MATH. SCAND. 28 (1971), 159–181

CARACTERISATION DES SIMPLEXES PAR DES PROPRIETES PORTANT SUR LES FACES FERMEES ET SUR LES ENSEMBLES COMPACTS DE POINTS EXTREMAUX

MARC ROGALSKI

1. Introduction et notations.

De nombreuses propriétés des faces fermées et des ensembles compacts de points extrémaux dans les simplexes sont connues depuis déjà quelque temps. Citons, par exemple, les résultats suivants:

— toute face fermée est « complémentable » (cf. [1], [12]);

— tout compact de points extrémaux a la propriété de prolongement affine continu pour les fonctions continues (G. Choquet) ;

— les traces des faces fermées sur l'ensemble des points extrémaux forment sur celui-ci les fermés d'une topologie (cf. [8]).

Plus récemment, certaines des propriétés déjà connues pour les simplexes ont été étendues par Alfsen à certaines faces des convexes compacts quelconques : introduction des faces « archimédiennes » ([2]), des faces « complémentables » et de la topologie « faciale » sur l'ensemble des points extrémaux (cf. Alfsen et Andersen [3]).

Il est alors naturel de se demander si certaines de ces propriétés ne caractérisent pas les simplexes. Les conjectures raisonnables que l'on peut formuler à ce sujet, et qui sont en général vraies en dimension finie, sont, en dimension infinie, tantôt vraies, tantôt fausses. Le but de cet article est de préciser ces différents cas, en se plaçant dans le cadre des convexes compacts « standards », c'est-à-dire ceux dont l'ensemble des points extrémaux est universellement mesurable et porte toute mesure maximale (par exemple, les convexes compacts métrisables, ou ceux dont l'ensemble des points extrémaux est K-analytique : cf. [6]). Le traitement des convexes compacts non « standards » semble plus difficile, et ne sera guère abordé ici.

Nous commencerons par quelques rappels sur les faces et les compacts de points extrémaux dans les convexes compacts et les simplexes. Puis

Reçu le 5 novembre 1969.

nous énoncerons les assertions dont la validité sera discutée, et nous les démontrerons en dimension finie.

Nous établirons ensuite des critères de démonstration rapide, mais peu maniables. Nous poursuivrons par l'étude de convexes compacts particuliers, qui fourniront des contre-exemples en dimension infinie. Nous achèverons par la démonstration d'un critère plus satisfaisant et par l'énoncé de quelques problèmes ouverts.

NOTATIONS. Si E est un espace vectoriel normé ordonné, nous noterons E'^{+} le cône positif de son dual topologique, et $E_1'^{+}$ l'ensemble des points de norme 1 de E'^{+}.

Si X est un convexe compact, nous noterons :

$A(X)$: l'espace des fonctions affines continues sur X ;

$\mathscr{E}(X)$: l'ensemble des points extrémaux de X ;

$M_1^{+}(X)$: l'ensemble des mesures positives de masse 1 sur X ;

$\mathscr{M}^{+}(X)$: l'ensemble des mesures positives sur X et maximales au sens de Choquet ;

Nous noterons $\mathrm{co}(Y)$ [resp: $\overline{\mathrm{co}}(Y)$] l'enveloppe convexe [resp: fermée] d'un ensemble Y.

Si K est un compact inclus dans $\mathscr{E}(X)$, nous noterons F_K l'enveloppe convexe fermée de K : $F_K = \overline{\mathrm{co}}(K)$.

Si μ appartient à $M_1^{+}(X)$, nous noterons $b(\mu)$ son barycentre.

Si f est une fonctions bornée sur X, nous poserons

$$\hat{f}(x) = \inf\{h(x) \mid h \in A(X),\, h \geqq f\}\,.$$

Pour les notions fondamentales sur les convexes compacts, les simplexes et les frontières de Choquet, nous renvoyons à [6], [9].

2. Quelques rappels sur les convexes compacts et les simplexes.

1°) *Faces fortement archimédiennes d'un convexe compact.* On trouvera dans [2] les résultats suivants :

DÉFINITION 1. *Une face fermée F d'un convexe compact X est dite fortement archimédienne si pour toutes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de $A(X)$ et g de $A(F)$, telles que $f_{i|F} \leqq g$, il existe une fonction h de $A(X)$ telles que $h \geqq f_i$, et $h_{|F} = g$.*

Une telle face F vérifie donc la propriété de prolongement affine continue pour les fonctions affines continues sur F. On peut alors montrer l'assertion qui suit :

LEMME 2. *Pour toute face fermée fortement archimédienne F du convexe compact X, il existe un nombre $\varrho > 0$, tel que pour toute f de $A(F)$, il existe $\tilde{f}$ de $A(X)$, prolongeant f, et telle que $\|\tilde{f}\| \leqq \varrho \|f\|$. La borne inférieure de l'ensemble des nombres ϱ possédant cette propriété s'appelle la caractéristique de F.*

Le théorème d'Edwards permet de montrer (cf. [7], [11])

LEMME 3. *Si X est un simplexe, et F une face fermée de X, toute f de $A^+(F)$ possède un prolongement $\tilde{f}$ de $A^+(X)$, tel que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$; de plus, toute face fermée est fortement archimédienne de caractéristique* 1.

2°) *Faces complémentables d'un convexe compact et topologie faciale sur l'ensemble des points extrémaux.*

DÉFINITION 4. *Soit F une face fermée d'un convexe compact X. On appelle ensemble supplémentaire de F la réunion F' de toutes les faces de X disjointes de F. On a la relation*

$$X = \operatorname{co}(F \cup F') \quad \textit{et} \quad F' = \hat{1}_F^{-1}(0) .$$

On dit que F est complémentable si F' est une face, et si tout point de $X \setminus (F \cup F')$ possède une décomposition barycentrique unique suivant F et F'. La fonction $\hat{1}_F$ est alors affine.

L'ensemble des faces complémentables est stable par intersection quelconque et par l'opération « enveloppe convexe d'un nombre fini d'entre elles ». Si pour toute famille (F_i) de faces complémentables, l'ensemble $\overline{\operatorname{co}}(\bigcup_{i \in I} F_i)$ est encore une face complémentable, on dit que X vérifie *l'axiome de Störmer*.

Les résultats suivants se trouvent dans [3].

LEMME 5. *Toute face fermée complémentable est fortement archimédienne de caractéristique* 1.

LEMME 6. a) *Les traces des faces fermées complémentables sur $\mathscr{E}(X)$ sont les fermés d'une topologie $\mathscr{F}$ dite topologie faciale.*

b) *La topologie faciale est quasi-compacte.*

c) *Elle est séparée si et seulement si X est un simplexe de Bauer.*

LEMME 7. *Si X est un simplexe, il vérifie l'axiome de Störmer si et seulement si c'est un simplexe de Bauer.*

Dans le cas des simplexes, le résultat suivant de Alfsen (cf. [1], [12]) est important pour notre propos :

LEMME 8. *Si X est un simplexe, toute face fermée de X est complémentable ; la topologie faciale est alors celle introduite par Effros* (cf. [8]).

3°) *Le théorème de Caratheodory en dimension finie.* Le résultat suivant sera essentiel en dimension finie :

LEMME 9. *Si X est un convexe compact de R^n, tout point de X est barycentre d'un nombre fini de points extrémaux affinement indépendants* (*ce nombre est donc inférieur ou égal à $n+1$*).

Autrement dit : pour tout x de X, il existe une mesure maximale μ de barycentre x, dont le support $S\mu$ est inclus dans $\mathscr{E}(X)$, et telle que $\overline{\mathrm{co}}\,(S\mu)$ soit un simplexe. On en trouvera une démonstration dans [5].

Ce résultat est faux en dimension infinie et le convexe compact X_0 qui servira de contre-exemple dans la suite ne vérifiera pas le théorème de Carathéodory. Un contre-exemple analogue a été donné dans [0] par Alfsen.

4°) *Quelques résultats sur les faces et les ensembles compacts de points extrémaux dans les simplexes.* Nous rappelons ici des résultats bien connus en général, mais guère publiés.

LEMME 10. a) *Soit X un simplexe, et Y un convexe compact inclus dans X. Si $\mathscr{E}(Y)\subset\mathscr{E}(X)$, alors Y est une face de X.*

b) *Soit X un simplexe, et K un compact inclus dans $\mathscr{E}(X)$. Alors $\overline{\mathrm{co}}\,(K)$ est une face.*

Le point b) est immédiat directement, mais il résulte aussi du point a). Celui-ci est plus délicat. On en trouvera une démonstration dans [12].

