fouriertransformation auf $\mathscr{S}$ durch

$$F\varphi(\mathscr{X}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,e^{-it\mathscr{X}}\,dt\,,$$

und verstehen wir unter M_t den Multiplikationsoperator ($\in \mathscr{L}(\mathscr{S})$) mit der Funktion $\mathscr{X} \to e^{-it\mathscr{X}^2}$, so erfüllt die Familie $(\Psi(A)_t)_t$ der $\mathscr{L}(\mathfrak{S}_j)$-wertigen, $j = 1, 2, 3$, Distributionen

$$\Psi(A)_t[\varphi] = A[F^{-1}M_t F\varphi], \quad \varphi \in \mathscr{S}\,,$$

für jedes $A \in \mathscr{L}(\mathscr{S})$ die Differentialgleichung

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(A)_t = -\,\frac{\partial^2}{\partial\mathscr{X}^2}\,\Psi(A)_t,$$

da $F^{-1}M_t F$ mit $d/d\mathscr{X}$ kommutiert. Für

$$(*) \qquad A = 2^{-\frac{1}{2}}(-id/d\mathscr{X} - i\mathscr{X}\cdot)$$

erhält man dann in $\Psi(A)_t$ eine Distribution $\Phi(\mathscr{X},t)$ der oben erwähnten Art. Weitere solche Distributionen lassen sich mit den bisherigen Sätzen leicht finden, z.B. wenn man einen beliebigen Automorphismus J von $\mathscr{S}$ nimmt und

$$A = J^{-1}2^{-\frac{1}{2}}(-id/d\mathscr{X} - i\mathscr{X}\cdot)J$$

wählt. Bei $\mathfrak{S}_4$ können wir auf Grund der vorangegangenen Abschätzungen ebenfalls (*) nehmen.

LITERATUR

1. J. Dixmier, *Sur la relation $i(PQ-QP)=1$*, Compositio Math. 13 (1956/58), 263–269.
2. L. Gårding and W. Wightman, *Representations of the commutation relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 40 (1954), 622–626.
3. D. Kastler, *Introduction à l'électrodynamique quantique*, Dunod, Paris, 1961.
4. G. Köthe, *Topologische lineare Räume* I (Grundlehren math. Wiss. 107), Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
5. P. Kristensen, L. Mejlbo, E. Thue Poulsen, *Tempered distributions in infinitely many dimensions* I–IV, Aarhus Universitet, 1963/64–1967.
6. J. Scheiba, *Stufenräume und Endomorphismen zum direkten Integral von Gårding und Wightman*, Math. Ann. 182 (1969), 319–333.

JOH. GUTENBERG UNIVERSITÄT, MAINZ, DEUTSCHLAND