MATH. SCAND. 28 (1971), 265–307

K-THEORIE ALGEBRIQUE ET K-THEORIE TOPOLOGIQUE I

MAX KAROUBI et ORLANDO VILLAMAYOR

Le but de cet article est de présenter un cadre unifié pour les « K-théories » algébrique et topologique. Ce cadre est devenu une nécessité pour le développement de la K-théorie algébrique et d'autres. En particulier, le problème d'une « bonne » définition des foncteurs K^n (algébriques ou topologiques) est, semble-t-il, résolu de manière satisfaisante. La méthode proposée étant axiomatique, cette tentative va plus loin que les tentatives précédentes dont nous nous sommes inspirés d'ailleurs à maintes reprises.

Un « anneau de Banach » est un anneau A (avec ou sans élément unité) muni d'une « quasi-norme » $p\colon A \to \mathsf{R}$ satisfaisant aux axiomes usuels:

(i) $p(x)=0 \Leftrightarrow x=0$,
(ii) $p(x+y) \leqq p(x)+p(y)$,
(iii) $p(-x)=p(x)$,
(iv) $p(xy) \leqq C\,p(x)\,p(y)$,

C étant une constante indépendante de x et de y. En outre, on suppose que A est complet pour la distance $d(x,y)=p(x-y)$.

Pour tout anneau de Banach A, on peut alors définir des « groupes de Grothendieck » $K^n(A)$, $n \in \mathsf{Z}$, satisfaisant à des axiomes simples (théorèmes 5.3 et 7.7). Si A est une algèbre de Banach usuelle sur R ou C, on retrouve les définitions de [3]. Si A est un anneau muni de la « quasi-norme discrète » ($p(x)=1$ si $x \neq 0$), on retrouve pour $n>0$, les groupes K^n définis indépendamment dans [1] et [4]. Pour n négatif, les foncteurs K^n algébriques sont intimement liés aux foncteurs K_{-n} introduits dans [6].

La définition de $K^n(A)$ pour n négatif utilise de manière essentielle la notion *d'homotopie*. *A* ce point précis, nous nous sommes inspirés de [6, p. 581] et des « foncteurs de Serre » de [3, p. 179]. De même, les défini-

Reçu le 23 septembre 1970.

tions et les théorèmes proposés dans le cadre des anneaux de Banach s'étendent sans peine à celui des « catégories en groupes de Banach » de [4, p. 113]. Pour $n > 0$, on retrouve alors les résultats de [4, p. 158].

Enfin, pour conclure, signalons que l'essentiel de cet article a été résumé dans une Note parue aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [5].

1. Groupes et anneaux de Banach. Catégories en groupes de Banach.

1.1. Définition. Soit M un groupe abélien. Une quasi-norme sur M est une application $p\colon M \to \mathsf{R}^+$ satisfaisant aux axiomes suivants:

(i) $p(x) = 0 \iff x = 0$,
(ii) $p(x+y) \leqq p(x) + p(y)$,
(iii) $p(-x) = p(x)$.

Un groupe quasi-normé est un groupe abélien muni d'une quasi-norme p. On notera $p(x) = \|x\|$ lorsque la quasi-norme est claire d'après le contexte. La formule $d(x,y) = \|x-y\|$ définit alors une distance sur M qui est invariante par translation. Réciproquement, $p(x) = d(x,0)$ est déterminé par une telle distance. On dira que M est un *groupe de Banach* si M est complet lorsqu'on le munit de la distance d.

Si M et N sont deux groupes de Banach, un homomorphisme $f\colon M \to N$ est *borné* s'il existe une constante C telle que, $\forall x \in M$, $\|f(x)\| \leqq C\|x\|$. Les homomorphismes bornés de M dans N forment un groupe abélien $\mathscr{L}(M,N)$ pour la somme des opérateurs. Ce groupe est aussi un groupe de Banach pour la quasi-norme usuelle

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \|f(x)\|/\|x\|.$$

Tout sous-groupe *fermé* N d'un groupe de Banach M est évidemment un groupe de Banach pour la quasi-norme induite. De même, M/N est un groupe de Banach pour la « quasi-norme quotient » $\|a\| = \inf_{q(x)=a} \|x\|$, $q\colon M \to M/N$.

Si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ est une suite finie de groupes de Banach, $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ est un groupe de Banach pour la quasi-norme $\|x\| = \sum \|x_i\|$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Plus généralement, si $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ est une suite infinie de groupes de Banach, on note $M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus \ldots$ le sous-ensemble de $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \times \ldots$ formé des suites $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ telles que $\|x\| = \sum \|x_i\| < +\infty$ (« somme L^1 » des M_i). C'est évidemment un groupe de Banach. Si $N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots$ est une autre suite infinie, un homomorphisme borné $f: \sum M_i \to \sum N_i$ se représente par une matrice infinie (f_{ji}) où $f_{ji} \in \mathscr{L}(M_i, N_j)$. On a alors $\|f\| \leqq \sup_i \sum_j \|f_{ji}\|$ (« norme L^1 » des opérateurs).

Enfin, deux quasi-normes p et p' sur M sont dites équivalentes s'il existe deux constantes C et C' positives telles que, $\forall x \in M$,

$$Cp(x) \leqq p'(x) \leqq C'p(x) .$$

Deux quasi-normes équivalentes définissent évidemment la même topologie.

Remarque. On prendra garde cependant que le « théorème de Banach » est faux en général pour les groupes de Banach: il existe des applications bijectives bornées $f: M \to N$ telles que f^{-1} ne soit pas bornée; par exemple $M = \mathbf{Z}$ (resp. $N = \mathbf{Z}$) muni de la quasi-norme usuelle (resp. discrète) et $f = \mathrm{Id}$.

1.2. Définition. Soit A un anneau (non nécessairement commutatif ni unitaire) muni d'une structure de groupe de Banach compatible avec l'addition. On dit alors que A est un *anneau de Banach* s'il existe une constante C telle que $\forall x \in A$, $\forall y \in A$,

$$\|xy\| \leqq C\|x\| \times \|y\| .$$

Remarque. Si on pose $\|x\|' = C\|x\|$, on a $\|xy\|' \leqq \|x\|' \times \|y\|'$. Quitte à remplacer la norme de A par une norme équivalente, on ne restreint pas la généralité en supposant que $C = 1$.

1.3. Proposition. *Soit A un anneau de Banach unitaire. Les éléments inversibles de A forment alors un sous-ensemble ouvert de A.*

Démonstration. D'après la remarque précédente, on peut supposer que $C = 1$. Soit x_0 un élément inversible de A et soit $B(x_0)$ la boule ouverte de centre x_0 et de rayon $1/\|x_0^{-1}\|$. Si $x \in B(x_0)$, on a $x = x_0(1-y)$ où $y = 1 - x_0^{-1}x = x_0^{-1}(x_0 - x)$ est de quasi-norme plus petite que 1. Par conséquent $x^{-1} = (1 + y + \ldots + y^n + \ldots)x_0^{-1}$.

Si A est unitaire et si M est un A-module de type fini, M est un groupe de Banach pour la quasi-norme quotient définie par un épimorphisme quelconque $q: A^n \to M$. (Pour fixer les idées, les A-modules considérés sont des A-modules à droite, ceci afin de simplifier l'écriture matricielle des A-homomorphismes entre modules libres.) On voit aisément que cette quasi-norme est, à équivalence près, indépendante du choix de q.

Si N est un second A-module de type fini, les A-homomorphismes bornés entre M et N forment un sous-groupe fermé $\mathscr{L}_A(M,N)$ du groupe de Banach $\mathscr{L}(M,N)$. Si M et N sont projectifs, $\mathscr{L}_A(M,N)$ est aussi un sous-groupe fermé de $\mathscr{L}_A(A^n,A^p)$ pour M (resp. N) facteur direct de A^n (resp. A^p). On vérifie aisément que la structure de groupe de Banach induite est la même (à équivalence près) que la précédente. En particulier, l'anneau $A(n)$ des matrices $n\times n$ à coefficients dans A est un anneau de Banach.

Plus généralement, un groupe de Banach M est un A-module de Banach si c'est un A-module et si, $\forall\lambda\in A$, $\forall x\in M$, on a l'inégalité $\|x\lambda\|\leqq D\|x\|\times\|\lambda\|$ pour une certaine constante D. Dans ce cas, $\mathrm{End}_A(M)=\mathscr{L}_A(M,M)$ est un anneau de Banach (pour la composition des opérateurs).

1.4. Définition. Soient k un anneau de Banach unitaire, A un anneau de Banach muni d'une structure de k-algèbre. (On veut dire par là que A est un k-bimodule et que $(ab)\lambda=a(b\lambda)$, $a(\lambda b)=(a\lambda)b$, $\lambda(ab)=(\lambda a)b$, a et b appartenant à A et λ à k. Si k est commutatif et si $\lambda a=a\lambda$ $(a\in A,\, \lambda\in k)$ on retrouve la notion usuelle d'algèbre.) On dit alors que A est une k-algèbre de Banach si A, regardé comme module sur k, est un k-module de Banach.

Soit A^+ l'algèbre A augmentée d'un élément unité: on a donc $A^+=A\oplus k$ avec la loi de multiplication

$$(a,\lambda)\cdot(a',\lambda') = (aa'+\lambda a'+a\lambda',\lambda\lambda')\,.$$

Il est clair que A^+ est un anneau de Banach unitaire augmenté sur k. Réciproquement, un anneau de Banach unitaire augmenté sur k définit une k-algèbre de Banach (considérer le noyau de l'augmentation). De manière plus précise, on a une équivalence entre les deux catégories d'anneaux considérées (k fixé) qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter.

Exemples d'anneaux et de k-algèbres de Banach.

1. Les algèbres de Banach sur $k=\mathsf{R}$ ou C.
2. Les k-algèbres A où A et k sont munis de la quasi-norme discrète.
3. Pour tout k-module de Banach E, $\mathrm{End}_k(E)$ est une k-algèbre de Banach si k est commutatif.
4. Le complété $\hat{A}$ d'un anneau A par rapport à une valuation $\mathfrak{J}$-adique, $\mathfrak{J}$ étant un idéal quelconque dans A tel que $\bigcap\mathfrak{J}^n=0$.

5. Tout anneau de Banach A est évidemment une $\mathbf{Z}$-algèbre de Banach lorsqu'on munit $\mathbf{Z}$ de la quasi-norme usuelle.

Voici maintenant d'autres exemples de nature plus technique qui nous seront utiles plus loin:

6. Soit A un anneau de Banach quelconque. L'anneau $A[x]$ des polynômes à une variable et à coefficients dans A peut être muni de la quasi-norme

$$\|P\| = \sum \|a_i\|$$

où $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Le « complété » de $A[x]$ pour cette quasi-norme est évidemment un anneau de Banach qu'on notera $A\langle x\rangle$: c'est la sous-algèbre de $A[[x]]$ formé des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ telles que $\sum_{i=0}^{\infty} \|a_i\| < +\infty$. On notera EA la sous-algèbre de $A\langle x\rangle$ formée des séries $S(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ telles que $S(0) = a_0 = 0$ et ΩA la sous-algèbre de EA formée des séries S satisfaisant à la condition supplémentaire $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 0$.

7. Supposons d'abord que A ait un élément unité et considérons les homomorphismes bornés $f\colon A\langle x\rangle \to A\langle x\rangle$ de A-modules à droite. Puisque $A\langle x\rangle = A \oplus A \oplus \ldots \oplus A \oplus \ldots$ comme A-module, f se représente par une matrice infinie (f_{ji}) où $f_{ji} \in A$. On dit alors que f est *permutant* s'il satisfait aux deux conditions suivantes:

1) Les éléments f_{ji} sont choisis parmi un nombre fini d'éléments de A.
2) Il existe une permutation $\sigma\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $f_{ji} = \delta_{\sigma(i)j} f_{ji}$ où δ est le symbole de Kronecker.

(La définition proposée ici diffère très légèrement de celle de [4]. Ceci n'affecte pas les résultats de [4].)

On désigne par CA la plus petite sous-algèbre fermée de $\mathrm{End}_A(A\langle x\rangle)$ qui contient les homomorphismes permutants. On désigne aussi par $\tilde{A}$ ou $A^{\sim}$ le plus petit idéal fermé de CA qui contient les matrices (f_{ji}) telles que $f_{ji} = 0$ à l'exception d'un nombre fini de couples (i,j). L'algèbre quotient $CA/\tilde{A}$ sera notée SA.

Si A n'a pas nécessairement d'élément unité, A peut s'écrire comme le noyau de $\varepsilon\colon A^+ \to \mathbf{Z}$. On définit alors CA (resp. SA) comme le noyau de l'homomorphisme naturel $CA^+ \to C\mathbf{Z}$ (resp. $SA^+ \to S\mathbf{Z}$). Bien entendu, on retrouve la définition précédente si A a un élément unité. Dans le cas général, CA (resp. SA) peut aussi s'interpréter comme une algèbre de matrices infinies (resp. comme un quotient d'une telle algèbre). On peut de même définir $\tilde{A}$ comme l'adhérence de $\lim_{\rightarrow} A(n)$ dans CA.

TERMINOLOGIE. Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, on emploiera la terminologie suivante: $A\langle x\rangle$ est l'anneau des *chemins libres*, EA celui des *chemins*, ΩA celui des *lacets*. L'anneau CA (resp. SA, resp. $\tilde{A}$) est le *cône* (resp. la *suspension*, resp. *l'anneau stabilisé*) de l'anneau de Banach A.

Soit $p=\sum_{n=0}^{\infty}M_n x^n$ un élément de $(CA)\langle x\rangle$. On peut évidemment l'interpréter comme un élément q de $C(A\langle x\rangle)$ et on a $\|q\|\leqq\|p\|$. De là on déduit sans peine des homomorphismes canoniques de $E(CA)$ dans $C(EA)$, $\Omega(CA)$ dans $C(\Omega A)$, $E(\tilde{A})$ dans $(\widetilde{EA})$ et de $\Omega(\tilde{A})$ dans $(\widetilde{\Omega A})$. Les foncteurs E et Ω respectant les suites exactes de manière évidente, on en déduit aussi des homomorphismes canoniques de $E(SA)$ dans $S(EA)$, de $\Omega(SA)$ dans $S(\Omega A)$. Ces homomorphismes ne sont pas bijectifs en général. Ils le sont cependant si la quasi-norme de A ne prend qu'un nombre discret de valeurs.

