MATH. SCAND. 28 (1971), 226–232

IRRATIONALITÄT UND TRANSZENDENZ GEWISSER REIHEN

PETER BUNDSCHUH

1. Einführung.

k sei im folgenden stets eine natürliche Zahl $\geqq 2$. Ferner seien die reellen Zahlen x, y so gewählt, daß $y \neq 0$ und $|x| < |y|$ ist. Dann konvergieren die Reihen

$$\sum_{n \geqq 0} x^{k^n}(y^{k^n} - x^{k^n})^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n \geqq 0} x^{k^n}(y^{k^n} + x^{k^n})^{-1} .$$

Ihre Werte seien mit $G_k(xy^{-1})$ bzw. $H_k(xy^{-1})$ bezeichnet.

Schwarz [8] zeigte die Irrationalität von G_k für $y=t$, t eine natürliche Zahl $\geqq 2$ und $x=b$, b eine natürliche Zahl $< t^{1-1/k}$. Ferner bewies er Tranzendenzaussagen über G_k, indem er die Approximation dieser Irrationalitäten durch rationale Zahlen untersuchte.

Die Frage nach der arithmetischen Natur von $H_k(bt^{-1})$ blieb in [8] offen. Wir wollen diese Lücke hier schließen und darüber hinaus noch einige verwandte Ergebnisse mitteilen.

Zunächst behaupten wir den

Satz 1. *$t \geqq 2$ und $b \neq 0$ seien ganzrational. Ist $|b| < t^{1-1/k}$, falls entweder $k=2$ oder k ungerade, bzw. $|b| < t^{1-1/(k-1)}$, falls $k \geqq 4$ und gerade, so ist $H_k(bt^{-1})$ irrational.*

Dieser Satz beantwortet die in [8] gestellte Frage nach der Irrationalität von $H_k(bt^{-1})$. Er ließe sich — wie übrigens auch Theorem 1 von [8] — für gewisse von 0 verschiedene rationale t und b formulieren. Jedoch erhält man dadurch nichts Neues, da die einzelnen Summanden von $G_k(xy^{-1})$ bzw. $H_k(xy^{-1})$ die Eigenschaft haben, daß ihre Zähler- und Nennerpolynome in x und y homogen von derselben Dimension sind.

Über die bloße Irrationalität von $H_k(bt^{-1})$ hinaus können wir jedoch sehr viel mehr über die arithmetische Natur dieser Zahlen aussagen, wenn wir bei festem $t \geqq 2$ die Menge der zugelassenen ganzen $b \neq 0$ gegenüber Satz 1 noch etwas einschränken.

Eingegangen am 12. September 1969.

Satz 2. *$t \geqq 2$ und $b \neq 0$ seien ganzrational und $\varepsilon > 0$ sei beliebig klein vorgegeben. Ist $|b| < t^{1-(2+\varepsilon)/k}$ im Fall $k \geqq 3$ und ungerade bzw. $|b| < t^{1-(2+\varepsilon)/(k-1)}$ im Fall $k \geqq 4$ und gerade, so ist $H_k(bt^{-1})$ transzendent.*

An dieser Stelle soll angemerkt werden, daß sich auch p-adische Analoga zu den Sätzen 1 und 2 beweisen lassen.

Bisher wurden nur qualitative Aussagen über die $G_k(bt^{-1})$ bzw. $H_k(bt^{-1})$ gemacht, indem Irrationalität oder sogar Transzendenz behauptet wurde. Wir wollen jetzt noch quantitative Aussagen machen, indem wir Maße für die Irrationalität dieser Zahlen angeben. Zunächst gilt für die von Schwarz untersuchten $G_k(bt^{-1})$ der

Satz 3. *Es seien $t \geqq 2$ und $b \neq 0$ ganzrationale Zahlen mit $|b| < t^{1-1/k}$, und $\omega = \omega(k,t,b)$ sei definiert durch $|b| = t^{1-1/k-\omega}$* (dann ist $0 < \omega \leqq 1 - 1/k$); *schließlich sei $\delta > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es ein $c = c(k,t,b,\delta) > 0$ derart, daß für alle rationalen p/q mit $q > 0$ gilt*

$$|G_k(bt^{-1}) - p/q| > cq^{-(k+k/\omega+\delta)}.$$

Satz 3 erlaubt es, die Schwarzsche Transzendenzaussage ([8, Theorem 2]) zu verschärfen zu