LEMME 11 (*Principe de Dirichlet approché avec positivité*): *Soit X un simplexe, et soit K un compact inclus dans $\mathscr{E}(X)$. Pour toute fonction f définie et continue sur K, telle que $0\leqq f\leqq 1$, il existe $\tilde{f}\in A(X)$, telle que $0\leqq\tilde{f}\leqq 1$ et $\tilde{f}_{|K}=f$.*

Ce résultat, dû à Choquet, résulte du lemme 3 et du lemme 10.b), ou, plus simplement, de l'application du théorème d'Edwards à la fonction φ qui vaut f sur K et 0 sur $X\setminus K$.

3. Les critères en dimension finie.

Soit X un convexe compact. Nous allons étudier une liste de onze propriétés éventuelles de X.

(A) Tout compact $K \subset \mathscr{E}(X)$ a pour enveloppe convexe fermée une face.
(B) Tout convexe compact $Y \subset X$ tel que $\mathscr{E}(Y) \subset \mathscr{E}(X)$ est une face.
(C) Tout compact ordinaire de $\mathscr{E}(X)$ est fermé pour la topologie faciale.
(C′) Tout compact inclus dans $\mathscr{E}(X)$ a pour enveloppe convexe fermée une face complémentable.
(D) Tout compact ordinaire de $\mathscr{E}(X)$ est séparé pour la topologie induite par la topologie faciale.
(E) Tout compact inclus dans $\mathscr{E}(X)$ a pour enveloppe convexe fermée un simplexe.
(F) Toute face fermée de X est complémentable.
(F_1) Toute face fermée F de X dont l'ensemble des points extrémaux $\mathscr{E}(F)$ est fermé est complémentable.
(F_2) Tout point extrémal de X est une face complémentable.
(G) Il existe $\varrho \geqq 1$ tel que pour tout compact $K \subset \mathscr{E}(X)$, et pour toute f de $C(K)$, il existe $\tilde{f}$ de $A(X)$ telle que $\tilde{f}_{|K} = ff$ et $\|\tilde{f}\|\,\| \leqq \varrho \|$ (principe de Dirichlet approché, sans positivité).
(S) Le convexe compact X est un simplexe.

Lemme 12. *Les implications suivantes sont vraies dans le cas le plus général*:

$$\begin{array}{ccccccc}
(B) & \Rightarrow & (A) & & & & \\
 & & \Uparrow & & (D) & \Rightarrow & (E) \\
(C) & \Leftrightarrow & (C') & & & & \Uparrow \\
 & & \Downarrow & & & & (G) \\
(F) & \Rightarrow & (F_1) & \Rightarrow & (F_2) & &
\end{array}$$

De plus, (S) *implique les dix autres propriétés.*

Démonstration. Le premier groupe d'implications entre (A), (B), (C), (C′), (F), (F_1) et (F_2) est à peu près évident à partir du § 2.

(D) $\Rightarrow$ (E): Soit K compact $\subset \mathscr{E}(X)$, et soit $Y = \overline{\mathrm{co}}(K)$. Notons $\mathscr{F}^Y$ la topologie faciale propre à Y sur $K = \mathscr{E}(Y)$, et ${\mathscr{F}^X}_K$ la trace sur K de la topologie faciale de $\mathscr{E}(X)$. Nous allons montrer qu'*on a toujours*

$$\mathscr{F}^Y \succ {\mathscr{F}^X}_K\,.$$

L'implication (D) $\Rightarrow$ (E) sera alors trivialement conséquence du lemme 6c), car si $\mathscr{F}^X{}_K$ est séparée, $\mathscr{F}^Y$ l'est a fortiori.

Soit donc F une face complémentable de X, déterminant un fermé $F \cap K$ de $\mathscr{F}^X{}_K$. Il est clair que $F \cap Y$ est une face fermée G de Y, et que l'on a $\mathscr{E}(G) = F \cap K$. Posons

$$\varphi = \hat{1}_G{}^Y = \inf\{h \mid h \in A(Y),\ h \geqq 1_G\}\,;$$

cette fonction est concave SCS. Soit

$$f = \hat{1}^X_{F|Y} = \inf\{l_{|Y} \mid l \in A(X),\ l \geqq 1_F\}\,;$$

cette fonction est affine SCS, puisque F est complémentable (cf. définition 4). Il est clair que l'on a $\varphi \leqq f$. Or $f = \varphi$ sur $\mathscr{E}(Y)$, car sur $\mathscr{E}(G) = F \cap K, f = \varphi = 1$, et sur $\mathscr{E}(Y) \setminus \mathscr{E}(G) = F' \cap K$ (F' face supplémentaire de F dans X), $f = \varphi = 0$ (cf. définition 4). C'est un lemme facile sur les convexes compacts qu'on ait alors $f = \varphi$ (utiliser l'égalité

$$\varphi = \inf\{g \mid g \in A(Y),\ g \geqq \varphi\}$$

cf. par ex. [12]). Donc, de plus, φ est affine, et

$$G' = \varphi^{-1}(0) = f^{-1}(0) = (\hat{1}^X_{F|Y})^{-1}(0) = F' \cap Y\,.$$

Donc G' est une face, et $Y = \mathrm{co}(G \cup G')$ (cf. définition 4). Soit alors y dans Y. On peut écrire : $y = \lambda a + (1-\lambda)b$, avec $a \in G$ et $b \in G'$. Mais comme $G \subset F$ et $G' \subset F'$, a et b sont uniques puisque F est complémentable. Donc G est complémentable dans Y, et $\mathscr{E}(G) = F \cap K$ est un fermé de $\mathscr{F}^Y$. Donc on a bien $\mathscr{F}^Y \succ \mathscr{F}^X{}_K$.

Remarquons que l'implication (E) $\Rightarrow$ (D) semble fausse en général, même si la propriété (A) est vérifiée. Par contre, elle est vraie si la propriété (C') est vérifiée ; on le voit par un calcul barycentrique élémentaire.

(G) $\Rightarrow$ (E) : Soit K compact $\subset \mathscr{E}(X)$, et soit $Y = \overline{\mathrm{co}}(K)$. Alors $\mathscr{E}(Y) = K$ est fermé. Pour toute f de $C(K) = C[\overline{\mathscr{E}(Y)}]$ il existe $\tilde{f}$ de $A(X)$ qui prolonge f, donc $\tilde{f}_{|Y}$ appartien à $A(Y)$ et prolonge f. D'après un résultat classique de Bauer, Y est un simplexe de Bauer (cf. [4]).

Nous alons voir que si X est de dimension finie, la situation est très agréable.

THÉORÈME 13. *Si X est un convexe compact de* R^n, *alors les onze propriétés* (A)...(S) *sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. Il nous suffit de démontrer les trois implications (E) $\Rightarrow$ (S), (A) $\Rightarrow$ (S) et (F_2) $\Rightarrow$ (S).

(E) $\Rightarrow$ (S) : Si $\mathscr{E}(X)$ est fermé, alors $X = \overline{\mathrm{co}}[\mathscr{E}(X)]$ est un simplexe. Sinon, $\mathscr{E}(X)$ est infini. Soient $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}, x_{n+2}$ $n+2$ points distincts dans $\mathscr{E}(X)$. Alors $\mathrm{co}(x_1, \ldots, x_{n+2})$ est un simplexe inclus dans X, de dimension $n+1$, ce qui est absurde. Donc $\mathscr{E}(X)$ est fermé, et X est un simplexe.

(A) $\Rightarrow$ (S) : Il existe un point $x \in X$ tel que la plus petite face fermée contenant x soit X. D'après le résultat de Carathéodory (lemme 9), il existe $x_1, x_2, \ldots, x_h \in \mathscr{E}(X)$, affinement indépendants, tels que

$$x \in \mathrm{co}(\{x_1, \ldots, x_h\}) .$$

Mais cet ensemble est une face d'après (A). Donc c'est X. Mais comme cet ensemble est un simplexe, X est un simplexe.

(F_2) $\Rightarrow$ (S) : Remarquons d'abord que si X est un convexe compact de R^n, toute face F de X est fermée, car son intersection avec toute droite est fermée, et ceci suffit en dimension finie (cf. Bourbaki [5, exercise 15 du § 1 du ch. II]).

Soit $a_1 \in \mathscr{E}(X)$. La face supplementaire F_1 est fermée, et sa dimension est plus petite strictement que celle de X. De plus, $\mathscr{E}(X) = \{a_1\} \cup \mathscr{E}(F_1)$.

Soit $a_2 \in \mathscr{E}(F_1)$. Si G_2 est la face supplémentaire de $\{a_2\}$ dans X, on voit facilement que $F_2 = G_2 \cap F_1$ est la face supplémentaire de $\{a_2\}$ dans F_1. La face F_2 est donc fermée, et de dimension strictement inférieure à celle de F_1.