1.5. Définition (cf. [4]). Soit $\mathscr{C}$ une catégorie additive où $\mathscr{C}(M,N)$, l'ensemble des $\mathscr{C}$-morphismes de M dans N, est muni d'une structure de groupe de Banach compatible avec la structure de groupe abélien. Alors $\mathscr{C}$ est une « catégorie en groupes de Banach » si, quels que soient les objets M,N et P de $\mathscr{C}$, il existe une constante C telle que $\|g\cdot f\|\leqq C\|g\|\times\|f\|$ pour $f\in\mathscr{C}(M,N)$ et $g\in\mathscr{C}(N,P)$.

On définit de manière usuelle les notions de foncteur banachique, d'isomorphisme ou d'équivalence de catégories en groupes de Banach, etc. (cf. [3, p. 179], [4, p. 113]).

Exemples.

1. Les catégories prébanachiques dans les sens de [3] sont évidemment des catégories en groupes de Banach.

2. Si A est un anneau de Banach unitaire, la catégorie $\mathscr{L}(A)$ des A-modules libres de type fini A^n, $n=0,1,2,\ldots$, est aussi une catégorie en groupes de Banach.

3. Si $\mathscr{C}$ est une catégorie en groupes de Banach, il en est de même de la catégorie pseudo-abélienne associée $\tilde{\mathscr{C}}$ [3]. Ceci s'applique en particulier à la catégorie $\mathscr{P}(A)$ des A-modules projectifs de type fini où A est un anneau de Banach unitaire.

En suivant [4, p. 117], on définit le *cône* $C\mathscr{C}$ d'une catégorie en groupes de Banach $\mathscr{C}$ de la manière suivante: les objets de $C\mathscr{C}$ sont les suites infinies $(E_1,\ldots,E_n,\ldots)$ d'objets de $\mathscr{C}$, les E_i étant choisis parmi un nombre fini d'objets (nombre qui peut varier avec chaque suite). Soit maintenant $(F_1,F_2,\ldots,F_n,\ldots)$ un deuxième objet de $C\mathscr{C}$ et soit $f=(f_{ji})$

une matrice infinie où $f_{ji} \in \mathscr{C}(E_i, F_j)$. On dit que f est *permutante* si elle satisfait aux trois conditions suivantes:

1) $\|f\| = \sup_i \sum_j f_{ji} < +\infty$.
2) f_{ji} ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes.
3) Il existe une permutation σ: $\mathsf{N} \to \mathsf{N}$ telle que $f_{ji} = \delta_{\sigma(i),j} f_{ji}$.

La matrice f définit alors un morphisme de $C\mathscr{C}$ si f est limite de sommes finies de matrices permutantes. Si $f = (f_{ji})$ est tel que $f_{ji} = 0$ à l'exception d'un nombre fini de couples (i,j), on dira que f est finie. Le morphisme f est dit *complètement continu* (voir [4, p. 121] pour une justification de cette terminologie), si f est limite de morphismes finis. On définit la *suspension* $S\mathscr{C}$ de $\mathscr{C}$ comme la catégorie ayant les mêmes objets que $C\mathscr{C}$, les morphismes étant considérés modulo les morphismes complètement continus.

1.6. PROPOSITION. *Soit A un anneau de Banach unitaire. On a alors les équivalences de catégories en groupes de Banach*

$$C(\mathscr{P}(A))^{\sim} \sim \mathscr{P}(CA) \quad \text{et} \quad S(\mathscr{P}(A))^{\sim} \sim \mathscr{P}(SA)\,.$$

DÉMONSTRATION. Considérons le foncteur additif φ: $\mathscr{L}(CA) \to C(\mathscr{P}(A))$ qui associe à l'anneau CA l'objet $(A, A, \ldots)$ et qui, à tout élément f de CA, associe la matrice infinie évidente. Il est clair que φ est pleinement fidèle et respecte les normes. D'autre part, tout objet $(E_1, \ldots, E_n, \ldots)$ de $C(\mathscr{P}(A))$ est facteur direct de $(A, A, \ldots)$ car la suite des E_i ne contient qu'un nombre fini d'objets différents. Par suite, φ induit une équivalence de $\mathscr{P}(CA)$ dans $C(\mathscr{P}(A))^{\sim}$. La deuxième équivalence se démontre de manière analogue.

2. Homotopie, fibrations de Serre, cofibrations.

Soient B un anneau de Banach et $B\langle x \rangle$ l'anneau des séries formelles $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ telles que $\sum \|b_n\| < +\infty$. Soit p_i: $B\langle x \rangle \to B$ l'homomorphisme défini par $p_i(S) = S(i)$, $i = 0$ ou 1.

2.1. DÉFINITION. Soient A et B deux anneaux de Banach, f_0 et f_1 deux homomorphismes de A dans B (bornés). Alors f_0 et f_1 sont dits *simplement homotopes* s'il existe un homomorphisme f: $A \to B\langle x \rangle$ tel que $p_0 \cdot f = f_0$ et $p_1 \cdot f = f_1$. L'anneau A est dit *contractile* si l'endomorphisme nul de A est simplement homotope à l'endomorphisme identique.

Nous allons tâcher de justifier cette définition par la remarque suivante. Supposons que A et B soient des algèbres de Banach sur $k=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $B(I)$ l'algèbre des fonctions continues α sur $I=[0,1]$ et à valeurs dans B. Soit enfin $q_i\colon B(I)\to B$, $i=0,1$, l'homomorphisme défini par $q_i(\alpha)=\alpha(i)$. Deux homomorphismes $f_0,f_1\colon A\to B$ sont alors dits *topologiquement homotopes* s'il existe $f\colon A\to B(I)$ tel que $q_0\cdot f=f_0$ et $q_1\cdot f=f_1$. L'application continue de $B\langle x\rangle$ dans $B(I)$ qui associe à chaque série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ la fonction $x\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $0\leqq x\leqq 1$, est compatible avec les projections p_i et q_i. Par conséquent, si f_0 et f_1 sont homotopes, ils sont aussi homotopes topologiquement. Notons cependant que la définition 2.1 souffre du défaut suivant: la relation d'homotopie introduite n'est ni symétrique ni transitive en général; ceci aura cependant peu d'importance par la suite.

Si A est un anneau de Banach quelconque, on notera $\mathrm{GL}_n(A)$ le groupe topologique noyau de l'homomorphisme naturel $\mathrm{GL}_n(A^+)\to \mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$ et $\mathrm{GL}(A)$ la limite inductive des $\mathrm{GL}_n(A)$. Lorsque A admet un élément unité, on retrouve les définitions classiques. Si $\varphi\colon A\to B$, on notera encore φ par abus d'écriture l'homomorphisme induit de $\mathrm{GL}_n(A)$ dans $\mathrm{GL}_n(B)$ et de $\mathrm{GL}(A)$ dans $\mathrm{GL}(B)$. De même, pour tout anneau de Banach A, on définit par récurrence $A_n=A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ par la formule $A_n=A_{n-1}\langle x_n\rangle$. On peut aussi décrire A_n comme l'anneau des séries formelles à n indéterminées

$$S(x_1,\ldots,x_n) = \sum a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$$

avec la quasi-norme $\|S\|=\sum\|a_{i_1\ldots i_n}\|<+\infty$. Si $\varphi\colon A\to B$ on notera encore φ l'homomorphisme de $A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ dans $B\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ qu'on en déduit.

2.2. Définition. Soit $\varphi\colon A\to B$ un homomorphisme d'anneaux de Banach. Alors φ est une *fibration de Serre* si, $\forall\beta\in \mathrm{GL}(B\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ avec $\beta(0,\ldots,0)=\mathrm{Id}$, il existe un élément α de $\mathrm{GL}(A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $\varphi(\alpha)=\beta$.

Si A est une k-algèbre, notons $A_k{}^+$ l'algèbre unitaire augmentée sur k qu'on en déduit par la construction usuelle. On a alors le lemme suivant:

2.3. Lemme. *Pour que $\varphi\colon A\to B$ soit une fibration de Serre, il faut et il suffit que l'homomorphisme évident $\varphi_k{}^+\colon A_k{}^+\to B_k{}^+$ soit une fibration de Serre.*

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif où les homomorphismes sont évidents

$$\begin{tikzcd} A_k^+\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \arrow[r, "\varphi_k^+"] \arrow[d, shift left, "\varepsilon_A"] & B_k^+\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \arrow[d, shift left, "\varepsilon_B"] \\ k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[u, shift left, "\eta_A"] & k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle . \arrow[u, shift left, "\eta_B"] \end{tikzcd}$$

Il est clair que $\mathrm{GL}(A\langle x_1,\ldots x_n\rangle)$ est le noyau de

$$\mathrm{GL}(A_k^+\langle x_1,\ldots,x_n\rangle) \to \mathrm{GL}(k\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$$

et que la même propriété vaut pour B. Soit

$$\beta \in \mathrm{GL}(B\langle x_1,\ldots,x_n\rangle) \subset \mathrm{GL}(B_k^+\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$$

tel que $\beta(0,\ldots,0)=1$. Si φ_k^+ est une fibration de Serre, il existe $\alpha' \in \mathrm{GL}(A_k^+\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $\varphi_k^+(\alpha')=\beta$. Si $\alpha=\alpha'\times\big((\eta_A\varepsilon_A)(\alpha')\big)^{-1}$, on a alors $\varphi(\alpha)=\beta$.

Réciproquement, soit β un élément de $\mathrm{GL}(B_k^+\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $\beta(0,\ldots,0)=1$. Alors β s'écrit $(\beta\gamma^{-1})\gamma$ où $\gamma=(\eta_B\varepsilon_B)(\beta)$. Si φ est une fibration de Serre, il existe $\alpha' \in \mathrm{GL}(A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $\varphi(\alpha')=\beta\gamma^{-1}$ et $\alpha=\alpha'\gamma'$, où $\gamma'=(\eta_A\varepsilon_B)(\beta)$, vérifie l'identité $\varphi_k^+(\alpha)=\beta$

2.4. Proposition. *Soit $\varphi\colon A \to B$ une fibration de Serre. Alors φ est un homomorphisme surjectif.*

Démonstration. Soit b un élément de B et soit $\beta=\beta(x_1)$ l'élément de $\mathrm{GL}(B\langle x_1\rangle)$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & bx_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Soit $\alpha=\alpha(x_1)=\big(a_{ji}(x_1)\big)$ tel que $\varphi(\alpha)=\beta$. Alors $\varphi\big(b_{12}(1)\big)=b$.

2.5. Théorème. *Soient A et B deux algèbres de Banach sur $k=\mathsf{R}$ ou C et soit $\varphi\colon A \to B$ un homomorphisme continu. Les propriétés suivantes de φ sont alors équivalentes:*

(i) *φ est une fibration de Serre.*
(ii) *φ est un homomorphisme surjectif.*
$(\mathrm{iii})_n$ *L'application naturelle*

$$\mathrm{GL}(A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle) \to \mathrm{GL}(B\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$$

est une fibration localement triviale.

Démonstration. Nous pouvons supposer, pour simplifier et sans restreindre la généralité d'après le lemme 2.3, que A et B sont des algèbres unitaires et que φ respecte les éléments unités. D'après la proposition 2.4 (i) $\Rightarrow$ (ii). Si $\varphi: A \to B$ est surjective, il en est de même de l'application

$$A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \to B\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$$

d'après le théorème de Banach. D'après [3, p. 179], l'application de groupes

$$\mathrm{GL}(A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle) \to \mathrm{GL}(B\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$$

admet une section locale et est par conséquent une fibration localement triviale. Donc (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons maintenant (iii) et considérons un élément β de $\mathrm{GL}(B\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $\beta(0,\ldots,0)=1$. Puisque ψ est aussi une fibration de Serre (au sens usuel), il existe une application continue $t \to \alpha_t(x_1,\ldots,x_n)$ de I dans $\mathrm{GL}(A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ telle que $\varphi(\alpha_t)=\beta(tx_1,\ldots,tx_n)$ et $\alpha_0(x_1,\ldots,x_n)=1$. En particulier, $\varphi(\alpha_1(x_1,\ldots,x_n))=\beta(x_1,\ldots,x_n)$.

2.6. Théorème. *Soit B un anneau unitaire noethérien régulier et soit $\varphi: A \to B$ un épimorphisme. Celui-ci est alors une fibration de Serre si B est muni de la quasi-norme discrète.*

Démonstration. D'après un théorème bien connu de K-théorie algébrique [2], tout élément β de $\mathrm{GL}(B[x_1,\ldots,x_n])$ tel que $\beta(0,\ldots,0)=1$ peut s'écrire comme le produit de « matrices élémentaires » e_k. De manière précise

$$e_k = 1 + \varepsilon_{ji}^k(x_1,\ldots,x_n), \quad i \neq j ,$$

où $\varepsilon_{ji}^k(x_1,\ldots,x_n)$ est une matrice de polynômes dont tous les éléments sont nuls à l'exception de celui situé à la place (i,j). Puisque $A[x_1,\ldots,x_n] \to B[x_1,\ldots,x_n]$ est surjectif, il existe une matrice élémentaire e_k' de la même forme telle que $\varphi(e_k')=e_k$.

Si on pose $\alpha=\prod_k e_k'$, on a alors $\varphi(\alpha)=\beta$.

Remarque. Dans le cas général, φ surjectif n'implique pas que φ soit une fibration de Serre. Soit par exemple $\varphi: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_4$ la surjection canonique. Alors $1+2x$ est inversible dans $\mathbf{Z}_4[x]$ mais n'est pas l'image d'un élément inversible de $\mathbf{Z}[x]$.

2.7. Proposition. *Soient $\varphi: A \to B$ une fibration de Serre, $u \in \mathrm{GL}(A)$, $v=\varphi(u)$, $\beta \in \mathrm{GL}(B\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $\beta(0,\ldots,0)=v$. Il existe alors un élément α de $\mathrm{GL}(A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $\varphi(\alpha)=\beta$ et que $\alpha(0,\ldots,0)=u$.*

DÉMONSTRATION. Si $\bar{\beta}=\beta\times v^{-1}$, il existe $\bar{\alpha}\in \mathrm{GL}(A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $\varphi(\bar{\alpha})=\bar{\beta}$. On pose alors $\alpha(x_1,\ldots,x_n)=\bar{\alpha}(x_1,\ldots,x_n)\times(\alpha(0,\ldots,0))^{-1}\times u$.