Korollar 1. *Seien $k \geqq 3$, $t \geqq 2$ und $b \neq 0$ ganzrational und sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgegeben. Ist $|b| < t^{1-(2+\varepsilon)/k}$, so ist $G_k(bt^{-1})$ transzendent, aber keine Liouville-Zahl.*

Für die von uns hier untersuchten $H_k(bt^{-1})$ lautet die zu Satz 3 analoge Aussage folgendermaßen:

Satz 4. *t und b mögen den Voraussetzungen von Satz 1 genügen; $\omega = \omega(k,t,b)$ sei definiert durch $|b| = t^{1-1/k-\omega}$, falls entweder $k = 2$ oder k ungerade, bzw. durch $|b| = t^{1-1/(k-1)-\omega}$, falls $k \geqq 4$ und gerade; schließlich sei $\delta > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gibt es $c^{(1)}, c^{(2)} > 0$, die beide nur von k, t, b, δ abhängen, derart, daß für alle rationalen p/q mit $q > 0$ gilt*

$$|H_k(bt^{-1}) - p/q| > \begin{cases} c^{(1)} q^{-(k+k/\omega+\delta)}, & \textit{falls entweder } k = 2 \textit{ oder } k \textit{ ungerade} \\ c^{(2)} q^{-(k+k^2/(k-1)\omega+\delta)}, & \textit{falls } k \geqq 4 \textit{ und gerade}. \end{cases}$$

Hieraus folgt sofort das

Korollar 2. *Seien $k \geqq 3$, $t \geqq 2$ und $b \neq 0$ ganzrational und sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgegeben. Ist $|b| < t^{1-(2+\varepsilon)/k}$ im Fall $k \geqq 3$ und ungerade bzw. $|b| < t^{1-(2+\varepsilon)/(k-1)}$ im Fall $k \geqq 4$ und gerade, so ist $H_k(bt^{-1})$ eine transzendente, aber keine Liouville-Zahl.*

2. Beweise der Sätze 1 und 2.

Beweis von Satz 1. Indem man den Beweis von Theorem 1 in [8] nochmals ansieht, erkennt man leicht, daß die Aussage dieses Satzes nicht nur für die positiven, sondern auch für die negativen ganzen b mit $|b| < t^{1-1/k}$ gilt. Damit und wegen der sofort zu bestätigenden Relation

$$H_2(bt^{-1}) = -G_2(bt^{-1}) + 2b/(t-b) \tag{0}$$

folgt Satz 1 für $k=2$.

Sei jetzt $k \geqq 3$. Wir machen die Annahme, $H_k(bt^{-1})$ sei für ein Tripel k, t, b rational, etwa $H_k(bt^{-1}) = r/s$ mit ganzen r, s und $s > 0$. Setzen wir abkürzend

$$R_N = \sum_{n>N} b^{k^n}(t^{k^n}+b^{k^n})^{-1}, \quad N = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

so bestätigt man leicht

$$|R_N| \leqq c_1(|b|t^{-1})^{k^{N+1}} \tag{2}$$

mit $c_1 = c_1(t,b) > 0$. Ferner ist offensichtlich der Ausdruck

$$J_N r - s\sum_{n=0}^{N} b^{k^n} J_N (t^{k^n}+b^{k^n})^{-1} = s J_N R_N \tag{3}$$

ganzrational und $\neq 0$, wenn $J_N > 0$ so bestimmt ist, daß $J_N(t^{k^n}+b^{k^n})^{-1}$ ganz ist für alle $n = 0, \ldots, N$; solch ein J_N haben wir zu ermitteln.

Ist k ungerade, so gilt $(t^{k^n}+b^{k^n}) \mid (t^{k^N}+b^{k^N})$ für alle $n \leqq N$; wir können hier also $J_N = t^{k^N}+b^{k^N}$ wählen. Ist k gerade, so wählen wir einfach $J_N = \prod_{n=0}^{N}(t^{k^N}+b^{k^N})$. Damit bekommen wir aus (3) wegen (2) im ersten Fall

$$1 \leqq s\,2t^{k^N} c_1(|b|t^{-1})^{k^{N+1}} = 2sc_1(|b|t^{-(1-1/k)})^{k^{N+1}}.$$

Wegen $|b|t^{-(1-1/k)} < 1$ kann diese Abschätzung aber nicht bestehen, wenn N genügend groß gewählt wird.