En continuant ainsi, on arrive nécessairement à une face F_p réduite à un point a_p (avec $p \leqq n+1$).

On en déduit que $X = \mathrm{co}(\{a_1, a_2, \ldots, a_p\})$, avec unicité des décompositions barycentriques, donc que X est un simplexe.

En dimension infinie, l'une des propriétés (A) ... (G) ne sera pas suffisante à elle seule, le plus souvent, pour affirmer que X est un simplexe. Il faudra utiliser la conjonction de plusieurs de ces propriétés. Dans une première étape, nous déduirons d'un résultat de Choquet un critère facile à démontrer, mais peu maniable dans la pratique.

4. Premiers critères en dimension infinie, pour les convexes compacts standards.

Nous rappellons qu'un convexe compact X est standard si $\mathscr{E}(X)$ est universellement mesurable et porte toute mesure maximale. Nous allons d'abord démontrer la réciproque, dûe à Choquet, du lemme 11.

THÉORÈME 14. *Soit X un convexe compact* standard. *Si X vérifie le principe de Dirichlet approché sans positivité, X est un simplexe* (*c.a.d.* : (G) $\Leftrightarrow$ (S) *pour un convexe compact standard*).

DÉMONSTRATION. Supposons, par l'absurde, que deux mesures μ et ν de $M_1{}^+(X)$, portées par $\mathscr{E}(X)$, coïncident sur $A(X)$ c.a.d. aient même barycentre, et soient distinctes. Il existe un compact K inclus dans $\mathscr{E}(X)$, tel que $\mu(K) \neq \nu(K)$. Donc il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $\mu(K) - \nu(K) > \varepsilon$, par exemple.

Soit ϱ le nombre figurant dans l'énoncé de (G). Il existe un compact K' tel que $K \subset K' \subset \mathscr{E}(X)$, et avec à la fois $\mu(K') > 1 - \frac{1}{8}\varepsilon\varrho^{-1}$ et $\nu(K') > 1 - \frac{1}{8}\varepsilon\varrho^{-1}$. De plus, puisque $\int 1_K d\mu - \int 1_K d\nu > \varepsilon$, il existe f de $C(K')$, avec $0 \leqq f \leqq 1$, telle que $\int_{K'} f d\mu - \int_{K'} f d\nu > \frac{1}{2}\varepsilon$. Soit alors $\tilde{f}$ dans $A(X)$, telle que $\tilde{f}_{|K'} = f$, et $\|\tilde{f}\| \leqq \varrho \|f\| \leqq \varrho$. Alors on a : $\mu(\tilde{f}) - \nu(\tilde{f}) = 0$. Mais on peut écrire :

$$\mu(\tilde{f}) - \nu(\tilde{f}) = \int_{K'} f\, d\mu - \int_{K'} f\, d\nu + \int_{\mathscr{E}(X)\setminus K'} \tilde{f}\, d\mu - \int_{\mathscr{E}(X)\setminus K'} \tilde{f}\, d\nu .$$

D'où : $0 \geqq \frac{1}{2}\varepsilon - 2(\frac{1}{8}\varepsilon\varrho^{-1})\|\tilde{f}\| \geqq \frac{1}{2}\varepsilon - 2(\frac{1}{8}\varepsilon\varrho^{-1})\varrho = \frac{1}{4}\varepsilon$ ce qui est absurde.

Ce théorème va nous permettre de montrer facilement que la conjonction de (C) et (E) implique (S), et même un résultat un peu plus fort.

DÉFINITION 15. *On dit que des faces $(Fi)_{i\in I}$ fortement archimédiennes d'un convexe compact X sont uniformément fortement archimédiennes si les caractéristiques ϱ_i des Fi sont uniformément bornées.*

THÉORÈME 16. *Soit X un convexe compact* standard.

a) *Si pour tout compact $K \subset \mathscr{E}(X)$, $F_K = \overline{\mathrm{co}}(K)$ est une face complémentable, et qui de plus est un simplexe, alors X est un simplexe.*

b) *Si les F_K sont des faces uniformément fortement archimédiennes, et qui de plus sont des simplexes, alors X est un simplexe.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que b) $\Rightarrow$ a), puisque des faces complémentables sont fortement archimédiennes de caractéristique 1.

Nous allons montrer que X vérifie les hypothèses du théorème 14. Soit K compact, inclus dans $\mathscr{E}(X)$, et soit f de $C(K)$. L'ensemble $F_K = \overline{\mathrm{co}}(K)$ est une face, donc $\mathscr{E}(F_K) = K$ est fermé. Donc F_K est un simplexe de Bauer. Par suite, il existe g de $A(F_K)$ (unique), telle que $g_{|K} = f$ et $\|g\| = \|f\|$. Il existe alors h de $A(X)$, telle que $h_{|F_K} = g$, et $\|h\| \leqq \varrho\, \|g\| = \varrho\, \|f\|$, où ϱ est une borne commune aux caractéristique des F_K. De plus, bien sûr, $h_{|K} = f$. Donc X vérifie le principe de Dirichlet approché sans positivité, et X est donc un simplexe.

COROLLAIRE 17. *Soit X un convexe compact standard. Si X vérifie l'axiome de Störmer, et les propriétés* (F_2) *et* (E), *X est un simplexe de Bauer.*

En effet, d'après (F_2), tout point extrémal est une face complémentable. Donc, d'après l'axiome de Störmer, il en est de même de $\overline{\mathrm{co}}(K)$ si $K \subset \mathscr{E}(X)$. Si de plus X vérifie (E), il vérifie les hypothèses du théorème 16, donc c'est un simplexe. D'après le lemme 7, c'est un simplexe de Bauer.

En fait, le théorème 16a) et le corollaire 17 seront améliorés dans la suite.

5. Un contre-exemple pilote.

DÉFINITION 18. *Soit dx la mesure de Lebesgue sur* $[0,1]$, *et $\bar{\omega}$ la mesure $\sum_{n \geq 1} 2^{-n} \delta_{x_n}$, ou $n \to x_n$ est une numérotation bijective des rationnels de* $[0,1]$. *Soit π la mesure $dx - \bar{\omega}$.*

On définit le sous-espace H de $C([0,1])$ par $H = \pi^{-1}(0)$. Muni de la norme uniforme, H est un espace de Banach. De plus, les constantes appartiennent à H.

On note X_0 le convexe compact du dual H' de H formé des éléments positifs de norme 1 de H', et muni de la topologie faible $\sigma(H', H)$ $(X_0 = H_1'^{+})$.

Ce convexe compact X_0, d'ailleurs métrisable, va nous fournir des contre-exemples, en dimension infinie, à certaines des conjectures que l'on peut imaginer à partir du théorème 13.

LEMME 19. *Pour tout $y_0 \in [0,1]$, il existe f de H telle que $f(y_0) = 1$ et $f(y) < 1$ pour tout $y \neq y_0$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\Omega = \{f \in C([0,1]) \mid f(y_0) = 1 \text{ et } \forall y \neq y_0, f(y) < 1\}$. Ω est un ensemble convexe de $C([0,1])$. La mesure π est linéaire sur $C([0,1])$. Pour trouver f dans $H \cap \Omega$, c'est-à-dire dans $\pi^{-1}(0) \cap \Omega$, il suffit de trouver f_1 et f_2 dans Ω telle que $\pi(f_1) > 0$ et $\pi(f_2) < 0$.

1. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Posons $f_1(y_0) = 1$ et $\forall x_p \neq y_0$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ $f_1(x_p) = 0$, et choisissons f_1 comprise entre 0 et 1. Alors on a:

$$\bar{\omega}(f_1) < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} = \alpha < 1 \,.$$

En prenant alors f_1 « en pointe » autour de $y_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, et égale à $1-\varepsilon$ ailleurs, on peut réaliser $\int_0^1 f_1 dx > \alpha$, et, par conséquent, avoir $\pi(f_1) > 0$. (Cf. Fig. 1.)

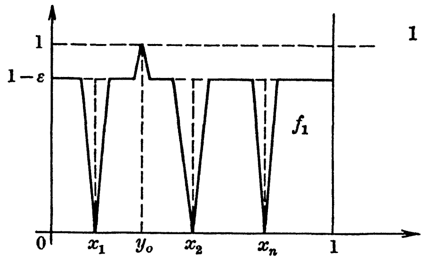

Fig. 1.