2.8. PROPOSITION. *Soit φ: $A\to B$ une fibration de Serre. Alors l'homomorphisme induit ψ: $A\langle x\rangle\to B\langle x\rangle$ est aussi une fibration de Serre.*

DÉMONSTRATION. Soit β un élément de $\mathrm{GL}(B\langle x,x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $\beta(x,0,\ldots,0)=1$. Puisque φ est une fibration de Serre et que $\beta(0,\ldots,0)=1$, il existe $\alpha\in\mathrm{GL}(A\langle x,x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $\varphi(\alpha)=\beta$.

2.9. PROPOSITION. *Soit φ: $A\to B$ une fibration de Serre. Alors l'homomorphisme évident $E\varphi$: $EA\to EB$ est aussi une fibration de Serre.*

DÉMONSTRATION. Le groupe $\mathrm{GL}(EB\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{GL}(B\langle x,x_1,\ldots,x_n\rangle)$ formé des matrices β vérifiant la condition $\beta(0,x_1,\ldots,x_n)=1$. Supposons en outre que $\beta(x,0,\ldots,0)=1$. Puisque $A\langle x\rangle\to B\langle x\rangle$ est une fibration de Serre, il existe d'après la proposition 2.7 un élément $\alpha=\alpha(x,x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathrm{GL}(A\langle x,x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $\alpha(x,0,\ldots 0)=1$ et $\varphi(\alpha)=\beta$. Il est clair que $\alpha\in\mathrm{GL}(EA\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ et que $(E\varphi)(\alpha)=\beta$.

2.10. PROPOSITION. *Soit φ: $A\to B$ une fibration de Serre. Alors l'homomorphisme induit $\Omega\varphi$: $\Omega A\to\Omega B$ est aussi une fibration de Serre.*

DÉMONSTRATION. Le groupe $\mathrm{GL}(\Omega B\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ s'identifie au sous-groupe de $\mathrm{GL}(B\langle x,x_1,\ldots,x_n\rangle)$ formé des matrices β vérifiant la condition

$$\beta(0,x_1,\ldots,x_n) = \beta(1,x_1,\ldots,x_n) = 1\,.$$

Supposons en outre que $\beta(x,0,\ldots,0)=1$. Puisque $EA\to EB$ est une fibration de Serre, il existe d'après la proposition 2.7 un élément $\alpha'(x,x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathrm{GL}(A\langle x,x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que

$$\alpha'(x,0,\ldots,0) = 1,\quad \alpha'(0,x_1,\ldots,x_n) = 1\,.$$

Posons alors

$$\alpha(x,x_1,\ldots,x_n) = \alpha'(x,x_1,\ldots,x_n)[\alpha'(1,xx_1,\ldots,xx_n)]^{-1}\,.$$

Un calcul simple montre que $\alpha(0,x_1,\ldots,x_n)=\alpha(1,x_1,\ldots,x_n)=1$ et que $(\Omega\varphi)(\alpha)=\beta$.

Soit φ: $A\to B$ un morphisme quelconque et soit m: $B\langle x\rangle\to B$ le morphisme défini par $m(S)=S(0)$.

2.11. DÉFINITION. Le *cylindre d'application* $M(\varphi)$ de φ est l'anneau produit fibré de φ et de m au-dessus de B.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ {\scriptstyle p}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle m} \\ M(\varphi) & \longrightarrow & B\langle x\rangle \end{array}$$

L'anneau $M(\varphi)$ est donc le sous-anneau de $A \times B\langle x\rangle$ formé des couples (a,S) tels que $\varphi(a)=S(0)$. Soit $\psi\colon M(\varphi)\to B$ le morphisme défini par $\psi(a,S)=S(1)$.

2.12. PROPOSITION. *Le morphisme* $\psi\colon M(\varphi)\to B$ *défini ci-dessus est une fibration de Serre.*

DÉMONSTRATION. Soit β un élément $\mathrm{GL}(B\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $\beta(0,\ldots,0)=1$. Soit α l'élément de $\mathrm{GL}\big(M(\varphi)\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\big)$ défini par le couple

$$\big(a(x_1,\ldots,x_n),\; S(x,x_1,\ldots,x_n)\big)$$

où $a(x_1,\ldots,x_n)=1$ et où $S(x,x_1,\ldots,x_n)=\beta(xx_1,\ldots,xx_n)$. Alors on a évidemment $\psi(\alpha)=\beta$.

On démontre de même la proposition suivante:

2.13. PROPOSITION. *Le morphisme* $p\colon M(\varphi)\to A$ *est une équivalence d'homotopie (en un sens évident). Son inverse est l'inclusion canonique* $i\colon A\to M(\varphi)$ *définie par* $i(a)=(a,\varphi(a))$, « $\varphi(a)$ » *désignant le polynôme constant égal à* $\varphi(a)$.

2.14. DÉFINITION. Soit

$$(1)\qquad 0\to A'\to A\xrightarrow{\varphi} A''\to 0$$

une suite exacte d'anneaux de Banach. Par abus de langage, on dit que (1) est une *fibration* si φ est une fibration et si la norme de A' est équivalente à la norme induite par A.

Soit maintenant $\varphi\colon A\to A''$ un épimorphisme entre deux anneaux de Banach. Rappelons (cf. [4]) que φ est dit *strict* si la quasi-norme de A'' est équivalente à la quasi-norme de A/A' où $A'=\operatorname{Ker}\varphi$.

2.15. DÉFINITION. Soit (1) une suite exacte d'anneaux de Banach.

On dit que (1) est une *cofibration* si φ est strict et si la norme de A' est équivalente à la norme induite par A.

Si A', A et A'' sont des algèbres de Banach usuelles, les notions de fibration et de cofibration coïncident (théorème 2.5). Il en est de même si A', A et A'' sont munis de la quasi-norme discrète, A'' étant noethérien régulier (théorème 2.6).

2.16. Proposition. *Soit*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

une fibration. Alors les suites

$$0 \to EA' \to EA \to EA'' \to 0, \quad 0 \to \Omega A' \to \Omega A \to \Omega A'' \to 0$$

sont aussi des fibrations.

Démonstration. C'est une reformulation des propositions 2.9 et 2.10.

2.17. Proposition. *Soit*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

une cofibration. Alors les suites

$$0 \to EA' \to EA \to EA'' \to 0\,,$$
$$0 \to \Omega A' \to \Omega A \to \Omega A'' \to 0\,,$$
$$0 \to CA' \to CA \to CA'' \to 0\,,$$
$$0 \to SA' \to SA \to SA'' \to 0$$

sont aussi des cofibrations.

Démonstration. C'est une conséquence directe des propriétés de la quasi-norme L^1 (cf. [4, p. 150]).

Soient maintenant $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}''$ deux catégories en groupes de Banach et soit $\varphi: \mathscr{C} \to \mathscr{C}''$ un foncteur banachique. On dira que φ est *strict* (resp. *de Serre*) si, pour tout objet E de $\mathscr{C}$, l'homomorphisme d'anneaux de Banach

$$\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(E) \to \mathrm{End}_{\mathscr{C}''}(\varphi E)$$

est strict (resp. de Serre). (Cette terminologie diffère de celle adoptée en [4] où les foncteurs stricts sont appelés de Serre. La terminologie choisie ici semble plus appropriée.) Si $\varphi: \mathscr{C} \to \mathscr{C}''$ est strict, il en est de même de $C\varphi: C\mathscr{C} \to C\mathscr{C}''$ et de $S\varphi: S\mathscr{C} \to S\mathscr{C}''$.

3. Le théorème d'excision et la première suite exacte de K-théorie.

Le but de ce paragraphe est de rassembler des résultats plus ou moins connus de K-théorie qui seront utiles dans les paragraphes suivants. Rappelons que si A est un anneau unitaire quelconque, on définit $K(A)$ comme le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{P}(A)$ des A-modules projectifs de type fini (cf. [1, p. 445] [3, p. 189]). Si A n'est pas unitaire, on définit $K(A)$ comme le noyau de l'homomorphisme naturel $K(A^+) \to K(\mathbf{Z})$.

Pour A unitaire, le *groupe de Bass* $K_1(A)$ est défini comme le quotient de $\mathrm{GL}(A)$ par le sous-groupe des commutateurs $C = [\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}(A)]$. Il est bien connu (cf. [1, p. 219]) que C est aussi le sous-groupe de $\mathrm{GL}(A)$ engendré par les « matrices élémentaires » e_{ji}^{λ}, $i \neq j$; e_{ji}^{λ} est la matrice dont tous les éléments sont nuls à l'exception de ceux situés sur la diagonale qui sont égaux à 1 et de celui situé à la place (j,i) qui est égal à l'élément λ de A.

Soit maintenant $\varphi\colon A \to A''$ un morphisme d'anneaux unitaires et soit $R(\varphi)$ l'ensemble des triples (E,F,α) où E et F sont des objets de $\mathscr{P}(A)$ et où $\alpha\colon \varphi E \to \varphi F$ est un isomorphisme (par abus d'écriture, on note encore $\varphi\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A'')$ le foncteur extension des scalaires induit par φ). Si *φ est surjectif*, on va définir un « groupe relatif » $K(\varphi)$ de la manière suivante. Deux triples (E,F,α) et (E',F',α') sont isomorphes s'il existe deux isomorphismes $f\colon E \to E'$ et $g\colon F \to F'$ tels que $\alpha' \cdot \varphi(f) = \varphi(g) \cdot \alpha$. Un triple (E,F,α) est dit élémentaire si $E = F$ et $\alpha = \mathrm{Id}$. Enfin, on définit la somme de deux triples de manière évidente. Alors $K(\varphi)$ est le quotient de $R(\varphi)$ par la relation d'équivalence suivante: $\sigma \sim \sigma' \Leftrightarrow \exists\, \tau$ et τ' élémentaires tels que $\sigma + \tau$ soit isomorphe à $\sigma' + \tau'$. La somme des triples induit bien entendu une structure de groupe abélien sur $K(\varphi)$. Le théorème suivant est bien connu (cf. [1, p. 343]).

3.1. THÉORÈME. *Soit $\varphi\colon A \to A''$ un morphisme surjectif entre deux anneaux unitaires. On a alors la suite exacte*

$$K_1(A) \to K_1(A'') \to K(\varphi) \to K(A) \to K(A'') .$$

De ce théorème on déduit en particulier la remarque suivante: supposons qu'il existe $\eta\colon A'' \to A$ tel que $\varphi\eta = \mathrm{Id}$. On a alors la suite exacte scindée

$$0 \to K(\varphi) \to K(A) \to K(A'') \to 0 .$$

Dans le cas général, désignons par A' le noyau de $\varphi\colon A \to A''$. On a alors le diagramme commutatif évident

$$\begin{array}{ccc} A'^{+} & \longrightarrow & A \\ {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \mathbf{Z} & \longrightarrow & A'' \end{array}$$

d'où un homomorphisme e de $K(\varepsilon) = K(A')$ dans $K(\varphi)$.

3.2. Théorème. *L'homomorphisme e de $K(A')$ dans $K(\varphi)$ défini ci-dessus est bijectif.*

Démonstration. Soit

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi_2} & B_2 \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi_1} \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_2} & B' \end{array}$$

un diagramme cartésien d'anneaux unitaires tel que ψ_1 soit surjectif. Sous ces conditions, il est démontré dans [1, p. 382] que le couple (φ_2, ψ_2) induit un isomorphisme entre les groupes $K(\varphi_1)$ et $K(\psi_1)$. Le théorème en résulte aussitôt.

3.3. Corollaire. *Soit A une k-algèbre et soit $A_k'^{+}$ l'algèbre unitaire augmentée sur k qui lui est associée. Alors $K(A)$ est isomorphe au noyau de l'homomorphisme naturel $K(A_k^+) \to K(k)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent au diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^{+} & \to & A_k^{+} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z} & \longrightarrow & k\,. \end{array}$$

3.4. Corollaire. *Soit $\varphi\colon A \to A''$ un morphisme surjectif entre deux anneaux unitaires. On a alors la suite exacte* (où $A' = \operatorname{Ker}\varphi$)

$$K_1(A) \to K_1(A'') \to K(A') \to K(A) \to K(A'')\,.$$

3.5. Définition. Soit α un élément de $\mathrm{GL}(A)$ où A est un anneau de Banach arbitraire. Alors α est *homotope à l'identité* s'il existe un élément $\alpha(x)$ de $\mathrm{GL}(A\langle x\rangle)$ tel que $\alpha(0) = 1$ et $\alpha(1) = \alpha$. Deux éléments α et β de $\mathrm{GL}(A)$ sont dits *homotopes* si $\alpha^{-1}\beta$ est homotope à l'identité.

3.6. THÉORÈME. *Notons* $\mathrm{GL}^0(A)$ *le sous-ensemble de* $\mathrm{GL}(A)$ *formé des éléments homotopes à l'identité. Alors* $\mathrm{GL}^0(A)$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(A)$ *et* $\mathrm{GL}^0(A) \supset [\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}(A)]$.

DÉMONSTRATION. Soient $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ deux « homotopies » de l'identité à $\alpha=\alpha(1)$ et $\beta=\beta(1)$ respectivement. Alors $(\alpha(x))^{-1}(\beta(x))$ est une homotopie de l'identité à $\alpha^{-1}\beta$. Supposons maintenant A unitaire. Alors, d'après [1], si α est un élément de $[\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}(A)]$, il s'écrit comme le produit de matrices élémentaires $\prod e_{ij}^{\lambda}$. L'homotopie polynomiale $\alpha(x)=\prod e_{ji}^{\lambda x}$ est telle que $\alpha(0)=1$ et $\alpha(1)=\alpha$. Supposons maintenant A non unitaire et désignons par $\varepsilon\colon A^+ \to \mathsf{Z}$ et $\eta\colon \mathsf{Z} \to A^+$ les homomorphismes canoniques. Si $\alpha \in [\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}(A)]$, il existe d'après le raisonnement précédent un élément $\alpha'(x)$ de $\mathrm{GL}(A^+\langle x\rangle)$ tel que $\alpha'(0)=1$ et $\alpha'(1)=\alpha$. On pose alors

$$\alpha(x) = \alpha'(x) \times [(\eta\varepsilon)(\alpha'(x))]^{-1} \in \mathrm{GL}(A\langle x\rangle) .$$

3.7. DÉFINITION. Pour tout anneau de Banach A, on désigne par $K^{-1}(A)$ ou $\pi_0(\mathrm{GL}(A))$ le groupe abélien $\mathrm{GL}(A)/\mathrm{GL}^0(A)$.