Im zweiten Fall schließen wir aus (3) und (2) analog auf

$$1 \leqq s\,2^{N+1} t^{(k^{N+1}-1)/(k-1)} c_1(|b|t^{-1})^{k^{N+1}} < 2^{N+1} s c_1(|b|t^{-(1-1/(k-1))})^{k^{N+1}}$$

und auch dies kann für genügend großes N nicht sein, da $|b|t^{-(1-1/(k-1))} < 1$ vorausgesetzt ist, was Satz 1 beweist.

Beweis von Satz 2. Wie beim Transzendenznachweis für $G_k(bt^{-1})$ wird hier der Thue–Siegel–Rothsche Approximationssatz verwendet [6, S. 2]: *Ist α eine algebraische Irrationalzahl und besitzt die Ungleichung*

$$|\alpha - p/q| < q^{-\varkappa} \tag{4}$$

unendlich viele Lösungen $p/q = p_N/q_N$ mit ganzen p_N und q_N ($q_N > 0$), so ist $\varkappa \leqq 2$.

O.B.d.A. können wir $0 < \varepsilon < 1$ voraussetzen; dann ist $(2+\varepsilon)/k < 1$ für $k \geqq 3$ und $(2+\varepsilon)/(k-1) < 1$ für $k \geqq 4$. Ist $k \geqq 3$ und ungerade, so setzen wir

$$q_N = t^{k^N} + b^{k^N}, \quad p_N = \sum_{n=0}^{N} b^{k^n} (t^{k^N} + b^{k^N})(t^{k^n} + b^{k^n})^{-1} . \tag{5a}$$

Im Fall $k \geqq 4$ und gerade setzen wir

$$q_N = \prod_{n=0}^{N} (t^{k^n} + b^{k^n}), \quad p_N = \sum_{n=0}^{N} b^{k^n} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{N} (t^{k^m} + b^{k^m}) . \tag{5b}$$

Nun machen wir die Annahme, die Irrationalzahl $\alpha = H_k(bt^{-1})$ sei algebraisch. Dann folgt aus (5a) mit (2) und $|b| < t^{1-(2+\varepsilon)/k}$:

$$|\alpha - p_N/q_N| = |R_N| \leqq c_1(|b|t^{-1})^{k^{N+1}} < c_1 t^{-(2+\varepsilon)k^N} < 2^{2+\varepsilon} c_1 q_N^{-(2+\varepsilon)} ,$$

wobei die letzte Abschätzung wegen $q_N < 2t^{k^N}$ richtig ist. Daher ist für $N \geqq N_1(k,t,b,\varepsilon)$

$$|\alpha - p_N/q_N| < q_N^{-(2+\frac{1}{2}\varepsilon)} ,$$

so daß die Ungleichung (4) unendlich viele Lösungen p_N/q_N, $N \geqq N_1$, mit $\varkappa = 2 + \frac{1}{2}\varepsilon$ besitzt. Daher muß α transzendent sein.

Analog schließt man für gerades $k \geqq 4$ aus (5b), (2) und $|b| < t^{1-(2+\varepsilon)/(k-1)}$ auf

$$|\alpha - p_N/q_N| < c_1 t^{-(2+\varepsilon)k^{N+1}/(k-1)} < 2^{(2+\varepsilon)(N+1)} c_1 q_N^{-(2+\varepsilon)} ,$$

und auch hier ist die letzte Zahl $\leqq q_N^{-(2+\frac{1}{2}\varepsilon)}$ für $N \geqq N_2(k,t,b,\varepsilon)$, wenn man noch $q_N \geqq c_2 t^{k^{N+1}/(k-1)}$ mit $c_2 = c_2(k,t,b) > 0$ berücksichtigt.

3. Beweis von Satz 4.

Einen Beweis von Satz 3 geben wir hier nicht, da er völlig analog verläuft wie der im folgenden ausgeführte Beweis von Satz 4.

Beweis von Satz 4. Ist $k = 2$, so folgt die Aussage des Satzes 4 unmittelbar aus Satz 3, wenn man wieder die Formel (0) benutzt.