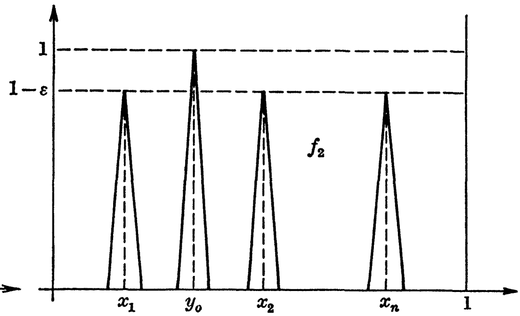

Fig. 2.

2. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Posons $f_2(y_0) = 1$, et $\forall x_p \neq y_0$, $f_2(x_p) = 1-\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$, et choisissons f_2 comprise entre 0 et 1. Alors on a

$$\bar{\omega}(f_2) > (1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) = (1-\varepsilon)\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = B > 0\,.$$

En prenant f_2 « en pointe » autour de $y_0, x_1, \ldots, x_n$, et nulle ailleurs, on peut réaliser $\int_0^1 f_2 dx < B$, et par conséquent, avoir $\pi(f_2) < 0$. (Cf. Fig. 2.)

On peut remarquer que ce qui permet cette construction, c'est le fait que dx et $\bar{\omega}$ soient étrangères.

Proposition 20. a) *L'ensemble des points extrémaux de* X_0 *est isomorphe à* $[0,1]$ *par l'injection canonique de* $[0,1]$ *dans* $H_1'^+ : x \rightsquigarrow \delta_x$.

b) X_0 *n'est pas un simplexe.*

c) X_0 *ne vérifie pas le théorème de Carathéodory.*

Démonstration. a) Il resulte du lemme 19 que H sépare $[0,1]$, et que $\forall y_0$ de $[0,1]$, il existe f de H qui possède un maximum strict en y_0. Donc la frontière de Choquet de H est $[0,1]$, et elle est isomorphe à l'ensemble (cf. [6])

$$\mathscr{E}\{\overline{\mathrm{co}}[\delta([0,1])]\} = \mathscr{E}(H_1'^+) = \mathscr{E}(X_0)\,.$$

Par l'injection $x \rightsquigarrow \delta_x$, H s'identifie à $A(X_0)$.

b) Soit x_0 le point de X_0 barycentre commun des mesures dx et $\bar{\omega}$ (qui coïncident par definition sur $H \simeq A(X_0)$). Comme dx et $\bar{\omega}$ sont portées par $\mathscr{E}(X_0)$, x_0 possède deux mesures maximales distinctes et X_0 n'est pas un simplexe (c'est un « α-polytope » au sens de [10]).

c) Montrons que les mesures maximales de masse 1 et barycentre x_0 sont exactement les mesures de la forme $\lambda dx + (1-\lambda)\bar{\omega}$: soit ν une mesure maximale de barycentre x_0. Donc, $\forall f$ de $C([0,1])$, on a l'implication : $f \in H \Rightarrow \nu(f) = \bar{\omega}(f)$, c'est-à-dire $(dx - \bar{\omega})(f) = 0 \Rightarrow (\nu - \bar{\omega})(f) = 0$. Donc il existe λ tel que $\nu - \bar{\omega} = \lambda(dx - \bar{\omega})$, donc $\nu = \lambda dx + (1-\lambda)\bar{\omega}$. Comme ν appartient à $M_1{}^+([0,1])$, nécessairement on a $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Il en résulte que pour toute mesure maximale ν de barycentre x_0, le support $S\nu$ de ν est $\mathscr{E}(X_0)$ entier ; et alors $\overline{\mathrm{co}}(S\nu) = X_0$ n'est pas un simplexe.

Pour un convexe compact ne vérifiant pas le théorème de Carathéodory, cf. aussi [0].

Nous allons étudier de plus près les faces du convexe compact X_0.

LEMME 21. *Pour tout compact $K \subset \mathscr{E}(X_0)$, $F_K = \overline{\mathrm{co}}(K)$ est une face, qui est un simplexe de Bauer isomorphe à $M_1{}^+(K)$ si $K \neq \mathscr{E}(X_0)$. Inversement, toute face fermée est de la forme F_K pour un certain compact $K \subset [0,1]$.*

DÉMONSTRATION. Si $K = [0,1]$, il est clair que F_K est une face.

Supposons $K \neq [0,1]$. Montrons que F_K est un simplexe de Bauer isomorphe à $M_1{}^+(K)$. D'abord, $K = \mathscr{E}(F_K)$. Soit alors μ et ν dans $M_1{}^+(K)$, et supposons que $b(\mu) = b(\nu)$. Ceci signifie que μ et ν, considérées comme mesures sur $[0,1]$ portées par K, sont telles que

$$\pi(f) = 0 \Rightarrow (\mu - \nu)(f) = 0$$

$\forall f \in C([0,1])$. Donc il existe λ tel que $\mu - \nu = \lambda\pi$. Mais π charge l'ouvert $[0,1] \setminus K$, alors qu'il n'en est pas de même de $\mu - \nu$. Donc on a $\lambda = 0$, et $\mu = \nu$. Donc F_K est un simplexe isomorphe à $M_1{}^+(K)$.

Reste à montrer que F_K est une face. Soit x un point de F_K, $x = b(\mu)$, $\mu \in M_1{}^+(K)$ (μ est unique). Soient y et z dans X_0, barycentres de ν et θ de $M_1{}^+([0,1])$, et tels que $x = \frac{1}{2}(y+z)$. On a donc $\mu - \frac{1}{2}(\nu + \theta) = \lambda\pi$ pour un certain λ réel. Posons $\frac{1}{2}(\nu + \theta) = \alpha_1 + \alpha_2$, où $\alpha_1(CK) = 0$ et $\alpha_2(K) = 0$. On trouve alors

$$(\mu - \alpha_1) - \alpha_2 = \lambda\pi_{|K} + \lambda\pi_{|CK} .$$

Donc $\alpha_2 = -\lambda\pi_{|CK}$. Or $\alpha_2 \geqq 0$, et $\pi^+ = dx$ et $\pi^- = \bar{\omega}$ chargent l'ouvert CK. Donc nécessairement $\lambda = 0$, $\alpha_2 = 0$, et ν et θ sont portées par K. Donc y et z appartiennent à F_K, ce qui prouve que F_K est une face.

Réciproquement, il est évident que toute face fermée est de la forme F_K.

Remarque 22. a) On voit que l'argument essentiel consiste à utiliser le fait que dx et $\bar{\omega}$ sont étrangères et chargent tout ouvert non vide. Cette remarque permet de généraliser le contre-exemple X_0.

b) On montre facilement que si $K \neq [0,1]$, un point x de F_K a une seule représentation par une mesure sur $[0,1]$: la mesure portée par K et qui le représente dans F_K.

Définition 23. a) *Soit K un compact de $[0,1]$, $K \neq \emptyset$ et $K \neq [0,1]$. On notera F_K' l'ensemble supplémentaire de la face F_K, et G_K l'ensemble des barycentres des mesures de $M_1{}^+([0,1])$ portées par $[0,1] \setminus K$.*

b) *Si K est un compact de $[0,1]$, non vide, et distinct de $[0,1]$, on dira que K est π-épais (resp. π-négligeable) si on a: $\pi^+(K).\ \pi^-(K) > 0$ (resp. $|\pi|(K) = 0$). Une face F_K sera π-épaisse (resp. π-négligeable) si K est π-épais (resp. π-négligeable).*

Lemme 24. *Soit K un compact de $[0,1]$, K non vide et distinct de $[0,1]$.*

a) *Alors : $G_K \cap F_K = \emptyset$ et $X_0 = \mathrm{co}(F_K \cup G_K)$.*

b) *Si K est π-épais ou π-négligeable, G_K est une face qui n'est autre que F_K' ; si K n'est ni π-épais ni π-négligeable, G_K n'est pas une face et G_K contient F_K' strictement.*

c) *Si K est π-négligeable, F_K est une face complémentable.*

d) *Si K est π-épais, la face F_K n'est pas complémentable.*

Démonstration. a) Supposons qu'il existe un point x dans $G_K \cap F_K$. Alors il existe μ de $M_1{}^+(K)$ et ν de $M_1{}^+(CK)$ telles que $\mu - \nu = \lambda\pi$. Donc $\nu = -\lambda\pi_{|CK}$, ce qui implique $\lambda = 0$ car $\pi_{|CK}$ n'a pas un signe constant. Donc $\nu = 0$, ce qui est absurde. Donc $G_K \cap F_K = \emptyset$. De plus, il est clair que $X = \mathrm{co}(F_K \cup G_K)$, car toute μ de $M_1{}^+([0,1])$ s'écrit $\mu = \mu_{|K} + \mu_{|CK}$.

b) Soit x dans G_K, barycentre de μ de $M_1{}^+(CK)$. Soient y et z deux points de X_0, barycentres de ν et θ de $M_1{}^+([0,1])$, et tels que $x = \frac{1}{2}(y+z)$; il existe donc λ réel tel que $\mu = \frac{1}{2}(\nu + \theta) + \lambda\pi$. Si nous posons $\alpha = \frac{1}{2}(\nu + \theta)$, alors on a $\mu = \alpha + \lambda\pi$, donc $\mu = \alpha_{|CK} + \lambda\pi_{|CK}$, et $0 = \alpha_{|K} + \lambda\pi_{|K}$. Or $\alpha_{|K} \geqq 0$. Donc $-\lambda\pi_{|K} \geqq 0$.