La notation $\pi_0(\mathrm{GL}(A))$ est justifiée par le fait (démontré plus loin) que $\pi_0(\mathrm{GL}(A))$ est le groupe des composantes connexes de $\mathrm{GL}(A)$ si A est une algèbre de Banach usuelle. Noter cependant que, dans le cas général, $\pi_0(\mathrm{GL}(A))$ est un foncteur de A et *non* du groupe topologique $\mathrm{GL}(A)$.

La notion d'homotopie introduite dans $\mathrm{GL}(A)$ par la définition 3.7 se généralise sans peine à la situation suivante. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie en groupes de Banach et soit $\mathscr{C}\langle x\rangle$ la catégorie en groupes de Banach suivante: les objets de $\mathscr{C}\langle x\rangle$ sont les objets de $\mathscr{C}$; un morphisme de source E et de but F est une expression formelle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où $a_n \in \mathscr{C}(E,F)$ sont des coefficients tels que $\sum \|a_n\| < +\infty$. Soient maintenant α et β deux $\mathscr{C}$-isomorphismes de E dans F. Alors α et β sont dits homotopes si $\alpha^{-1}\beta$ est homotope à l'identité, c'est à dire s'il existe $\gamma(x) \in \mathrm{Iso}_{\mathscr{C}\langle x\rangle}(E,E)$ tel que $\gamma(0)=1$ et $\gamma(1)=\alpha^{-1}\beta$. On vérifie sans peine que la relation d'homotopie est une relation d'équivalence. Cette généralisation s'applique en particulier à la catégorie $\mathscr{C}=\mathscr{P}(A)$, A anneau unitaire.

Soit maintenant $\varphi\colon A \to A''$ un morphisme d'anneaux de Banach unitaires (non nécessairement un morphisme surjectif). Deux éléments (E,F,α) et (E',F',α') de $R(\varphi)$ sont dits *homotopes* s'il existe deux isomorphismes $f\colon E \to E'$ et $g\colon F \to F'$ tels que α soit homotope à $\varphi(g)^{-1}\alpha'\varphi(f)$. On désigne par $K^0(\varphi)$ (comme nous le verrons plus loin, cette définition coïncide avec celle de [3] si A et A'' sont des algèbres de Banach) le quotient de $R(\varphi)$ par la relation d'équivalence engendrée par l'homotopie et l'addition de triples élémentaires. La somme des triples munit $K^0(\varphi)$ d'une structure de groupe abélien. Définissons maintenant $\partial\colon K^{-1}(A'') \to K^0(\varphi)$ de la manière suivante: si $\alpha \in \mathrm{GL}_n(A'')$ on lui associe le triple (A^n, A^n, α). On vérifie aisément que ∂ est bien défini.

3.8. Théorème. *Soit $\varphi\colon A \to A''$ un morphisme entre deux anneaux de Banach unitaires. On a alors la suite exacte*

$$K^{-1}(A) \to K^{-1}(A'') \xrightarrow{\partial} K^0(\varphi) \to K(A) \to K(A'') .$$

La démonstration de ce théorème est en tout point analogue à celle du théorème 3.1 (cf. [1, p. 343]) et sera donc omise.

3.9. Proposition. *Si φ est une fibration de Serre, l'application identique de $R(\varphi)$ induit un isomorphisme entre les groupes $K(\varphi)$ et $K^0(\varphi)$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que deux triples homotopes sont (stablement) isomorphes. Par des réductions successives, on est ramené à montrer que si $\alpha\colon \varphi(E) \to \varphi(E)$ est homotope à l'identité, il existe un objet G de $\mathscr{P}(A)$ et $\beta\colon E \oplus G \stackrel{\approx}{\to} E \oplus G$ tel que $\varphi(\beta) = \alpha \oplus \mathrm{Id}_{\varphi(G)}$. Il suffit alors de choisir G de façon que $E \oplus G \approx A^n, n$ suffisamment grand, et d'appliquer la définition d'une fibration de Serre.

3.10. Corollaire. *Soit $\varphi\colon A \to A''$ une fibration de Serre entre deux anneaux unitaires. On a alors la suite exacte*

$$K^{-1}(A) \to K^{-1}(A'') \to K(A') \to K(A) \to K(A'')$$

où $A' = \operatorname{Ker} \varphi$.

3.11. Proposition. *Soit*

$$0 \to A' \xrightarrow{\psi} A \xrightarrow{\varphi} A'' \to 0$$

une fibration de Serre. On a alors la suite exacte

$$K^{-1}(A') \xrightarrow{\psi^*} K^{-1}(A) \xrightarrow{\varphi^*} K^{-1}(A'') .$$

Si, en outre, il existe $\eta\colon A'' \to A$ tel que $\varphi \cdot \eta = \mathrm{Id}$, la suite

$$0 \to K^{-1}(A') \xrightarrow{\psi^*} K^{-1}(A) \xrightarrow{\varphi^*} K^{-1}(A'') \to 0$$

est exacte et scindée.

Démonstration. Il est clair que $\varphi^* \cdot \psi^* = 0$. Soit maintenant α un élément de $\mathrm{GL}(A)$ tel que $\varphi(\alpha)$ soit homotope à l'identité. Il existe donc $\gamma(x) \in \mathrm{GL}(A''\langle x\rangle)$ tel que $\gamma(0) = \mathrm{Id}$ et $\gamma(1) = \varphi(\alpha)$. Puisque φ est une fibration de Serre, il existe un élément $\delta(x)$ de $\mathrm{GL}(A\langle x\rangle)$ tel que $\delta(0) = 1$ et $\varphi(\delta(x)) = \gamma(x)$ (proposition 2.7). En outre α et $\alpha' = \alpha \cdot (\delta(1))^{-1}$ ont la même classe dans le groupe $K^{-1}(A)$. Puisque $\varphi(\alpha') = 1$, α' provient d'un élément de $\mathrm{GL}(A')$, ce qui démontre la première partie de la proposition. Soit maintenant $\eta\colon A'' \to A$ tel que $\varphi \cdot \eta = \mathrm{Id}$. Il est clair que φ^* est surjectif. Soit $h\colon K^{-1}(A) \to K^{-1}(A')$ l'homomorphisme induit par $\alpha \mapsto \alpha \cdot (\eta\varphi)(\alpha))^{-1}$. Alors $h \cdot \psi^* = \mathrm{Id}$, ce qui achève la démonstration.

3.12. Théorème. *Soit*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

une fibration de Serre. On a alors la suite exacte

$$K^{-1}(A') \to K^{-1}(A) \to K^{-1}(A'') \xrightarrow{\partial} K(A') \to K(A) \to K(A'') .$$

Démonstration. D'après le lemme 2.3, la suite

$$0 \to A' \to A^+ \to A''^+ \to 0$$

est aussi une fibration de Serre. D'après la corollaire 3.10 et la proposition 3.11, on a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 & & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
(1) & K^{-1}(A') & \to & K^{-1}(A) & \to & K^{-1}(A'') & \xrightarrow{\partial} & K(A') & \to & K(A) & \to & K(A'') \\
 & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \downarrow \\
(2) & K^{-1}(A') & \to & K^{-1}(A^+) & \to & K^{-1}(A''^+) & \to & K(A') & \to & K(A^+) & \to & K(A''^+) \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & K^{-1}(\mathsf{Z}) & = & K^{-1}(\mathsf{Z}) & & & & K(\mathsf{Z}) & = & K(\mathsf{Z}) \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0
\end{array}$$

où ∂ est défini comme le composé $K^{-1}(A'') \to K^{-1}(A''^+) \to K(A')$ et où les suites verticales sont exactes. L'exactitude de la suite (1) est alors une conséquence formelle de l'exactitude de la suite (2) et du fait que les suites verticales sont scindées naturellement.

Remarque. L'application identique de $\mathrm{GL}(A)$ induit une application surjective de $K_1(A)$ sur $K^{-1}(A)$ qui n'est pas injective en général. Par exemple, il est facile de voir que $K^{-1}(\mathbf{C})=0$ tandis que $K_1(\mathbf{C})=\mathbf{C}^*$ ($\mathbf{C}$ étant muni de la norme usuelle). Par contre, si A est un anneau noethérien régulier (avec la quasi-norme discrète), il est démontré dans [6, p. 598] que $K_1(A)\simeq K^{-1}(A)$. D'une manière générale, si A est un anneau de Banach discret, on a $K^{-1}(A)\approx \mathrm{GL}(A)/\mathrm{Un}(A)$ où $\mathrm{Un}(A)$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(A)$ engendré par les matrices unipotentes (cf. [6, p. 599]) ou l'appendice 3).

4. La deuxième suite exacte de K-théorie.

4.1. Définitions. Soit A un anneau de Banach. Un *chemin* dans $\mathrm{GL}(A)$ est un élément $c(x)$ de $\mathrm{GL}(A\langle x\rangle)$ tel que $c(0)=1$. Un *lacet* dans $\mathrm{GL}(A)$ est un élément $c(x)$ de $\mathrm{GL}(A\langle x\rangle)$ tel que $c(0)=c(1)=1$. Il est clair qu'un lacet (resp. un chemin) dans $\mathrm{GL}(A)$ peut-être interprété comme un élément de $\mathrm{GL}(\Omega A)$ (resp. $\mathrm{GL}(EA)$). Nous dirons que deux lacets sont « homotopes » s'ils définissent le même élément de $\pi_0(\mathrm{GL}(\Omega A))=K^{-1}(\Omega A)$.

4.2. Proposition et Définition. *La relation d'homotopie entre lacets est une relation d'équivalence. Si on note* $\pi_1(\mathrm{GL}(A))$ *ou* $K^{-2}(A)$ *l'ensemble quotient, on a un isomorphisme* $\pi_1(\mathrm{GL}(A))\approx\pi_0(\mathrm{GL}(\Omega A))$. *En particulier,* $\pi_1(\mathrm{GL}(A))$ *est un groupe abélien.*

Soit $\varphi\colon A\to B$ un morphisme entre deux anneaux de Banach. Alors φ et $\Omega\varphi$ induisent de manière évidente deux homomorphismes

$$\pi_i(\varphi)\colon\ \pi_i(\mathrm{GL}(A))\to\pi_i(\mathrm{GL}(B)),\quad i=0,1\ .$$

4.3. Proposition. *Si* φ_0 *et* φ_1 *sont deux morphismes simplement homotopes de* A *dans* B, *on a* $\pi_i(\varphi_0)=\pi_i(\varphi_1)$.

La démonstration de cette proposition est complètement triviale.

4.4. Corollaire. *Si* A *est un anneau contractile,* $\pi_i(\mathrm{GL}(A))=0$.

Soit maintenant

$$0\to A'\to A\xrightarrow{\varphi} A''\to 0$$

une fibration de Serre. On va définir un « homomorphisme de connexion »

$$\delta\colon\ \pi_1(\mathrm{GL}(A''))\to\pi_0(\mathrm{GL}(A'))\ .$$

Pour cela, considérons un lacet $c''(x)$ dans $\mathrm{GL}(A'')$. Puisque φ est une fibration de Serre, il existe un chemin $c(x)$ dans $\mathrm{GL}(A)$ tel que $\varphi(c(x)) = c''(x)$. En particulier $\varphi(c(1)) = 1$. Puisque la suite de groupes

$$1 \to \mathrm{GL}(A') \to \mathrm{GL}(A) \to \mathrm{GL}(A'')$$

est exacte, $c(1)$ définit un élément unique α' de $\mathrm{GL}(A')$. Nous allons montrer en diverses étapes que la correspondance $c'' \to \alpha'$ induit bien un homomorphisme δ entre les groupes $K^{-2}(A'')$ et $K^{-1}(A')$.

1) *La classe de α' dans $\pi_0(\mathrm{GL}(A'))$ est indépendante du choix du relèvement $c(x)$ de $c''(x)$.*

Soit $\bar{c}(x)$ un autre relèvement et $\bar{\alpha}'$ l'élément correspondant de $\mathrm{GL}(A')$. Alors $d(x) = (c(x))^{-1}(\bar{c}(x))$ satisfait aux propriétés suivantes:

a) $\varphi(d(x)) = 1$,
b) $d(0) = 1$,
c) $d(1) = (c(1))^{-1}(\bar{c}(1))$.

La propriété a) signifie que $d(x)$ est en fait un chemin dans $\mathrm{GL}(A')$ et la propriété c) jointe à b) signifie que α' et $\bar{\alpha}'$ sont homotopes.

2) *Si c'' et $\bar{c}''$ sont deux lacets homotopes, les éléments α' et $\bar{\alpha}'$ correspondants sont homotopes.* Soit $d''(x,t)$ un élément de $\mathrm{GL}(A''\langle x,t\rangle)$ tel que

a) $d''(0,t) = d''(1,t) = d''(x,0) = 1$,
b) $d''(x,1) = (c''(x))^{-1}(\bar{c}''(x))$.

Puisque $\Omega A \to \Omega A''$ est une fibration de Serre (proposition 2.10), il existe un élément $d(x,t)$ de $\mathrm{GL}(A\langle x,t\rangle)$ tel que

a) $d(0,t) = d(1,t) = d(x,0) = 1$,
b) $\varphi(d(x,t)) = d''(x,t)$.

Si $c(x)$ est un relèvement de $c''(x)$ dans $\mathrm{GL}(EA)$, on peut donc lui associer le relèvement $\bar{c}(x) = c(x)d(x,1)$ de $\bar{c}''(x)$ et on a $\alpha' = c(1) = \bar{c}(1) = \bar{\alpha}'$.