Sei jetzt $k \geqq 3$ und ungerade. Die p_N und q_N seien wie in (5a) gewählt und R_N wie in (1). Aus (1) sieht man sofort, daß $R_N \neq R_{N+1}$ für alle N gilt. Daher ist auch $p_N q_{N+1} - q_N p_{N+1} \neq 0$ für alle N.

p und $q > 0$ seien beliebig ganzrational; wir haben für alle N

$$H_k(bt^{-1}) - p/q = (p_N q - q_N p)/q_N q + R_N . \tag{6}$$

Wegen unserer letzten Bemerkung ist $p_N q - q_N p$ oder $p_{N+1} q - q_{N+1} p$ für jedes N eine von 0 verschiedene ganze Zahl. Ist $p_N q - q_N p \neq 0$, so folgt aus (6) und (2)

$$(7) \qquad |H_k(bt^{-1}) - p/q| \geqq 1/q_N q - |R_N| > \tfrac{1}{2} q t^{k^N} - c_1(|b| t^{-1})^{k^{N+1}} .$$

Ist aber $p_N q - q_N p = 0$, so ist $p_{N+1} q - q_{N+1} p \neq 0$ und also

$$(8) \qquad |H_k(bt^{-1}) - p/q| > \tfrac{1}{2} q t^{k^{N+1}} - c_1(|b| t^{-1})^{k^{N+2}} .$$

Wir machen nun die Satz 4 widersprechende Annahme, die Ungleichung

$$(9) \qquad |H_k(bt^{-1}) - p/q| \leqq q^{-(k+k/\omega+\delta)}$$

habe unendlich viele Lösungen p/q mit $q>0$. Es ist klar, daß es dann solche mit beliebig großem q geben muß. Jedem zu einer derartigen Lösung von (9) gehörigen q, das größer als $(4c_1)^{-1}|b|^{-1}t^{1-1/k}$ ist, ordnen wir eindeutig ein $N = N(q) \geqq 0$ zu vermöge

$$(10) \qquad (4c_1)^{-1}(|b|^{-1}t^{1-1/k})^{k^{N(q)+1}} \geqq q > (4c_1)^{-1}(|b|^{-1}t^{1-1/k})^{k^{N(q)}}$$

oder wegen der Definition von ω gleichbedeutend damit

$$(11) \qquad (4c_1)^{-1} t^{\omega k^{N(q)+1}} \geqq q > (4c_1)^{-1} t^{\omega k^{N(q)}} .$$

Ist $p_{N(q)} q - q_{N(q)} p \neq 0$, so folgt aus (7) und (10)

$$|H_k(bt^{-1}) - p/q| \geqq c_1(|b| t^{-1})^{k^{N(q)+1}} = c_1 t^{-(1/k+\omega)k^{N(q)+1}} .$$

Ist $p_{N(q)} q - q_{N(q)} p = 0$, so können wir aus (8) und (11) folgern

$$\begin{aligned} |H_k(bt^{-1}) - p/q| &\geqq 2c_1 t^{-(1+\omega)k^{N(q)+1}} - c_1 t^{-(1+k\omega)k^{N(q)+1}} \\ &\geqq c_1 t^{-(1+\omega)k^{N(q)+1}} . \end{aligned}$$

Jedenfalls gilt also

$$(12) \qquad |H_k(bt^{-1}) - p/q| \geqq c_1 t^{-(1+\omega)k^{N(q)+1}} .$$

Andererseits folgt aus (9) und (11)

$$(13) \qquad |H_k(bt^{-1}) - p/q| \leqq c_3 t^{-(1+\omega+\delta\omega/k)k^{N(q)+1}} ,$$

wobei c_3 eine nur von k, t, b, δ abhängige positive Konstante bedeutet. Ist q (und damit wegen (11) auch $N(q)$) genügend groß, so widersprechen sich (12) und (13).

Ist $k \geqq 4$ und gerade, so hat man die p_N und q_N wie in (5b) zu wählen; daher hat man jetzt $q_N < 2^{N+1} t^{k^{N+1}/(k-1)}$ statt $q_N < 2t^{k^N}$ in (7) zu verwenden. Man hat (9) zu ersetzen durch

$$(9') \qquad |H_k(bt^{-1}) - p/q| \leqq q^{-(k+k^2/(k-1)\omega+\delta)}$$

und die Zuordnung (10) von q und $N = N(q)$ durch

$$(10') \quad (2^{N(q)+2}c_1)^{-1}(|b|^{-1}t^{1-1/(k-1)})^{k^{N(q)+1}} \geqq q > (2^{N(q)+1}c_1)^{-1}(|b|^{-1}t^{1-1/(k-1)})^{k^{N(q)}}.$$