1) Si K est π-négligeable, $\lambda\pi_{|K} = 0$, et $\alpha_{|K} = 0$, donc $\frac{1}{2}(\nu + \theta) = \alpha_{|CK}$, et ν et θ sont portées par CK, et y et z appartiennent à G_K. G_K est donc une face.

2) Si K est π-épais, $\pi_{|K}$ n'a pas un signe constant. Donc $-\lambda\pi_{|K}$ ne peut être positive que si $\lambda = 0$; on obtient donc encore $\alpha_{|K} = 0$, et on conclut de la même façon.

D'autre part, sans hypothèse sur K, soit F une face de X_0 disjointe de F_K. Soit $y \in F$. On peut écrire :

$$y = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2, \quad y_1 \in F_K,\ y_2 \in G_K .$$

Si $\lambda \neq 0$, alors y_1 appartient à $F \cap F_K$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $\lambda = 0$, et $y = y_2$ appartient à G_K. Donc dans tous les cas

$$F_K' = \bigcup \{F \mid F \text{ face, } F \cap F_K = \emptyset\} \subset G_K .$$

Si K est π-épais ou π-négligeable, G_K est une face disjointe de F_K, donc c'est la plus grande face disjointe de $F_K : G_K = F_K'$.

Enfin, soit K ni π-épais ni π-négligeable, et montrons qu'il existe un point x de G_K tel que face$(x) \cap F_K \neq \emptyset$ (où face(x) est la plus petite face contenant x). On aura ainsi l'inclusion stricte $F_K' \subsetneqq G_K$, et le fait que G_K n'est pas une face.

1*er cas* : $\bar{\omega}(K) = 0$ et $\int_K dx > 0$. Posons

$$\beta^{-1} = \int_K dx .$$

Soit x_0 le barycentre de $\bar{\omega}$. Alors x_0 appartient à $G_K \setminus F_K$. Soit y le barycentre de la mesure $\mu = \beta dx_{|K}$. Le point y appartient à F_K. Soit λ de $]0,1[$, avec $\lambda\beta \leqq 1$. Si un point x de G_K est barycentre d'une mesure ν portée par CK, à quelle condition a-t-on $x_0 = \lambda y + (1-\lambda) z$, et par conséquent à la fois le fait que G_K n'est pas une face, et que y appartient à face$(x_0) \cap F_K$? (car dire que y est dans face(x_0) c'est dire qu'il existe z et $\lambda > 0$ tels que $x_0 = \lambda x + (1-\lambda) z$). La condition s'écrit:

$$\bar{\omega} = \lambda\mu + (1-\lambda)\nu + \alpha\pi ,$$

soit:

$$\bar{\omega} = \lambda\beta dx_{|K} + (1-\lambda)\nu + \alpha dx - \alpha\bar{\omega}$$

Puisque $\bar{\omega}(K) = 0$, ceci est possible à la condition que $\lambda\beta = -\alpha$. On a alors

$$\bar{\omega}\left(\frac{1-\lambda\beta}{1-\lambda}\right) + \frac{\lambda\beta}{1-\lambda}(1-\beta^{-1})\frac{dx_{|CK}}{1-\beta^{-1}} = \nu .$$

La mesure ν appartiendra bien à $M_1^+(CK)$ si on a les relations:

$$\frac{1-\lambda\beta}{1-\lambda} + \frac{\lambda\beta}{1-\lambda}(1-\beta^{-1}) = 1 ;$$

$$\lambda\beta \leqq 1; \quad \frac{1-\lambda\beta}{1-\lambda} \leqq 1; \quad \frac{\lambda\beta}{1-\lambda}(1-\beta^{-1}) \leqq 1 .$$

Ces conditions sont réalisées si $\lambda\beta \leqq 1$, ce que nous avons supposé. Donc, si $x_0 = b(\bar{\omega})$, il existe y appartenant à face$(x_0) \cap F_K$ et de plus l'égalité

$x_0=\lambda y+(1-\lambda)z$, avec y dans F_K, donc y dans $\complement G_K$, prouve que G_K n'est pas une face.

2ème cas : $\int_K dx=0$ et $\bar{\omega}(K)>0$. La démonstration est exactement la même, en intervertissant le rôle de dx et $\bar{\omega}$.

c) Soit K un compact π-négligeable. La seule chose qui reste à montrer pour prouver que F_K est complémentable est l'unicité de la décomposition barycentrique dans la formule $X_0=\mathrm{co}(F_K\cup G_K)$. Soit x dans $X_0\setminus(F_K\cup G_K)$, $x=b(\mu)$ $(\mu\in M_1^+([0,1]))$. On peut écrire $\mu=\mu_{|K}+\mu_{|CK}$, ce qui donne une décomposition. Une autre décomposition de x s'écrit, en termes de mesures:

$$\mu = \nu+\theta+\lambda\pi, \quad \nu\in M^+(K),\ \theta\in M^+(CK)\ .$$

Comme $|\pi|(K)=0$, nécessairement $\nu=\mu_{|K}$, et $\mu_{|CK}=\theta+\lambda$, donc

$$b(\mu_{|CK}/\|\mu_{|CK}\|) = b(\theta/\|\theta\|) :$$

la décomposition est unique.

d) Soit $x_0=b(\bar{\omega})=b(dx)$. On peut, en termes de mesures, représenter x_0 de deux façons par $dx_{|K}+dx_{|CK}$, et par $\bar{\omega}_{|K}+\bar{\omega}_{|CK}$. Or $dx_{|CK}/dx(CK)$ et $\bar{\omega}_{|CK}/\bar{\omega}(CK)$, par exemple, ne peuvent représenter le même point, sinon on aurait

$$\alpha\, dx_{|CK}-\beta\,\bar{\omega}_{|CK} = \lambda\pi\ ,$$

ce qui est absurde si $\lambda\neq 0$ car le 1er nombre ne charge pas K, alors que le second charge K. On aurait donc $\lambda=0$, et $\alpha\, dx_{|CK}=\beta\,\bar{\omega}_{|CK}$, ce qui est encore absurde, car ces deux mesures sont étrangères.

Il ne peut donc y avoir unicité de la décomposition de x_0 suivant F_K et G_K (égal à F_K') et F_K n'est pas complémentable.

Corollaire 25. *Tout point extrémal non rationnel est une face complémentable.*

Remarque 26. Il serait peut être intéressant, dans le cas où K n'est ni π-épais ni π-négligeable de déterminer F_K'. En particulier, il serait intéressant de savoir si les points extrémaux rationnels sont des faces complémentables.

Montrons enfin une forte propriété des faces fermées de X_0:

Lemme 27. *Toute face fermée de X_0 est fortement archimédienne.*

Démonstration. Si la face est X_0, c'est évident. Sinon soit F_K une face fermée, avec $K\neq[0,1]$. Soient $f_1,f_2,\ldots,f_n$ de H, et soit g de $C(K)$

(qui est isomorphe à $A(F_K)$, d'après le lemme 21), avec $f_{i|K} \leqq g$. Posons

$$\varphi = \sup(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

Alors $\varphi \leqq g$ sur K. Soit ψ un prolongement continu de g à $[0,1]$, avec $\psi \geqq \varphi$. Nous allons construire, dans l'ensemble convexe

$$\mathscr{B} = \{f \in C[0,1]) \mid f = g \text{ sur } K, f \geqq \varphi\},$$

deux fonctions ψ_1 et ψ_2 telles que $\pi(\psi_1) < 0$ et $\pi(\psi_2) > 0$. Par convexité, il existera alors $h = \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2$ appartenant à $H \cap \mathscr{B}$, donc telle que $h = g$ sur K (c'est a dire sur F_K) et $h \geqq f_i$ sur $\mathscr{E}(X_0)$, donc sur X_0.

1. En rajoutant à ψ des « pointes vers le haut » aux points $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_n}$ de $[0,1] \setminus K$, on fabrique ψ_1 avec $\pi(\psi_1) < 0$. (Cf. Fig. 3.)