3) *δ est un homomorphisme de groupes.* Soit $c(x)$ et $c_1(x)$ deux relèvements des lacets $c''(x)$ et $c_1''(x)$ respectivement. Alors $c(x)c_1(x)$ est un relèvement du lacet $c''(x)c_1''(x)$. Donc

$$\delta(c''(x)c_1''(x)) = c(1)c_1(1) = \delta(c(x)) + \delta(c_1(x)) .$$

4.5 Théorème. *La suite*

$$\pi_1(\mathrm{GL}(A')) \to \pi_1(\mathrm{GL}(A)) \to \pi_1(\mathrm{GL}(A''))$$
$$\xrightarrow{\delta} \pi_0(\mathrm{GL}(A')) \xrightarrow{i} \pi_0(\mathrm{GL}(A)) \to \pi_0(\mathrm{GL}(A''))$$

est une suite exacte.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 3.11, il est clair qu'on a exactitude en $\pi_0(\mathrm{GL}(A))$ et $\pi_1(\mathrm{GL}(A))$. Il est évident par inspection que le composé de deux homomorphismes consécutifs est zéro. Soit α' un élément de $\pi_0(\mathrm{GL}(A'))$ tel que $i(\alpha'))=0$. Il existe donc un chemin $\alpha(x)$ dans $\mathrm{GL}(A)$ tel que $\alpha(0)=1$ et $\alpha(1)=\alpha'$. Si $\alpha''(x)$ désigne le lacet $\varphi(\alpha(x))$ il est clair, d'après la construction de δ, qu'on a bien $\delta(\alpha''(x))=\alpha'$. Soit maintenant $\alpha''(x)$ un lacet dans $\mathrm{GL}(A'')$, $\alpha(x)$ un relèvement de $\alpha''(x)$ en un chemin tel que $\alpha(0)=1$. Soit enfin $\beta(x)$ un chemin dans $\mathrm{GL}(A')$ tel que $\beta(0)=1$ et $\beta(1)=\alpha(1)$. Alors $\gamma(x)=\alpha(x)(\beta(x)^{-1})$ est aussi un relèvement de $\alpha''(x)$ qui est un *lacet* dans $\mathrm{GL}(A)$.

5. Définition axiomatique des foncteurs $K^n(A)$ pour n négatif.

5.1. DÉFINITION. Une sous-catégorie $\mathscr{K}$ de la catégorie des anneaux de Banach est dite *négativement admissible* si elle satisfait aux axiomes suivants:

1) $A\in \mathrm{Ob}\mathscr{K} \Rightarrow EA \overset{p_1}{\to} A \to 0$ *est un diagramme de* $\mathscr{K}$,
2) *si*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

est une fibration et si $A \to A'' \to 0$ *est un diagramme de* $\mathscr{K}$, *il en est de même de* $0 \to A' \to A$.

5.2. DÉFINITION. Soit $\mathscr{K}$ une sous-catégorie négativement admissible de la catégorie des anneaux de Banach. On appelle *théorie de la cohomologie négative* sur $\mathscr{K}$ la donnée $(K^{-n}, \partial^{-n-1})$, $n \geqq 0$, de foncteurs K^{-n} de $\mathscr{K}$ dans la catégorie des groupes abéliens et d'opérateurs de « connexion »

$$\partial^{-n-1}\colon K^{-n-1}(A'') \to K^{-n}(A'), \quad n \geqq 0\,,$$

définis pour toute fibration

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0\,.$$

Cette donnée doit satisfaire aux axiomes suivants

1) La suite

$$K^{-n-1}(A') \to K^{-n-1}(A) \to K^{-n-1}(A'') \xrightarrow{\partial^{-n-1}} K^{-n}(A') \to K^{-n}(A) \to K^{-n}(A'')\,, \quad n \geqq 0\,,$$

est une suite exacte.

2) Si

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \to & A & \to & A'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & B' & \to & B & \to & B'' & \to & 0 \end{array}$$

est un diagramme commutatif où les suites horizontales sont des fibrations, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K^{-n-1}(A'') & \xrightarrow{\partial^{-n-1}} & K^{-n}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^{-n-1}(B'') & \xrightarrow{\partial^{-n-1}} & K^{-n}(B') \end{array}$$

est commutatif (on dit aussi que ∂^{-n-1} est « naturel »).

3) $K^{-n}(A)=0$ pour $n>0$ si l'anneau A est contractile.

L'objet de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant:

5.3. Théorème. *Soit $\mathscr{K}$ une sous-catégorie négativement admissible d'anneaux de Banach. Il existe alors une théorie de la cohomologie négative et une seule* (à isomorphisme unique près) *telle que* $K^0(A)=K(A)$.

Nous allons avoir besoin de quelques lemmes préliminaires.

5.4. Lemme. *Si A est contractile, il en est de même de ΩA.*

Démonstration. Soit $\alpha: A \to A\langle t\rangle$ un morphisme tel que $p_0\cdot\alpha=0$ et $p_1\cdot\alpha=\alpha$. Alors $\Omega(\alpha):\Omega A \to \Omega(A\langle t\rangle)$ induit de manière évidente $\alpha':\Omega A \to (\Omega A)\langle t\rangle$ qui est une homotopie simple de α' à 0.

5.5. Lemme. *Si $A \xrightarrow{\varphi} B$ et $B \xrightarrow{\theta} C$ sont des fibrations de Serre, il en est de même de l'application composée $\theta\varphi$: $A \to C$.*

Démonstration. Soit

$$c(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{GL}(C\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$$

tel que $c(0,\ldots,0)=\mathrm{Id}$. D'après la proposition 2.7, il existe un élément $b(x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathrm{GL}(B\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$ tel que $b(0,\ldots,0)=\mathrm{Id}$ et $\theta(b)=c$. Puisque φ est une fibration de Serre, il existe

$$a(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{GL}(A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle)$$

tel que $\varphi(a)=b$, soit $(\theta\varphi)(a)=c$.

5.6. LEMME. *Soient* $(F^{-n}, \partial^{-n-1})$ *et* (G^{-n}, δ^{-n-1}) *deux théories de la cohomologie négatives et soit* $h^0\colon F^0 \to G^0$ *une transformation naturelle de foncteurs. Il existe alors une extension unique de* h^0 *en une transformation naturelle* $h^{-n}\colon F^{-n} \to G^{-n}$ *de foncteurs cohomologiques.*

DÉMONSTRATION. La fibration

$$0 \to \Omega A \to EA \to A \to 0$$

induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to F^{-n-1}(A) & \xrightarrow{\partial^{-n-1}} & F^{-n}(\Omega A) & \to & F^{-n}(EA) \\ \downarrow h^{-n-1} & & \downarrow h^{-n} & & \downarrow h^{-n} \\ 0 \to G^{-n-1}(A) & \xrightarrow{\delta^{-n-1}} & G^{-n}(\Omega A) & \to & G^{-n}(EA)\,. \end{array}$$

Par conséquent h^{-n-1} se déduit de manière unique de h^{-n}. Il faut vérifier que h^{-n}, construit ainsi par récurrence sur n, est compatible avec les opérateurs de connexion ∂^{-n-1} et δ^{-n-1}. A toute fibration

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

on peut associer le diagramme de fibrations de Serre

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & A' & \longrightarrow & A & \to & A'' & \to 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \| & \\ 0 \to & D & \longrightarrow & EA & \to & A'' & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \| & \\ 0 \to & \Omega A'' & \to & EA'' & \to & A'' & \to 0 \end{array}$$

où $EA \to A''$ est la fibration composée $EA \to A \to A''$ (lemme (5.5). On en déduit le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} F^{-n-1}(A'') & \to & F^{-n}(A') & \leftarrow & \tilde{F}^{-n}(D) & \underset{\approx}{\xrightarrow{i_F}} & \tilde{F}^{-n}(\Omega A'') \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G^{-n-1}(A'') & \to & G^{-n}(A') & \leftarrow & \tilde{G}^{-n}(D) & \underset{\approx}{\xrightarrow{i_G}} & \tilde{G}^{-n}(\Omega A'') \end{array}$$

où on pose

$$\tilde{L}^{-n}(D) = \operatorname{Ker}\big(L^{-n}(D) \to L^{-n}(EA)\big)\,,$$

$$\tilde{L}^{-n}(\Omega A'') = \operatorname{Ker}\big(L^{-n}(\Omega A'') \to L^{-n}(EA'')\big)$$

pour $L = F$ ou G. Alors i_F et i_G sont des isomorphismes et l'opérateur de connexion

$$\partial^{-n-1} \text{ ou } \delta^{-n-1}\colon\; L^{-n-1}(A'') \to L^{-n}(A')$$

est défini par la composition

$$L^{-n-1}(A'') \to \tilde{L}^{-n}(\Omega A'') \xrightarrow{(i_L)^{-1}} L^{-n}(D) \to L^{-n}(A')\,.$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F^{-n-1}(A'') & \to & \tilde{F}^{-n}(\Omega A'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^{-n-1}(A'') & \to & \tilde{G}^{-n}(\Omega A'') \end{array}$$

est commutatif par définition. Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} F^{-n}(A') & \leftarrow & \tilde{F}^{-n}(D), \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^{-n}(A') & \leftarrow & \tilde{G}^{-n}(D), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{F}^{-n}(D) & \xleftarrow{(i_F)^{-1}} & \tilde{F}^{-n}(\Omega A'') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{G}^{-n}(D) & \xleftarrow{(i_G)^{-1}} & \tilde{G}^{-n}(\Omega A'') \end{array}$$

sont commutatifs par naturalité. Il en résulte que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F^{-n-1}(A'') & \xrightarrow{\partial^{-n-1}} & F^{-n}(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ G^{-n-1}(A'') & \xrightarrow{\delta^{-n-1}} & G^{-n}(A') \end{array}$$

est aussi commutatif.

Démonstration du théorème 5.3.

a) *Unicité.* Soient $(F^{-n}, \partial^{-n-1})$ et (G^{-n}, δ^{-n-1}) deux théories de la cohomologie telles que $F^0 = G^0 = K$. Soient $h^0: F^0 \to G^0$ et $k^0: G^0 \to F^0$ égaux à l'identité. D'après le lemme ci-dessus, il existe des extensions uniques $h^n: F^n \to G^n$ et $k^n: G^n \to F^n$. Si on applique de nouveau le lemme 5.6, on voit que $k^n h^n = \mathrm{Id}_{F^n}$ et que $h^n k^n = \mathrm{Id}_{G^n}$.

b) *Existence.* Posons $K^{-n}(A) = K(A)$ si $n = 0$ et $K^{-n}(A) = \pi_0(\mathrm{GL}(\Omega^{n-1}A))$ si $n \geqq 1$. Pour toute fibration

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

l'homomorphisme $\partial^{-1}: K^{-1}(A'') \to K(A')$ est l'homomorphisme défini dans le théorème 3.12. Pour $n \geqq 1$,

$$\partial^{-n-1}: \; K^{-n-1}(A'') \to K^{-n}(A')$$

est défini comme l'homomorphisme composé

$$\begin{array}{ccccc} \pi_0(\mathrm{GL}(\Omega^n A'')) & \xrightarrow{u} & \pi_1(\mathrm{GL}(\Omega^{n-1}A'')) & \xrightarrow{v} & \pi_0(\mathrm{GL}(\Omega^{n-1}A')) \\ \| & & & & \| \\ K^{-n-1}(A'') & & & & K^{-n}(A') \end{array}$$

où u et v s'explicitent comme suit: $\Omega^n A''$ s'identifie au sous-anneau de $A''\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ formé des séries $S(x_1,\ldots,x_n)$ qui prennent la valeur zéro si l'une des variables est égale à zéro ou à un. Si $\alpha''=\alpha''(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{GL}(\Omega^n A'')$, le changement de variable $x_n=t$ permet de regarder α'' comme un lacet dans $\mathrm{GL}(\Omega^{n-1}A'')$. L'homomorphisme u s'en déduit de manière évidente. On peut remarquer aussi que u est l'homomorphisme inverse de l'isomorphisme de connexion associé à la fibration

$$0 \to \Omega^n A'' \to E\Omega^{n-1}A'' \to \Omega^{n-1}A'' \to 0\,.$$

On définit enfin v comme l'opérateur de connexion associé à la fibration

$$0 \to \Omega^{n-1}A' \to \Omega^{n-1}A \to \Omega^{n-1}A'' \to 0$$

(proposition 2.10). Considérons maintenant la suite

$$(1)\qquad K^{-n-1}(A) \to K^{-n-1}(A'') \xrightarrow{\partial^{-n-1}} K^{-n}(A') \to K^{-n}(A) \to K^{-n}(A'')\,.$$

Pour $n=0$, la suite est exacte d'après le théorème 3.12. Pour $n\geqq 1$, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_1(\mathrm{GL}(\Omega^{n-1}A)) & \to & \pi_1(\mathrm{GL}(\Omega^{n-1}A'')) & \xrightarrow{v} & \pi_0(\mathrm{GL}(\Omega^{n-1}A')) & \to & \pi_0(\mathrm{GL}(\Omega^{n-1}A'')) \\
\approx\uparrow u & & \approx\uparrow u & & & & \\
\pi_0(\mathrm{GL}(\Omega^n A)) & \to & \pi_0(\mathrm{GL}(\Omega^n A'')) & & & & \\
\| & & \| & & & & \\
K^{-n-1}(A) & & K^{-n-1}(A'') & & & &
\end{array}$$

En appliquant le théorème 4.5, on voit que la suite (1) est aussi exacte dans ce cas. Enfin, si A est un anneau contractile, il en est de même de $\Omega^n A$ d'après le lemme 5.4 appliqué n fois. Par conséquent $K^{-n-1}(A)=\pi_0(\mathrm{GL}(\Omega^n A))=0$ pour $n\geqq 0$. Ceci achève la démonstration du théorème 5.3.