Aus der Diskussion der beiden für $p_{N(q)}q - q_{N(q)}p$ möglichen Fälle gewinnt man analog zu (12)

$$(12') \qquad |H_k(bt^{-1}) - p/q| \geqq c_1 t^{-(k/(k-1)+\omega)k^{N(q)+1}}(1 - t^{-\omega(k-1)k^{N(q)+1}}) \geqq c_4 t^{-(k/(k-1)+\omega)k^{N(q)+1}}$$

mit $c_4 = c_4(k,t,b) > 0$. Andererseits folgt aus (9'), (10') und der Definition von ω

$$(13') \qquad |H_k(bt^{-1}) - p/q| \leqq c_5 c_6^{N(q)} t^{-(k/(k-1)+\omega+\delta\omega/k)k^{N(q)+1}},$$

wobei c_5, c_6 nur von k, t, b, δ abhängige positive Konstanten sind. (12') und (13') widersprechen sich jedoch für genügend großes q und damit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

Korollar 1 folgt unmittelbar aus Satz 3 genauso wie Korollar 2 aus Satz 4; man braucht bloß die Definition der Liouville-Zahlen (vgl. etwa [7, S. 2f.]) zu benutzen.

Zusatz bei der Korrektur.

Während der Drucklegung dieser Note erschien eine Arbeit von Mahler [5], in der er an drei alte Publikationen [2], [3], [4] aus seiner Feder erinnert. Dort hat er Transzendenzresultate für die Werte von Funktionen, die gewissen Typen von Funktionalgleichungen genügen, an algebraischen Stellen erhalten.

Nun kann man ziemlich leicht einsehen, daß die Sätze 1 und 2 der vorstehenden Note aus Mahlers früheren Ergebnissen zu folgern sind. Bedient man sich der Terminologie aus [5], so kann man sein Theorem 1 aus [5] anwenden auf die Funktion

$$H_k(z) = \sum_{h=0}^{\infty} z^{k^h}(1 + z^{k^h})^{-1};$$

hier ist $n = 1$, Ω die (1,1)-Matrix (k) und $H_k(z)$ genügt der Funktionalgleichung

$$F(\Omega z) = \frac{(1+z)F(z) - z}{(1+z)} \quad \text{mit } \Omega z = z^k.$$

Ferner ist $\Delta = (1+z)^2$; weiter konvergiert $H_k(z)$ für $|z| < 1$ und ist keine algebraische Funktion von z. Dann folgt aus Mahlers Theorem 1 aus [5] das meine obigen Sätze 1 und 2 enthaltende Resultat:

Sei z_0 eine beliebige (reelle oder komplexe) algebraische Zahl mit $0 < |z_0| < 1$. Dann ist $H_k(z_0)$ transzendent.

Darüber hinaus läßt sich aus Mahlers Theorem 2 aus [5] folgende Verallgemeinerung ableiten:

Sei m eine beliebige natürliche Zahl und z_0 eine beliebige (reelle oder komplexe) algebraische Zahl mit $0 < |z_0| < 1$. Dann sind

$$H_k(z_0), H_k'(z_0), \ldots, H_k^{(m-1)}(z_0)$$

über dem rationalen Zahlkörper algebraisch unabhängig. Speziell kann $H_k(z)$ keiner algebraischen Differentialgleichung genügen.

Leider sind die drei alten Mahlerschen Arbeiten [2–4] nicht einmal in dem sehr umfangreichen und recht vollständigen Literaturverzeichnis zu dem großen Übersichtsartikel über den Stand der Entwicklung der Theorie der transzendenten Zahlen bis 1966 von Fel'dman und Shidlovskii [1] enthalten.

LITERATUR

1. N. I. Fel'dman and A. B. Shidlovskii, *The development and the present state of the theory of transcendental numbers*, Uspehi Mat. Nauk 22 (1967) no. 3 (135), 3–81. (Russian.)
2. K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, Math. Ann. 101 (1929), 342–366.
3. K. Mahler, *Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in speziellen Punktfolgen*, Math. Ann. 103 (1930), 573–587.
4. K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendentaltranszendenter Funktionen*, Math. Z. 32 (1930), 545–585.
5. K. Mahler, *Remarks on a paper of W. Schwarz*, J. Number Theory 1 (1969), 512–521.
6. K. F. Roth, *Rational approximations to algebraic numbers*, Mathematika 2 (1955), 1–20.
7. T. Schneider, *Einführung in die transzendenten Zahlen* (Grundlehren math. Wiss. 81), Berlin · Göttingen · Heidelberg, 1957.
8. W. Schwarz, *Remarks on the irrationality and transcendence of certain series*, Math. Scand. 20 (1967), 269–274.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT, FREIBURG IM BREISGAU, DEUTSCHLAND