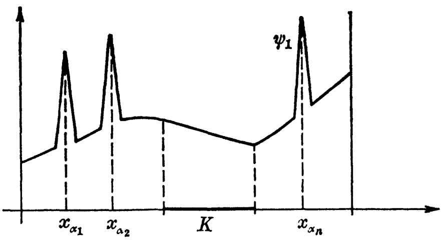

Fig. 3.

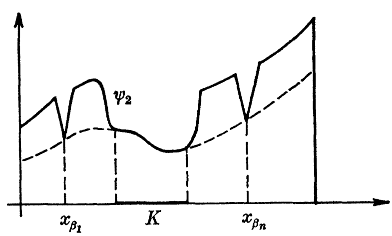

Fig. 4.

2. En rajoutant à ψ, en dehors d'un voisinage de K, une grande constante, sauf aux points $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_n} \in [0,1] \setminus K$ on fabrique ψ_2 avec $\pi(\psi_2) > 0$. (Cf. Fig. 4.) La démonstration précise est technique bien que facile. Nous la laissons au lecteur.

Le convexe compact X_0 nous permet maintenant de voir que certaines des implications qu'on aurait pu espérer étendre, à partir du théorème 13, au cas de la dimension infinie, sont fausses.

Théorème 28. a) *Il existe un convexe compact métrisable X_0 qui n'est pas un simplexe, qui ne vérifie pas* (E), *mais tel que* :

1° *les propriétés* (A) *et* (B) *sont vérifiées*;

2° *pour tout compact $K \subset \mathscr{E}(X)$, $\overline{\mathrm{co}}(K)$ est une face fortement archimédienne.*

b) *Il existe un convexe compact X_1, métrisable, qui n'est pas un simplexe, et qui vérifie la propriété* (F_2).

Démonstration. a) Cela résulte directement de l'étude que nous venons de faire de X_0. Pour la propriété (B), il suffit de remarquer que si $\mathscr{E}(Y) \subset \mathscr{E}(X_0)$, alors $\mathscr{E}(Y) = K$ est compact, et $Y = \overline{\mathrm{co}}(K) = F_K$ est bien une face.

b) On trouvera ce contre-exemple dans [3]. De plus, on verra au § 6 un autre exemple d'un convexe compact vérifiant (F_2), et qui n'est pas un simplexe.

On voit en particulier que dans l'énoncé du Théorème 16,b) on ne peut supprimer simultanément l'hypothèse d'uniformité pour les caractéristiques et celle que les F_K sont des simplexes, même si cette dernière reste vraie pour tout $K \neq \mathscr{E}(X)$.

De plus, le carré unité de R^2 montre que, même en dimension finie, toutes les faces fermées d'un convexe compact peuvent être uniformément fortement archimédiennes sans que celui-ci soit un simplexe.

En fait, dès que l'on supprime, dans l'énoncé du théorème 16b) la condition d'uniformité des caractéristiques, sa conclusion devient fausse. C'est ce que nous allons voir au paragraphe suivant.

6. Deux autres exemples.

Définition 29. *Soit* N *l'ensemble* $\{1,2,3,\ldots\}$, *et soit* $\overline{\mathsf{N}} = \mathsf{N} \cup \{\omega\}$ *le compactifié d'Alexandrof de* N. *On pose* $Z = \overline{\mathsf{N}} \cup \{a,b\}$, *espace compact où* a *et* b *sont isolés. Soit* $\bar{\omega}$ *la mesure* $\delta_\omega - \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_b)$, *et* π *la mesure* $\pi^+ - \pi^-$, *où*

$$\pi^+ = \textstyle\sum_{n \geq 1} 2^{-n} \delta_{2n} \quad et \quad \pi^- = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \delta_{2n-1} .$$

On définit le sous-espace H *de* $C(Z)$ *par* $H = \pi^{-1}(0) \cap \bar{\omega}^{-1}(0)$. *Muni de la norme uniforme,* H *est un espace de Banach. De plus il contient les constantes.*

On notera X_2 *le convexe compact* $H_1'^{+}$ *de* H' *muni de la topologie faible* $\sigma(H',H)$. *Il est évidemment métrisable.*

A la différence du convexe compact X_0, l'ensemble $\mathscr{E}(X_2)$ n'est pas fermé, comme nous allons le voir.

Lemme 30. a) *H est un sous-espace séparant de Z. Pour tout $x_0 \in Z \setminus \{\omega\}$, il existe une fonction f de H telle que $f(x_0) = 1$ et $f(x) < 1$ pour tout x de Z distinct de x_0.*

b) *Tout compact K inclus dans $Z \setminus \{\omega\}$ est fini. Si A et B sont les deux ensembles d'une partiton d'un tel compact K, il existe f dans H telle que $f = 0$ sur A et $f = 1$ sur B.*

Nous omettons la démonstration de ce lemme, qui ne présente aucune difficulté.

PROPOSITION 31. a) *L'ensemble des points extrémaux de X_2 est isomorphe à $Z \setminus \{\omega\}$ par l'injection canonique de Z dans $H_1'^+ : x \rightsquigarrow \delta_x$.*

b) *Le convexe compact X_2 n'est pas un simplexe.*

DÉMONSTRATION. Le premier point résulté du lemme 30. Le deuxième résulte du premier et du fait que les mesures π^+ et π^- sur X_2, maximales au sens de Choquet car portées par $\mathscr{E}(X_2)$, ont même barycentre.

THÉORÈME 32. *Il existe un convexe compact métrisable X_2, qui n'est pas un simplexe, et qui vérifie pourtant la propriété suivante:*

pour tout compact $K \subset \mathscr{E}(X_2)$, $\overline{\mathrm{co}}(K)$ est une face, fortement archimédienne, et qui est un simplexe.

De plus, X_2 ne vérifie pas la propriété (B) (*alors qu'il vérifie la propriété* (A)).

DÉMONSTRATION. Bien entendu, il s'agit du convexe compact X_2 de la définition 29.

1. Soit $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un compact inclus dans $Z \setminus \{\omega\}$. Alors les points $x_1, \ldots, x_n$ sont affinement indépendants d'après le lemme 30b). Donc l'ensemble $\overline{\mathrm{co}}(K)$ est un simplexe.

2. Soit x un point de $F_K = \overline{\mathrm{co}}(K)$, et supposons que $x = \frac{1}{2}(y+z)$, où y et z appartiennent à X_2. En termes de mesures, si x, y, z sont barycentres de mesures μ, ν, θ portées par $\mathscr{E}(X_2)$, on a donc:

$$\mu = \tfrac{1}{2}(\nu + \theta) + \alpha\pi + \beta\bar{\omega}, \quad \alpha, \beta \text{ réels}, \ \mu(K) = 1 .$$

Comme μ, ν, θ et π ne chargent pas le point ω, on voit que $\beta = 0$. Sur l'ensemble $\mathscr{E}(X_2) \setminus (K \cup \{a, b\})$, on a $0 = \frac{1}{2}(\nu + \theta) + \alpha\pi$. Or cet ensemble contient au moins un nombre pair et un nombre impair (et même, une infinité). Donc, sur cet ensemble, π n'est pas de signe constant. Comme $\frac{1}{2}(\nu + \theta)$ est positive ou nulle, on en déduit que $\alpha = 0$. On a donc la relation entre mesures de $M_1{}^+(Z)$: $\mu = \frac{1}{2}(\nu + \theta)$. Comme μ est portée par K, il en est de même de ν et θ, donc y et z appartiennent à F_K. Cet ensemble est donc une face.

3. Soit K compact inclus dans $\mathscr{E}(X_2)$, et soit f de $C(K)$ (c'est-à-dire la donnée d'une fonction de $A(F_K)$, puisque F_K est un simplexe de Bauer), et $g_1, \ldots, g_p$ de H, telles que $f \geqq g_{i|K}$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Posons

$$\varphi = \sup(g_1, \ldots, g_p) ,$$

et soit $K_1 = K \setminus \{a, b\}$, et $K' = \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ un compact contenant K_1. Définissons f' sur K' par $f' = f$ sur K_1, et $f' = \varphi$ sur $K' \setminus K_1$. Et enfin, soit α la valeur de $\pi_{|K'}(f')$.