Remarque. L'opérateur bord

$$\delta\colon \pi_1(\mathrm{GL}(\Omega^{n-1}A)) \to \pi_0(\mathrm{GL}(\Omega^n A))$$

associé à la fibration

$$0 \to \Omega^n A \to \Omega^{n-1}EA \to \Omega^{n-1}A \to 0$$

est égal à $(-1)^n$ fois l'opérateur bord associé à la fibration

$$0 \to \Omega^n A \to E\Omega^{n-1}A \to \Omega^{n-1}A \to 0\,.$$

5.7. Théorème. *Soit A une algèbre de Banach unitaire sur* R *ou* C. *Alors les groupes $K^{-n}(A)$ définis ici coïncident avec les groupes $K^{-n}(\mathscr{P}(A))$ définis dans* [3, p. 209]. *En particulier, ils sont périodiques de période* 8 *dans le cas réel et de période* 2 *dans le cas complexe.*

Démonstration. Soit $C^{0,n}$ l'algèbre de Clifford de R^n muni de la forme quadratique $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$ et soit

$$\varphi_n\colon \mathscr{P}(A\otimes C^{0,n+1}) \to \mathscr{P}(A\otimes C^{0,n})$$

le foncteur restriction des scalaires. Définissons alors « $K^{-n}(A)$ » comme le groupe de Grothendieck du foncteur φ_n au sens de [3]. Si A n'est pas unitaire, on définit $K^{-n}(A)$ comme le noyau de l'homomorphisme naturel $K^{-n}(A_k{}^+) \to K^{-n}(k)$ ($k=\mathsf{R}$ ou C). D'après la remarque du début du § 2, $K^{-n}(A)=0$ si A est contractile. Soit maintenant $\psi\colon A \to A''$ un homomorphisme surjectif entre algèbres de Banach unitaires. En suivant [3, p. 209], on définit le groupe $K^{-n}(\psi)$ comme le groupe de Grothendieck de la « grille carrée »

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(A\otimes C^{0,n+1}) & \to & \mathscr{P}(A''\otimes C^{0,n+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{P}(A\otimes C^{0,n}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A''\otimes C^{0,n}) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les foncteurs « extension des scalaires ». D'après [3, p. 222], on a alors une suite exacte

$$K^{-n-1}(A) \to K^{-n-1}(A'') \to K^{-n}(\psi) \to K^{-n}(A) \to K^{-n}(A'')$$

d'autre part, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A_k'^{+} & \to & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ k & \longrightarrow & A'' \end{array}$$

où $A'=\operatorname{Ker}\psi$, étant cartésien, on voit aisément que $K^{-n}(\psi)\approx K^{-n}(A')$. On a donc la suite exacte

$$K^{-n-1}(A) \to K^{-n-1}(A'') \to K^{-n}(A') \to K^{-n}(A) \to K^{-n}(A'')\,,$$

vraie aussi si A et A'' ne sont pas unitaires. De cette discussion, il résulte que les foncteurs K^{-n} ainsi construits satisfont aux axiomes du théorème 5.3 pour la catégorie $\mathscr{K}$ des algèbres de Banach qui est négativement admissible. Donc ils coïncident avec les groupes définis précédemment. La périodicité de K^{-n} résulte évidemmement de la « périodicité » bien connue des algèbres de Clifford.

REMARQUE. Bien entendu les groupes $K^n(A)$ définis grace au théorème 5.3 pour tout anneau de Banach A sont indépendants du choix de la catégorie $\mathscr{K}$ à laquelle A appartient.

6. Les groupes K^n de catégories en groupes de Banach pour n négatif.

Ce paragraphe ne contient rien d'essentiellement nouveau. Il se borne à généraliser les § 4 et 5 aux catégories en groupes de Banach. Cette généralisation sera utile pour les paragraphes suivants. Les démonstrations se borneront à des indications sommaires.

Si $\mathscr{C}$ est une catégorie en groupes de Banach, on peut lui associer la catégorie $\mathscr{C}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ suivante: ses objets sont les objets de $\mathscr{C}$; un morphisme de source E et de but F est une expression formelle

$$\textstyle\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1}\ldots x_1^{i_n}$$

où

$$a_{i_1\ldots i_n} \in \mathscr{C}(E,F) \quad \text{et} \quad \textstyle\sum_{i_1,\ldots,i_n} \|a_{i_1\ldots i_n}\| < +\infty \, .$$

La composition des morphismes est immédiate. Si $\mathscr{C} = \mathscr{L}(A)$, on a évidemment

$$\mathscr{C}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \mathscr{L}(A\langle x_1,\ldots,x_n\rangle) \, .$$

Si $\varphi\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ est un foncteur banachique, il induit un foncteur

$$\varphi\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\colon \mathscr{C}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \to \mathscr{C}'\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \, .$$

Par abus d'écriture, on notera encore φ le foncteur $\varphi\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$. On s'interesse alors aux couples (E,α) où $E \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle = \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ et où $\alpha = \alpha(x_1,\ldots,x_n)$ est un automorphisme de E dans la catégorie $\mathscr{C}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ tel que $\varphi(\alpha) = 1$ et tel que $\alpha(x_1,\ldots,x_n) = 1$ si l'un au moins des x_i est égal à 0 ou à 1. Deux tels automorphismes α_0 et α_1 sont dits homotopes s'il existe un automorphisme $\alpha = \alpha(x_1,\ldots,x_n,t)$ dans $\mathscr{C}\langle x_1,\ldots,x_n,t\rangle$ tel que

1) $\alpha(x_1,\ldots,x_n,t) = 1$ si l'un au moins des x_i est égal à 0 ou 1,
2) $\varphi(\alpha) = 1$,
3) $\alpha(x_1,\ldots,x_n,0) = \alpha_0$ et $\alpha(x_1,\ldots,x_n,1) = \alpha_1$.

Deux couples (E,α) et (E',α') sont dits *équivalents* s'il existe un couple (G,Id_G) tel que $\alpha \oplus \mathrm{Id}_{E'} \oplus \mathrm{Id}_G$ soit homotope à $\mathrm{Id}_E \oplus \alpha' \oplus \mathrm{Id}_G$ (l'image par φ de cette homotopie étant constante). Deux couples (E,α) et (E',α') sont dits isomorphes s'il existe un $\mathscr{C}$-isomorphisme $f\colon E \to E'$ tel que $f\cdot\alpha = \alpha'\cdot f$ en un sens évident.

6.1. LEMME. *Soient* (E,α) *et* (E',α') *deux couples isomorphes. Alors* (E,α) *et* (E',α') *sont équivalents.*

DÉMONSTRATION. Dans $\mathrm{Aut}_{\mathscr{C}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}(E\oplus E')$ on a l'identité

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & f\alpha f^{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -f^{-1}\\ +f & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & +f^{-1}\\ -f & 0\end{pmatrix}.$$

La matrice

$$M = \begin{pmatrix}0 & -f^{-1}\\ f & 0\end{pmatrix}$$

s'écrit comme le produit de trois matrices

$$\begin{pmatrix}1 & -f^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ f & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -f^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

et il est clair que chacune d'entre elles est homotope à l'identité (multiplier par t les éléments non situés sur la diagonale). Par suite $\mathrm{Id}_E\oplus\alpha'$ est homotope à $\alpha\oplus\mathrm{Id}_{E'}$, l'image de cette homotopie par φ étant l'identité.

6.2. LEMME. *Soient* (E,α) *et* (E',α') *deux couples tels que* $E=E'$. *Alors les couples* $(E,\alpha\alpha')$ *et* $(E,\alpha'\alpha)$ *et* $(E\oplus E',\alpha\oplus\alpha')$ *sont équivalents.*

DÉMONSTRATION. Le couple $(E,\alpha'\alpha)$ est équivalent au couple $(E\oplus E',\alpha'\alpha\oplus 1)$. D'autre part $(\alpha'\alpha\oplus 1)(\alpha\oplus\alpha')^{-1}$ s'écrit de manière matricielle sous la forme

$$\begin{pmatrix}\alpha' & 0\\ 0 & \alpha'^{-1}\end{pmatrix}$$

qui est homotope à l'identité d'après l'argument précédent. On démontrerait de même que $\alpha\alpha'\oplus 1$ est homotope à $\alpha\oplus\alpha'$.

6.3. DÉFINITION. Soit $\varphi\colon\mathscr{C}\to\mathscr{C}''$ un foncteur de Serre quasi-surjectif entre deux catégories en groupes de Banach $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}''$. On désigne alors par $K^{-n-1}(\varphi)$ l'ensemble des classes d'équivalence de couples (E,α) où $\alpha\in\mathrm{Aut}_{\mathscr{C}\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}(E)$. Si $\mathscr{C}''=0$, on note $K^{-n-1}(\mathscr{C})$ l'ensemble $K^{-n-1}(\varphi)$.

6.4. PROPOSITION. *L'ensemble* $K^{-n-1}(\varphi)$ *est un groupe abélien pour la somme*

$$(E,\alpha)+(E',\alpha') = (E\oplus E',\alpha\oplus\alpha').$$

Si $\varphi\colon \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(A'')$ *est le foncteur extension des scalaires associé à une fibration de Serre* $\psi\colon A \to A''$, *on a un isomorphisme naturel*

$$K^{-n-1}(\varphi) \approx K^{-n-1}(A')$$

où $A' = \operatorname{Ker}\psi$.

On va maintenant définir un homomorphisme de connexion

$$\partial^{-n-1}\colon K^{-n-1}(\mathscr{C}'') \to K^{-n}(\varphi), \quad n \geqq 1\ ,$$

de la manière suivante. Soit $(E'', \alpha''(x_1, \ldots, x_n))$ un couple définissant un élément de $K^{-n-1}(\mathscr{C}'')$. Puisque φ est quasi-surjectif, on peut supposer que $E'' = \varphi(E)$. Alors, si E est « assez grand », $\alpha''(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$ est pour t variable une homotopie qui se relève en $\alpha(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)\colon E \to E$ de telle manière que $\alpha(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \mathrm{Id}$. On pose alors

$$\partial^{-n-1}(E'', \alpha'') = (E, \alpha(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1))\ .$$

6.5. Théorème. *Soit* $\varphi\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}''$ *un foncteur de Serre quasi-surjectif. Alors la suite*

$$K^{-n-1}(\mathscr{C}) \to K^{-n-1}(\mathscr{C}'') \to K^{-n}(\varphi) \to K^{-n}(\mathscr{C}) \to K^{-n}(\mathscr{C}''), \quad n \geqq 0\ ,$$

est une suite exacte, ∂^{-1} *étant défini comme dans le* § 3.

7. Définition axiomatique des foncteurs $K^n(A)$ pour n positif.

Pour toute catégorie en groupes de Banach $\mathscr{C}$, on a défini dans [4, p. 158] des foncteurs $K^n(\mathscr{C})$, $n \geqq 0$, satisfaisant à certains axiomes. Un des buts de ce paragraphe est d'adapter ces définitions au cadre qui nous intéresse. A la fin du paragraphe nous montrerons que, dans le cas algébrique, nos foncteurs K^n coïncident avec les foncteurs K_{-n} de Bass [1, p. 677].

7.1. Définition. Soit A un anneau de Banach unitaire. Alors A est dit *flasque* s'il existe un bimodule M sur A qui soit projectif de type fini à droite (M est donc un A-module de Banach à droite et A opère aussi à gauche de manière compatible avec la quasi-norme) et tel que $M \oplus A$ soit isomorphe à M comme bimodule.

7.2. Proposition. *Pour que* A *soit flasque, il faut et il suffit que la catégorie* $\mathscr{P}(A)$ *soit flasque dans le sens de* [4, p. 147].

DÉMONSTRATION. Une catégorie en groupes de Banach $\mathscr{C}$ est dite flasque s'il existe un foncteur banachique $\tau\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ tel que $\tau \oplus \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ soit isomorphe à τ. Si $\mathscr{C} = \mathscr{P}(A)$, les classes d'isomorphie de foncteurs τ de $\mathscr{C}$ dans elle-même sont en correspondance bijective avec les classes d'isomorphie de tels bimodules $M = \tau(A)$. La somme des foncteurs correspondant à la somme des bimodules, la proposition en résulte aussitôt.

7.3. PROPOSITION. *Soit A un anneau de Banach flasque. Alors $K^{-n}(A) = 0$ pour $n \geqq 0$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer que le groupe K^{-n} d'une catégorie en groupes de Banach flasque $\mathscr{C}$ est nul. Or, si $\mathscr{C}$ est flasque, il en est de même de $\mathscr{C}\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ et, pour tout élément (E, α) de $K^{-n}(\mathscr{C})$, $n > 0$, on a la relation

$$(E,\alpha) + \big(\tau(E), \tau(\alpha)\big) = \big(E \oplus \tau(E), \alpha \oplus \tau(\alpha)\big) = \big(\tau(E), \tau(\alpha)\big) .$$

Si $n = 0$, la relation $E \oplus \tau(E) = \tau(E)$ vraie pour tout objet E de $\mathscr{C}$ montre que $K(\mathscr{C}) = 0$.

7.4. PROPOSITION. *Soit A un anneau de Banach quelconque. Alors l'inclusion canonique $A \to \tilde{A}$ induit un isomorphisme $K(A) \approx K(\tilde{A})$.*

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord A unitaire. On a alors une cofibration évidente

$$0 \to \tilde{A} \to CA \xrightarrow{\varphi} SA \to 0 .$$

D'après la théorie des catégories filtrées développée dans [4], l'application composée $K(A) \to K(\tilde{A}) \to K(\varphi)$ est un isomorphisme. D'après le théorème 3.2, l'application $K(\tilde{A}) \to K(\varphi)$ est aussi bijective, d'où la proposition dans ce cas. Dans le cas général, il suffit de considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \tilde{A} & \to & CA & \to & SA & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \tilde{A}^{+} & \to & CA^{+} & \to & SA^{+} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \tilde{\mathbf{Z}} & \to & C\mathbf{Z} & \to & S\mathbf{Z} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

7.5. DÉFINITION. Soit $\mathscr{K}$ une sous-catégorie de la catégorie des anneaux de Banach. On dira que $\mathscr{K}$ est une catégorie *positivement admissible* si elle satisfait aux deux axiomes suivants:

1) $A \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{K} \Rightarrow 0 \to \tilde{A} \to CA$ est un diagramme de $\mathscr{K}$.
2) Si

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

est une cofibration et si $0 \to A' \to A$ est un diagramme de $\mathscr{K}$, il en est de même de $A \to A'' \to 0$.

7.6. DÉFINITION. Soit $\mathscr{K}$ une catégorie positivement admissible d'anneaux de Banach. Une *théorie de la cohomologie positive* sur $\mathscr{K}$ est la donnée (K^n, ∂^n) de foncteurs $A \mapsto K^n(A)$ et d'opérateurs de connexion « naturels »

$$\partial^n\colon\ K^n(A'') \to K^{n+1}(A')$$

définis pour toute cofibration

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0\,.$$

On suppose en outre que les axiomes suivants sont satisfaits:

1) La suite

$$K^n(A') \to K^n(A) \to K^n(A'') \xrightarrow{\partial^n} K^{n+1}(A') \to K^{n+1}(A) \to K^{n+1}(A'')$$

est exacte.

2) $K^n(A) = 0$ si A est un anneau flasque.
3) L'inclusion $A \to \tilde{A}$ induit un isomorphisme $K^n(A) \approx K^n(\tilde{A})$.

7.7. THÉORÈME. *Soit $\mathscr{K}$ une catégorie positivement admissible d'anneaux de Banach. Il existe alors une théorie de la cohomologie positive sur $\mathscr{K}$ et une seule (à isomorphisme unique près) telle que $K^0(A) = K(A)$.*

DÉMONSTRATION DE L'EXISTENCE (cf. [4, p. 160]). On pose $K^n(A) = K(S^nA)$. Si A est unitaire, on retrouve la définition de [4, p. 158]. Si A n'est pas unitaire, on vérifie sans peine que

$$K^n(A) \approx \mathrm{Ker}\big(K^n(A^+) \to K^n(\mathbf{Z})\big)\,.$$

Dans [4, p. 157] on a démontré que $K_1(S^nA) \approx K^{n-1}(A)$ si A est unitaire. L'opérateur bord

$$\partial^{n-1}\colon\ K^{n-1}(A'') \to K^n(A')$$

peut donc être défini comme l'homomorphisme composé

$$K^{n-1}(A'') \to K^{n-1}(A''^{+}) \to K_1(S^n A''^{+}) \xrightarrow{\partial} K(S^n A') = K^n(A')$$

où ∂ est l'opérateur associé à la suite exacte

$$0 \to S^n A' \to S^n A^{+} \to S^n A''^{+} \to 0$$

(corollaire 3.4). L'axiome 2 est prouvé dans [4, p. 156] tandis que l'axiome 1 est une conséquence du corollaire 3.4 appliqué à la suite exacte précédente. Enfin l'axiome 3 résulte du fait que si $\mathscr{D}$ est une catégorie $\mathscr{C}$-filtrée, $S^n\mathscr{D}$ est naturellement une catégorie $S^n\mathscr{C}$-filtrée.

Démonstration de l'unicité. On va suivre de près la démonstration du théorème 3.2.1 de [4]. Remarquons tout d'abord que si K^n vérifie les axiomes 1, 2 et $K^0(A) = K(A)$ alors $K^n(CA) = 0$. C'est évident si A est unitaire. Si A n'est pas unitaire, on considère la suite

$$0 \to CA \to CA^{+} \to C\mathsf{Z} \to 0 .$$

Soient maintenant (F^n, ∂^n) et (G^n, δ^n) deux théories de la cohomologie et soit $h^0 \colon F^0 \to G^0$ une transformation naturelle. On va montrer que h^0 s'étend de manière unique en des transformations naturelles $h^n \colon F^n \to G^n$ compatibles avec les opérateurs bord. De la suite

$$0 \to \tilde{A} \to CA \to SA \to 0$$

on déduit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
F^n(SA) & \to & F^{n+1}(\tilde{A}) & \approx & F^{n+1}(A) \\
\downarrow{\scriptstyle h^n} & & & & \downarrow{\scriptstyle h^{n+1}} \\
G^n(SA) & \to & G^{n+1}(\tilde{A}) & \approx & G^{n+1}(A)
\end{array}$$

d'où h^n par récurrence sur n. Il faut maintenant vérifier que les homomorphismes h^n ainsi construits par récurrence sur n commutent aux opérateurs bord ∂^n et δ^n. Considérons pour cela le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \tilde{A}' & \longrightarrow & \tilde{A} & \longrightarrow & \tilde{A}'' & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \tilde{A}' & \xrightarrow{i} & CA & \longrightarrow & D & \to & 0 \\
 & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \tilde{A}' & \to & CA' & \to & SA' & \to & 0
\end{array}$$

où on a posé $D = CA/i(\tilde{A}')$. Les suites horizontales sont des cofibrations et on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F^n(A'') \arrow[r] \arrow[d, "h^n"] & F^n(\tilde{A}'') \arrow[r] \arrow[d, "h^n"] & F^n(D) \arrow[d] \arrow[r, dotted, shift right] & F^n(SA') \arrow[l, "\approx"', shift right] \arrow[r, "\partial^n"', "\approx"] \arrow[d] & F^{n+1}(\tilde{A}') \approx F^{n+1}(A') \arrow[d, "h^{n+1}"] \\
G^n(A'') \arrow[r] & G^n(\tilde{A}'') \arrow[r] & G^n(D) \arrow[r, dotted, shift right] & G^n(SA') \arrow[l, "\approx"', shift right] \arrow[r, "\delta^n"', "\approx"] & G^{n+1}(\tilde{A}') \approx G^{n+1}(A') .
\end{tikzcd}$$

Les composées des flèches horizontales (de gauche à droite) sont évidemment

$$\partial^n\colon\ F^n(A'') \to F^{n+1}(A') \quad \text{et} \quad \delta^n\colon\ G^n(A'') \to G^{n+1}(A') .$$

Les diagrammes carrés sont commutatifs par définition ou naturalité. Le théorème d'unicité en résulte aussitôt.

7.8. Théorème. *Supposons que A soit une algèbre de Banach sur* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$. *Alors les foncteurs $K^n(A)$ coïncident avec les foncteurs $K^n(\mathscr{P}(A))$ définis dans* [3]. *En particulier, ils sont périodiques de période* 8 *dans le cas réel et de période* 2 *dans le cas complexe.*

Ce théorème est démontré dans [4, p. 170].

7.9. Théorème. *Supposons que A soit un anneau discret. Alors les foncteurs $K^n(A)$ coïncident avec les foncteurs $K_{-n}(A)$ introduits par Bass* [1, p. 677].

Démonstration. Soit F un foncteur de la catégorie des anneaux dans celle des groupes abéliens. Alors Bass définit un foncteur LF par la formule

$$LF(A) = \operatorname{Coker}\bigl(F(A[t]) \oplus F(A[t^{-1}]) \to F(A[t,t^{-1}])\bigr) .$$

Le foncteur K_{-n} est défini par récurrence sur n grace à la formule $K_{-n} = LK_{-n+1}$ avec $K_0 = K$. Si

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\
B'' \arrow[r] & A''
\end{tikzcd}$$

est un diagramme cartésien, $A \to A''$ étant surjectif, on a la suite exacte (dite « de Mayer-Vietoris »)

$$\begin{aligned} K_{-n}(B) \to K_{-n}(A) \oplus K_{-n}(B'') \to K_{-n}(A'') \to K_{-n-1}(B) \\ \to K_{-n-1}(A) \oplus K_{-n-1}(B'') \end{aligned}$$

Considérons maintenant une suite exacte

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

où A et A'' sont unitaires. On peut lui associer le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} A'^{+} & \to & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z} & \to & A'' \end{array}$$

d'où la suite exacte

$$K_{-n}(A'^{+}) \to K_{-n}(A) \oplus K_{-n}(Z) \to K_{-n}(A'') \to K_{-n-1}(A'^{+}) \to \dots$$

Si on pose $K_{-n}(A') = \operatorname{Ker}(K_{-n}(A'^{+}) \to K_{-n}(\mathbf{Z}))$ pour tout anneau A', on en déduit la suite exacte

$$K_{-n}(A') \to K_{-n}(A) \to K_{-n}(A'') \to K_{-n-1}(A') \to K_{-n-1}(A) \to \dots$$

D'autre part, si F est un foncteur tel que $F(A) \approx F(\tilde{A})$, il en est de même de LF grace aux identités

$$A[t,t^{-1}]^{\sim} \approx \tilde{A}[t,t^{-1}],\ A[t]^{\sim} \approx \tilde{A}[t],\ A[t^{-1}]^{\sim} \approx \tilde{A}[t^{-1}] .$$

Par conséquent $K_{-n}(A) \approx K_{-n}(\tilde{A})$. Enfin, la définition des foncteurs K_{-n} s'étend de manière immédiate aux catégories additives $\mathscr{C}$ (considérer la catégorie pseudo-abélienne associée à $\mathscr{C}[t,t^{-1}]$ au lieu de $A[t,t^{-1}]$). Si $\mathscr{C}$ est une catégorie flasque, il en est de même de $\mathscr{C}[t]$, $\mathscr{C}[t^{-1}]$ et de $\mathscr{C}[t,t^{-1}]$. Par conséquent $F(\mathscr{C}) = 0$ pour $\mathscr{C}$ flasque implique une propriété analogue pour LF et en particulier pour K_{-n}.

De cette discussion il résulte que (F^n, ∂^n) avec $F^n = K_{-n}$ vérifie les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité 7.7 pour la catégorie des anneaux de Banach dont la quasi-norme ne prend qu'un nombre discret de valeurs (dans ce cas $\tilde{A}$ est aussi l'anneau stabilisé de l'anneau discret sous-jacent à A). On a donc pour ces anneaux des isomorphismes canoniques $K_{-n}(A) \approx K^n(A)$, $n \geqq 0$.

7.10. Corollaire. *Soit A un anneau noethérien régulier. Alors $K^n(A) = 0$ pour $n > 0$.*

Appendices.

Appendice 1. Formalisation de l'homotopie.

Le lecteur a pu se rendre compte que la définition des foncteurs K^n, $n<0$, qui a été adoptée, utilise de manière essentielle la notion d'homotopie. Le but de cet appendice est de formaliser quelque peu la situation de manière à mettre en valeur les propriétés essentielles de cette notion que nous utilisons. Le symbole 1 désignera aussi bien le foncteur identique que le morphisme identique entre deux foncteurs. Si $\alpha: F \to F'$ est un morphisme fonctoriel entre deux foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et si θ (resp. θ') est un endomorphisme de $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{C}'$), on notera $\alpha * \theta$ (resp. $\theta' * \alpha$) le morphisme fonctoriel $F \cdot \theta \to F' \cdot \theta$ (resp. $\theta' \cdot F \to \theta' \cdot F'$) défini par $(\alpha * \theta)(M) = \alpha(\theta(M))$ (resp. $(\theta' * \alpha)(M) = \theta'(\alpha(M))$).

Soit maintenant $\mathscr{H}$ une sous-catégorie de la catégorie des anneaux. On suppose que $\mathscr{H}$ est stable par noyaux, i.e. si

$$0 \to A' \to A \to A''$$

est une suite exacte d'anneaux et si $A \to A''$ est un morphisme de $\mathscr{H}$, il en est de même de $A' \to A$. On suppose donnés en outre:

1) Un foncteur exact à gauche $\Delta: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$.
2) Quatre morphismes fonctoriels

$$\begin{aligned} p_0, p_1&: \Delta \to 1 \\ i&: 1 \to \Delta \\ D&: \Delta \to \Delta^2 \end{aligned}$$

qui satisfont aux identités suivantes:

1) $p_0 \cdot i = p_1 \cdot i = 1$,
2) $(\Delta * p_0) \cdot D = (p_0 * \Delta) \cdot D = i \cdot p_0$,
3) $(\Delta * p_1) \cdot D = (p_1 * \Delta) \cdot D = 1$.

EXEMPLES.

1) $\mathscr{H}$ est la catégorie des anneaux de Banach, Δ est le foncteur $A \mapsto A\langle x \rangle$ et

$$p_0(\sum a_n x^n) = a_0 ,$$

$$p_1(\sum a_n x^n) = \sum a_n ,$$

$$i(a) = a + 0x + 0x^2 + \dots ,$$

$$D(\sum a_n x^n) = \sum a_n x^n t^n .$$

2) $\mathscr{H}$ est la catégorie des algèbres de Banach; Δ est le foncteur

$A \mapsto A(I)$, $A(I)$ désignant l'algèbre de Banach des fonctions continues sur le segment $I=[0,1]$. Les transformations p_0, p_1, i et D sont alors induites par les applications évidentes entre le point, I et I^2.

3) $\mathscr{H}$ est la catégorie des algèbres de Banach ultramétriques (i.e. $\|x+y\| \leqq \sup(\|x\| \, \|y\|)$), le foncteur Δ étant défini par la formule $\Delta(A) = A\{x\}$ où $A\{x\}$ est l'algèbre de séries formelles $\sum a_n x^n$ satisfaisant à la condition $\sup \|a_n\| < +\infty$. Les transformations p_0, p_1, i et D se définissent comme dans l'exemple 1).

Soit $\varphi\colon A \to A''$ un morphisme de $\mathscr{H}$. On dira que φ est une *fibration* si $\forall \alpha'' \in \mathrm{GL}(\Delta^n A'')$ avec $p_0(\alpha'')=1$, il existe $\alpha \in \mathrm{GL}(\Delta^n A)$ tel que $(\Delta^n \varphi)(\alpha) = \alpha''$. (N.B. On note encore p_0 la transformation composée

$$\Delta^n \to \Delta^{n-1} \to \ldots \Delta^2 \to \Delta \to 1.)$$

Soient α_0 et α_1 deux éléments de $\mathrm{GL}(A)$. On dira que α_0 et α_1 sont homotopes s'il existe un élément α de $\mathrm{GL}(\Delta A)$ tel que $p_0(\alpha) = \alpha_0$ et $p_1(\alpha) = \alpha_1$. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence qui permet de définir le groupe $\pi_0(\mathrm{GL}(A)) = K^{-1}(A)$. On définit de même $EA = \mathrm{Ker}\, p_0$ et $\Omega A = \mathrm{Ker}\, p_0 \cap \mathrm{Ker}\, p_1$ d'où, par récurrence sur i, le groupe

$$\pi_i(\mathrm{GL}(A)) = K^{-i-1}(A) = \pi_{i-1}(\mathrm{GL}(\Omega A)) .$$

Ceci permet de démontrer le théorème suivant: Soit $\varphi\colon A \to A'$ une fibration et soit $A' = \mathrm{Ker}\, \varphi$. On a alors la suite exacte

$$\text{(1)} \qquad K^{-i-1}(A') \to K^{-i-1}(A) \to \ldots \to K^{-1}(A) \to K^{-1}(A'').$$

En outre $K^{-i}(A) = 0$ si A est contractile, c'est-à-dire s'il existe un morphisme $h\colon A \to \Delta A$ tel que $p_0 \cdot \alpha = 0$ et $p_1 \cdot \alpha = 1$. Enfin, si φ est surjectif, il est possible de prolonger la suite exacte (1) jusqu'à $K^0(A'')$.

Remarque. Dans les cas intéressants, une fibration de Serre est un homomorphisme surjectif, mais ce n'est pas le cas pour l'exemple trivial $\Delta A = A$ par exemple.

Appendice 2. Le cas non stable.