Nous allons définir un prolongement $\tilde{f}$ de f', qui prolongera en fait f, qui appartiendra à H, et tel que $\tilde{f} \geqq \varphi$. Nous posons:

$$\tilde{f}(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \in K\,, \\ \varphi(a) & \text{si } a \notin K\,, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(b) = \begin{cases} f(b) & \text{si } b \in K\,, \\ \varphi(b) & \text{si } b \notin K\,, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \tfrac{1}{2}(\tilde{f}(a)+\tilde{f}(b))\,,$$

$$\tilde{f} = f' \text{ sur } K'\,,$$

$$\tilde{f}(2n+1) = \varphi(2n+1)+A\,,$$

$$\tilde{f}(2n+2) = \varphi(2n+2)+B\,,$$

où A et B sont positifs et choisis pour que

$$2^{-(n+1)}(\tilde{f}(2n+2)-\tilde{f}(2n+1))+\alpha = 0$$

pour tout $p > n+1$,

$$\tilde{f}(2p) = \tilde{f}(2p-1) = \sup[\varphi(2p),\varphi(2p-1),\tilde{f}(\omega)]\,.$$

On voit facilement que $\tilde{f}$ répond aux conditions imposées ($\tilde{f} \in H$, $\tilde{f}_{|K} = f$, $\tilde{f} \geqq \varphi$). Donc F_K est fortement archimédienne.

Remarquons que plus card$K$ est grand, plus la caractéristique de F_K est grande (p.ex., si K contient l'ensemble des nombres inférieurs ou égaux à $2n$, sa caractéristique est supérieure à 2^{n-2}).

4. Notons P l'ensemble des nombres pairs non nuls, et I l'ensemble des nombres impairs. Soit K un compact de Z, vérifiant les conditions:

$$a,b,\omega \in K, \quad P \subset K\,,$$
$$K \cap I \neq \emptyset, \quad I \setminus K \neq \emptyset\,.$$

Alors $Y = \overline{\text{co}}(K)$ est un convexe inclus dans X_2, et on a : $\mathscr{E}(Y) = K \setminus \{\omega\} \subset \mathscr{E}(X)$. Pourtant, nous allons voir que Y n'est pas une face.

Le point x_0, barycentre de π^+ et π^-, appartient à Y, car π^+ est porté par P, et $P \subset \mathscr{E}(Y)$. Soient y et z les barycentres respectifs des mesures $\pi^-{}_{|I\setminus K}/\pi^-(I\setminus K)$ et $\pi^-{}_{|K}/\pi^-(K)$. Alors on a :

$$x_0 = \pi^-(I\setminus K)y+\pi^-(K)z\,.$$

Pourtant, y n'appartient pas à Y, sinon on aurait

$$\pi^-{}_{|I\setminus K} = \mu+\lambda\pi\,,$$

où μ serait une mesure positive portée par $K \setminus \{\omega\}$; ceci serait absurde, car on aurait alors $0 = \mu + \lambda\pi_{|K \setminus \{\omega\}}$, ce qui entrainerait, par le même argument qu'au point 2 de la démonstration, que $\lambda = 0$, $\mu = 0$, et $\pi^-(K) = 1$, c'est-à-dire $I \subset K$, ce qui contredit le choix de K.

Donc le point x_0 de Y est barycentre de deux points de X_2 dont l'un n'est pas dans Y, et par suite Y n'est pas une face. Donc X_2 ne vérifie pas la propriété (B).

Le théorème 32 montre qu'un convexe compact standard X peut vérifier les propriétés (A) et (E) sans être un simplexe. On peut se demander ce qui se passe si l'on rajoute une propriété supplémentaire. Si l'on rajoute (F_1), alors, d'après le théorème 16a), X est un simplexe. Mais la question se pose si on rajoute seulement la propriété (F_2).

Le contre-exemple qui suit donne une réponse à ce problème.

DÉFINITION 33. *Soit Z le compact $[0,1] \cup \{a,b\}$, où a et b sont deux points distincts isolés. Soit $\bar{\omega}$ la mesure $\delta_1 - \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_b)$, et soient π^+ et π^- deux mesures positives de masse 1 sur $[0,1]$, étrangères, ne chargeant aucun point, et chargeant tout ouvert ; on pose $\pi = \pi^+ - \pi^-$.*

Soit H le sous-espace $\pi^{-1}(0) \cap \bar{\omega}^{-1}(0)$ de $C(Z)$. Muni de la norme uniforme, H est un espace de Banach ; de plus, il contient les fonctions constantes.

On note X_3 le convexe compact $H_1'^+$ de H'. Il est métrisable.

On montrera facilement, comme pour les exemples précédents le résultat suivant:

PROPOSITION 34. a) *L'ensemble des points extrémaux de X_3 est isomorphe à $[0,1] \cup \{a,b\}$ par l'injection canonique de Z dans $H_1'^+$: $x \rightsquigarrow \delta_x$.*

b) *X_3 n'est pas un simplexe.*

Le convexe compact X_3 est le contre-exemple cherché :

THÉORÈME 35. *Il existe un convexe compact métrisable X_3, qui n'est pas un simplexe, mais qui vérifie pourtant les propriétés suivantes :*

a) *Pour tout compact $K \subset \mathscr{E}(X_3)$, $\overline{\mathrm{co}}(K)$ est une face qui est un simplexe (propriétés (A) et (E)).*

b) *Tout convexe compact $Y \subset X_3$, tel que $\mathscr{E}(Y) \subset \mathscr{E}(X_3)$, est une face de X_3 (propriété (B)).*

c) *Tout point extrémal de X_3 est une face complémentable (propriété (F_2)).*

d) *Pour tout compact $K \subset \mathscr{E}(X_3)$, la face $\overline{\mathrm{co}}(K)$ est fortement archimédienne.*

Démonstration. a) Ce point se démontre de façon tout à fait analogue à celle utilisée pour les contre-exemples précédents, en utilisant le fait que pour tout compact $K \subset \mathscr{E}(X_3)$, on a

$$\pi^+[\mathscr{E}(X_3) \setminus K]\, \pi^-[\mathscr{E}(X_3) \setminus K] > 0 .$$

b) Ce point ne présente aucune difficulté, si l'on remarque que $\overline{\mathscr{E}(Y)} = \mathscr{E}(Y)$ ou $\mathscr{E}(Y) \cup \{1\}$.

c) On suit ici la méthode qu'Alfsen et Andersen utilisent dans [3] pour étudier le convexe compact X_1 du théorème 28b) : on montre facilement que, pour tout x appartenant à $\mathscr{E}(X_3)$, l'ensemble G_x des barycentres des mesures de $M_1{}^+(X_3)$ portées par $\mathscr{E}(X_3) \setminus \{x\}$ est la face supplémentaire de la face $\{x\}$ (on utilise le fait que $|\pi|(\{x\}) = 0\ \forall x \in Z$).

d) Une méthode tout à fait analogue à celle utilisée pour démontrer le lemme 27 prouve le résultat (on utilise des compacts portant les mesures π^+ et π^- à ε près, et des voisinages ouverts de ces compacts, pour construire des fonctions continues convenables).

Remarque 36. Pour construire les mesures π^+ et π^-, on peut remarquer qu'il existe un ensemble E de $[0,1]$, Lebesgue-mesurable, tel que pour tout intervalle ouvert J de $[0,1]$ on ait

$$\int_{J \cap E} dx > 0 \quad \text{et} \quad \int_{J \cap CE} dx > 0 .$$

On pose alors $\pi^+ = 1_E dx / \int_E dx$ et $\pi^- = 1_{CE} dx / \int_{CE} dx$.

7. Le critère principal en dimension infinie, pour un convexe compact standard.

Remarquons d'abord que la condition du théorème 16a) en termes de topologie faciale, peut s'énoncer : *tout compact ordinaire K de $\mathscr{E}(X)$ est fermé pour la topologie faciale, et la trace de cette topologie sur K est séparée,* c'est-à-dire la conjonction des propriétés (C) et (D) (car, lorsque (C) est vraie, (E) et (D) sont équivalentes : cf. démonstration du lemme 12).

Nous allons voir qu'on peut en fait supprimer la condition (D), en utilisant une méthode suggérée par la démonstration du point d) du lemme 24.

Théorème 37. *Soit X un convexe compact* standard. *Si, pour tout compact K inclus dans $\mathscr{E}(X)$, $\overline{\mathrm{co}}(K)$ est une face qui est de plus complémentable, alors X est un simplexe. Une condition équivalente est que tout* *compact ordinaire de $\mathscr{E}(X)$ soit fermé pour la topologie faciale* (c'est-à-dire $(S) \Leftrightarrow (C') \Leftrightarrow (C)$ *si X est standard*).

Démonstration. Nous allons raisonner par l'absurde, et supposer que X ne soit pas un simplexe. Il existe alors un point m de X, barycentre de deux mesures maximales distinctes μ et ν, que l'on peut toujours supposer étrangères (sinon, on les remplace par des multiples de $(\mu-\nu)^+$ et $(\mu-\nu)^-$).

Nous allons montrer que pour un compact K_0 de $\mathscr{E}(X)$, convenablement choisi, la face $F_{K_0}=\overline{\mathrm{co}}\,(K_0)$ n'est pas complémentable, ce qui sera la contradiction cherchée.

a) Si K est un compact inclus dans $\mathscr{E}(X)$, la face $F_K{}'$ supplementaire de $F=F_K$ est l'ensemble des barycentres des mesures de $M_1{}^+(X)$ portées par $\mathscr{E}(X)\setminus K$. En effet, d'après la définition 4, la fonction $\hat{1}_F$ est affine semi-continue supérieurement, et $\hat{1}_F{}^{-1}(0)=F_K{}'$. Soit alors x un point de $F_K{}'$, et soit μ une mesure maximale de barycentre x. Alors $\mu(\hat{1}_F)=\hat{1}_F(x)=0$, donc, puisque $0\leqq\hat{1}_F\leqq 1$, μ est portée par $\hat{1}_F{}^{-1}(0)=F_K{}'$. Elle est donc portée par $F_K{}'\cap\mathscr{E}(X)=\mathscr{E}(X)\setminus K$. Inversement, si μ est portée par $\mathscr{E}(X)\setminus K$, donc par $F_K{}'$, $\mu(\hat{1}_F)=0$, donc $\hat{1}_F[b(\mu)]=0$, et $b(\mu)$ appartient bien à $F_K{}'$.

b) les mesures μ et ν étant portées par deux boréliens disjoints inclus dans $\mathscr{E}(X)$, il existe un compact $K_0\subset\mathscr{E}(X)$ telque $\mu(K_0)=0$, $\nu(K_0)>0$ et $\nu[\mathscr{E}(X)\setminus K_0]>0$ (car ν n'est pas à support ponctuel, sinon $\mu=\nu=\delta_a$). Posons $\nu_1=\nu_{|K_0}/\nu(K_0)$ et $\nu_2=\nu_{|\mathscr{E}(X)\setminus K_0}/(1-\nu(K_0))$; alors ν_1 et $\nu_2\in M_1{}^+(X)$, et on a:

$$m = \nu(K_0)b(\nu_1) + [1-\nu(K_0)]b(\nu_2) = b(\nu)\,.$$

Donc m n'appartient pas à F'_{K_0} (car $\nu(K_0)>0$). Mais on a aussi

$$m = b[\mu_{|\mathscr{E}(X)\setminus K_0}] = b(\mu)\,.$$

D'après la première partie de la démonstration, si F_{K_0} est complémentable, m appartient à F'_{K_0}. D'où une contradiction.

Corollaire 38. *Soit X un convexe compact standard. Si X vérifie la propriété* (F_2) *et l'axiome de Störmer, X est un simplexe de Bauer.*

Démonstration. En effet, si chaque point de $\mathscr{E}(X)$ est une face complémentable, et si X vérifie l'axiome de Störmer, pour tout sous-ensemble K de $\mathscr{E}(X)$ l'ensemble $\overline{\mathrm{co}}\,(K)$ est une face complémentable. Donc X est un simplexe, et, d'après le lemme 7, c'est un simplexe de Bauer.

Ce corollaire améliore le corollaire 17, puisque l'hypothèse (E) est supprimée.

8. Conclusion et problemes ouverts.

En résumé, pour un convexe compact standard, on peut établir le schéma suivant, où le symbole « $\rightarrow$ » désigne une implication, le symbole « $\dashrightarrow\!\!\!\!\!\!\mid\;\;$ » la fausseté de l'implication correspondante, et une accolade la conjonction des propriétés qu'elle regroupe :

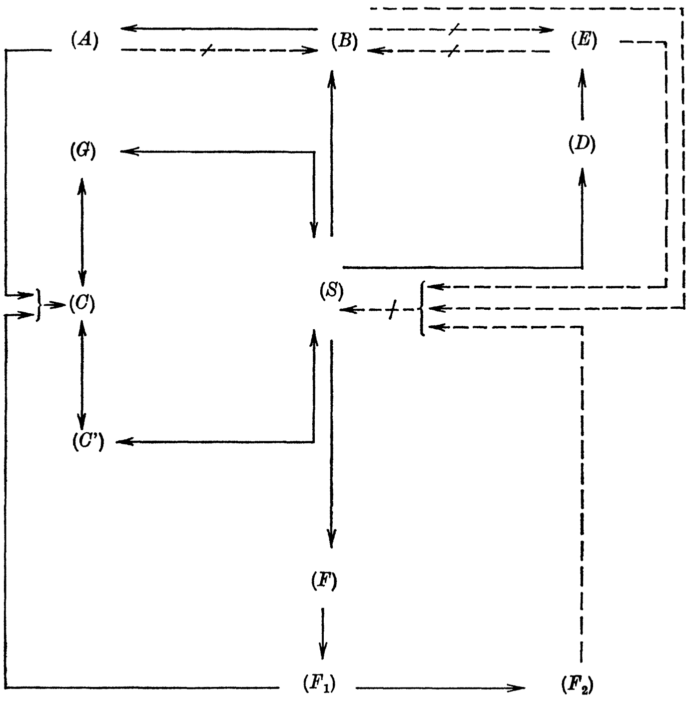

Fig. 5.

On n'a pas fait figurer sur ce schéma les implications et non-implications résultant formellement de celles déjà indiquées (telles, par exemple, que : {(B) et (F)} $\rightarrow$ (S), (A) $\not\dashrightarrow$ (E), (B) $\not\dashrightarrow$ (S), (E) $\not\dashrightarrow$ (S), etc.).

Il faut rajouter aux implications de ce schéma la caractérisation au moyen des faces uniformément fortement archimédienne (théorème 16b)).

Parmi les problèmes ouverts, citons:

Les implications $(F_1) \Rightarrow (S)$ ou $(F) \Rightarrow (S)$, $(F_1) \Rightarrow (F)$, $(D) \Rightarrow (S)$, sont-elles vraies ?

La conclusion du théorème 16b) subsiste-t-elle si on supprime l'hypothèse que les F_K sont des simplexes ?

Les théorèmes 16 et 37 demandent-ils vraiment la condition que X soit standard ? (Alfsen a montré que la condition était « nécessaire » pour la validité du théorème 14 : il a donné l'exemple d'un convexe compact qui n'est pas un simplexe, mais qui vérifie l'hypothèse du théorème 14 ; ce convexe n'est pas métrisable. Voir les sections marquées par une astérisque dans chap. II § 3 de la monographie par E. M. Alfsen: *Compact convex sets and boundary integrals* (Ergebnisse Math. Grenzgebiete 57) Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1971).

BIBLIOGRAPHIE

0. Erik Alfsen, *On the geometry of Choquet simplexes*, Math. Scand. 15 (1964), 97–110.
1. Erik Alfsen, *On the decomposition of a Choquet simplex into a direct convex sum of complementary faces*, Math. Scand. 17 (1965), 169–176.
2. Erik Alfsen, *Facial structure of compact convex sets*, Proc. London Math. Soc. 18 (1968), 385–404.
3. Erik Alfsen and Tage Bai Andersen, *Split faces of compact convex sets*, Aarhus Universitet, Preprint series 1968–1969, no. 32.
4. Heinz Bauer, *Kennzeichnung kompakter Simplexe mit abgeschlossener Extremalpunktmenge*, Archiv Math. 14 (1963), 415–421.
5. Nicolas Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, ch. I et II (Act. Sci Ind. 1189), Hermann, Paris, 1953.
6. Gustave Choquet et Paul-André Meyer, *Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 13 (1963), 139–154.
7. David Albert Edwards, *Séparation des fonctions réelles définies sur un simplexe de Choquet*, C. R. Acad. Sci. Paris 261 (1965), 2798–2800.
8. Edward Effros, *Structure in simplexes*, Acta Math. 117 (1967), 103–121.
9. Robert Phelps, *Lectures on Choquet's theorem* (Van Nostrand Math. Studies 7), D. van Nostrand Company, Princeton · Toronto · New York · Londonn, 1966.
10. Robert Phelps, *Infinite dimensional compact convex polytopes*, Math. Scand. 24 (1969, 5–26.
11. Marc Rogalski, *Espaces de Banach ordonnés, simplexes, frontières de Šilov et problème de Dirichlet*, Séminaire Choquet: Initiation à l'analyse, 5ème année, 1965–1966, no. 12, 62 pages.
12. Marc Rogalski, *Etude du quotient d'un simplexe par une face fermée et application à un théorème de Alfsen; quotient par une relation d'équivalence*, Séminaire Brelot–Choquet–Deny: Théorie du Potentiel, 12ème année, 1967–1968, no. 2, 25 pages.

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY, 91 ORSAY, FRANCE