La définition des groupes d'homotopie $\pi_i(\mathrm{GL}(A))$ peut s'étendre de manière évidente au cas non stable: on pose

$$\pi_0(\mathrm{GL}_n(A)) = \mathrm{Coker}(\mathrm{GL}_n(A\langle x \rangle)) \underset{p_1}{\overset{p_0}{\rightrightarrows}} \mathrm{GL}_n(A))$$

et

$$\pi_i(\mathrm{GL}_n(A)) = \pi_0(\mathrm{GL}_n(\Omega^i A)) .$$

On a alors $\pi_i(\mathrm{GL}(A)) = \lim_{\rightarrow} \pi_i(\mathrm{GL}_n(A))$. En suivant les idées de Serre et de Bass, on peut démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Soit A un anneau noethérien commutatif discret de dimension de Krull d. Alors l'application canonique de $\pi_i(\mathrm{GL}_n(A))$ dans $\pi_i(\mathrm{GL}(A))$ est surjective si $n \geqq i+d+1$ et est injective si $n \geqq i+d+2$.*

DÉMONSTRATION. Bass a démontré que si $n \geqq d+1$, l'application canonique de $\mathrm{GL}_n(A)$ dans $K_1(A)$ est surjective [1]. Puisque $K_1(A) \to K^{-1}(A)$ est surjective, la première assertion du théorème est vraie pour $i=0$. D'autre part, si A est un anneau noethérien commutatif de dimension d,

$$(\Omega A)^+ = A + x(x-1)A[x]$$

est de dimension $d+1$: en effet, puisque tout élément de $A[x]$ est entier sur $(\Omega A)^+$, on a $\mathrm{Dim}(\Omega A)^+ = \mathrm{Dim}(A[x]) = d+1$ (théorème de Cohen–Seidenberg). En raisonnant par récurrence sur i, on démontre ainsi la première assertion du théorème. Pour démontrer l'injectivité, il suffit aussi de considérer le cas $i=0$. On a alors besoin du « lemme de cancellation » [1, p. 240] ainsi que de la définition explicite de l'injection ∂ de $K^{-1}(A)$ dans $\tilde{K}((\Omega A)^+)$ donnée par Milnor (cf. [1, p. 478]). De manière précise si $\alpha \in \mathrm{GL}_n(A)$, $n \geqq d+2$, le module sur $(\Omega A)^+$ qui a comme classe $\partial(\alpha)$ peut être défini comme le sous-ensemble E de $(A[x])^n$ formé des éléments $P(x)$ satisfaisant à la condition $P(1) = \alpha(P(0))$. Si deux éléments α_0 et α_1 de $\mathrm{GL}_n(A)$ sont tels que les deux modules E_0 et E_1 qui leur correspondent sont isomorphes, il en résulte que les triplets $((A[x])^n, (A[x])^n, \alpha_i)$, $i=1,2$, qui définissent deux éléments du groupe

$$K^{-1}(A) \simeq K(\varphi), \quad \varphi\colon A[x] \to A \times A\ ,$$

sont isomorphes grâce à un isomorphisme égal à l'identité pour $x=0$. Le théorème en résulte de manière évidente.

EXEMPLE. Si A est un corps k, l'application $\pi_1(\mathrm{GL}_2(k)) \to K^{-2}(k)$ est surjective tandis que l'application $\pi_1(\mathrm{GL}_3(k)) \to K^{-2}(k)$ est bijective.

Appendice 3. Autre description du foncteur K^{-1}.

Nous allons donner une description du foncteur $K^{-1}(A)$, A anneau de Banach, qui ne fait intervenir que la topologie de A. Un élément α de $\mathrm{GL}(A)$ est dit *topologiquement unipotent* si $(\alpha-1)^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Soit $\mathrm{GL}'(A)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(A)$ engendré par les matrices topologiquement unipotentes.

PROPOSITION. *Les sous-groupes* $\mathrm{GL}'(A)$ *et* $\mathrm{GL}^0(A)$ *coïncident.*

DÉMONSTRATION. Si $1+\nu$ est topologiquement unipotente, le polynôme $1+t\nu$ est inversible dans $\mathrm{GL}(A\langle t\rangle)$. Par suite $\mathrm{GL}'(A)\subset \mathrm{GL}^0(A)$. Réciproquement, si α est un élément de $\mathrm{GL}^0(A)$, il existe une série convergente $\alpha(x)=\sum \alpha_n x^n$ telle que $\sum\alpha_n=\alpha$ et $\alpha_0=1$. Pour N suffisamment grand, $\alpha_N'(1)=\sum_{n\leq N}\alpha_n$ est voisin de α et l'élément $\alpha_N'(1)\alpha^{-1}$ est topologiquement unipotent. Par des produits avec des matrices élémentaires, donc unipotentes, on peut réduire $\alpha_N'(x)$ à la forme $1+\nu x$ (cf. [6, p. 599]). Puisque $\alpha_N'(x)$ est inversible, ceci implique que $\nu^n\to 0$. Donc $1+\nu$ est topologiquement unipotente.

REMARQUES. On ignore si $K^{-n}(A)$ pour $n>1$ est un invariant topologique de A. Il en est ainsi cependant dans les cas particuliers les plus intéressants: le cas discret (i.e. la norme ne prend que des valeurs discrètes), le cas des algèbres de Banach classiques (grâce au théorème de Banach) et celui des algèbres de Banach ultramétriques (cf. l'appendice suivant). Dans le cas d'un anneau noethérien régulier discret, $\mathrm{GL}'(A)$ coïncide avec le sous-groupe des commutateurs [1, p. 643], [2, p. 66]. L'application évidente de $K_1(A)$ sur $K^{-1}(A)$ est donc bijective dans ce cas.

Appendice 4. Le cas ultramétrique.

Dans le cas ultramétrique, il existe des définitions plus adéquates des foncteurs EA, ΩA, etc. Elles sont obtenues grâce au foncteur $A\mapsto \Delta A = A\{x\}$ où $A\{x\}$ désigne l'algèbre des séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ telles que $\sup\|a_n\| < +\infty$.

On notera $E'A$, $\Omega'A$ les foncteurs anneau des chemins, anneau des lacets obtenus grâce au foncteur Δ. De même, on notera $K'^{-n}(A)$ les foncteurs obtenus en utilisant cette notion d'homotopie (cf. appendice 1). On a une application évidente de $K^{-n}(A)$ dans $K'^{-n}(A)$.

PROPOSITION. *L'application* $K^{-n}(A)\to K'^{-n}(A)$ *est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. La méthode de l'appendice précédent permet de démontrer également que $K'^{-1}(A)=\mathrm{GL}(A)/\mathrm{GL}'(A)$. Donc $K^{-1}(A)\approx K'^{-1}(A)$. D'autre part, il est clair que l'application $E'A\to A$ est une fibration (pour le foncteur $\Delta A = A\langle x\rangle$). Il suffit donc de montrer que les groupes d'homotopie de $\mathrm{GL}(E'A)$ sont nuls. Or, un élément de $\pi_p(\mathrm{GL}(E'A))$ est défini par une série de la forme

$$\gamma(x_1,\ldots,x_p,t) = \gamma(x,t) = \sum \gamma_I(t)x^I \in \mathrm{GL}\big((E'A)\langle x_1,\ldots,x_p\rangle,n\big)\,,$$

I représentant un multi-indice, $\gamma_I(t)$ une matrice $n\times n$ avec $\sum_I \|\gamma_I(t)\| < +\infty$, tout ceci satisfaisant aux conditions de « recollement »

$$\gamma(x_1,\ldots,x_n,0) = \gamma(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n) = \gamma(x_1,\ldots,1,\ldots,x_n) = 1\,.$$

La matrice $\gamma(x,t)$ est limite de matrices qui s'écrivent comme polynômes en x et t soit $\gamma_N(x,t) = \sum \gamma_I{}^N(t)x^I$ satisfaisant à des identités analogues. De même, $\sigma(x,t) = \gamma^{-1}(x,t)$ est limite de polynômes $\sigma_N(x,t)$. Les produits $\theta_N = \gamma_N\sigma_N$ et $\theta_N{}' = \sigma_N\gamma_N$ tendent vers 1. On va choisir N suffisamment grand pour que γ_N et γ aient la même classe dans le groupe $\pi_p(\mathrm{GL}(E'(A))$ et que le coefficient de $t^{r_1}x_1{}^{\alpha_1}\ldots x_p{}^{\alpha_p}$ dans θ_N et $\theta_N{}'$ soit en norme plus petit que 1. Grâce aux propriétés de la norme ultramétrique, on voit que les polynômes θ_N et $\theta_N{}'$ sont inversibles dans $A\langle x_1,\ldots,x_p,t\rangle$ (n) et qu'ils sont de plus homotopes à l'identité. Ceci montre que l'application

$$0 = \pi_p(\mathrm{GL}(EA)) \to \pi_p(\mathrm{GL}(E'A))$$

est surjective, ce qui démontre la proposition.

Appendice 5. Comparaison avec les groupes K_n de [6].

Pour éviter toute confusion, on notera par $K_n{}^{NV}$ ce groupe K_n.

Soit $D_{m,r}$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(A[x_1,\ldots,x_r])$ formé des matrices $\alpha = \alpha(x_1,\ldots,x_r)$ qui satisfont aux conditions suivantes

$$\alpha(x_1,\ldots,x_r) = 1 \qquad \text{si } x_i = 0 \text{ ou } 1,\ i \leqq m\,.$$

$$\alpha(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_r) = \alpha(x_1,\ldots,x_i{}',\ldots,x_r) \quad \text{si } x_i = 0 \text{ et } x_i{}' = 1,\ i > m\,.$$

Soit $\bar{D}_{m,r} = \pi_0(D_{m,r})$ le groupe quotient de $D_{m,r}$ par la relation d'équivalence définie par l'homotopie entre de telles matrices. On a évidemment $\bar{D}_{r,r} = K^{-r-1}(A)$ et $\bar{D}_{0,r} = K_{r+1}^{NV}(A)$.

Proposition. *Pour $r \geqq m$ on a la formule*

$$\bar{D}_{m,r} = \bar{D}_{r,r} \oplus \binom{r-m}{1}\bar{D}_{r-1,r-1} \oplus \binom{r-m}{2}\bar{D}_{r-2,r-2} \oplus \ldots \oplus \bar{D}_{0,0}\,.$$

COROLLAIRE. *Les groupes K_{r+1}^{NV} se déduisent des K^{-n}, soit*

$$K_{r+1}^{NV} = K^{-r-1} \oplus \binom{r}{1} K^{-r} \oplus \binom{r}{2} K^{-r+1} \oplus \ldots \oplus K^{-1} .$$

DÉMONSTRATION. Si $m < r$, la transformation $x_r = 0$ permet de définir une suite exacte scindée

$$0 \to \bar{D}_{m+1,r} \to \bar{D}_{m,r} \to \bar{D}_{m,r-1} \to 0 .$$

On raisonne alors par récurrence sur la différence $r-m$, la formule de la proposition étant évidente pour $r = m$.

REMARQUE. Soit $\pi_i\colon K_{r+1}^{NV} \to K_r^{NV}$ les homomorphismes obtenus en faisant une variable égale à zéro. On a alors de manière évidente $K^{-r-1}(A) = \bigcap \operatorname{Ker} \pi_i$.

Appendice 6. Comparaison entre K^{-2} et le groupe K_2 de Milnor.

Soit $K_2(A)$ le groupe défini par Milnor (cf. [7, p. 204]). On notera $\tilde{e}_{ij}^s$ le symbole $x_{ij}(s)$. Si A est un anneau de Banach, le groupe $\mathrm{GL}^\circ(\Omega A)$ est un sous-groupe distingué dans $\mathrm{GL}(EA)$. On définit maintenant un homomorphisme θ de $ST(A)$ dans le groupe quotient $\mathrm{GL}(EA)/\mathrm{GL}^\circ(\Omega A)$ par la formule $\theta(\tilde{e}_{ij}^s) = e_{ij}^{sx}$ où e_{ij}^{sx} est la matrice élémentaire (c_{kl}) avec $c_{ll} = 1$, $c_{kl} = 0$ si $k \neq l$ $(k,l) \neq (i,j)$ et $c_{ij} = sx$. Pour vérifier que θ est bien défini, il faut vérifier que les matrices e_{ij}^{sx} satisfont dans le groupe quotient $\mathrm{GL}(EA)/\mathrm{GL}^\circ(\Omega A)$ aux mêmes relations que les symboles $\tilde{e}_{ij}^s$ dans le groupe de Steinberg. En effet, par exemple, si $i \neq l$ et $j = k$, on a

$$e_{ij}^{sx} e_{kl}^{tx} = e_{il}^{stx^2} \equiv e_{il}^{stx} \quad \mathrm{mod.}\, \mathrm{GL}^\circ(\Omega A) .$$

D'autre part, soit

$$\mu\colon ST(A) \to \mathrm{GL}(A), \qquad \mu'\colon \mathrm{GL}(EA)/\mathrm{GL}^\circ(\Omega A) \to \mathrm{GL}(A)$$

les homomorphismes définis par $\mu(\tilde{e}_{ij}^s) = c_{ij}^s$ et $\mu'(\alpha(x)) = \alpha(1)$. On a alors le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
K_2(A) \arrow[r, dotted] \arrow[d] & K^{-2}(A) \arrow[d] \\
ST(A) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathrm{GL}(A)/\mathrm{GL}^\circ(\Omega A) \arrow[d, "\mu'"] \\
\mathrm{GL}(A) \arrow[r, equal] & \mathrm{GL}(A) .
\end{tikzcd}$$

On déduit de ce diagramme un homomorphisme de $K_2(A)$ dans $K^{-2}(A)$ noté encore θ.

THÉORÈME. *Soit A un anneau de Banach tel que $K_1(A\langle x\rangle)\simeq K_1(A)$ grâce à la projection canonique. Alors l'application θ est surjective.*

DÉMONSTRATION. Considérons la suite exacte (cf. [7, p. 213])

$$K_2(A\langle x\rangle) \to K_2(A\times A) \to K_1(\varphi) \to K_1(A\langle x\rangle) \to K_1(A\times A)$$

associé à l'homomorphisme surjectif $A\langle x\rangle \to A\times A$ obtenu en faisant $x=0$ ou 1. Puisque $K_2(A\times A)\approx K_2(A)\oplus K_2(A)$, on déduit de cette suite la suite exacte

$$K_2(A) \to K_1(\varphi) \to K_1(A\langle x\rangle) \to K_1(A)\,.$$

La même suite exacte obtenue en remplaçant K_1 et K_2 par K^{-1} et K^{-2} respectivement permet d'écrire le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
K_2(A) & \to & K_1(\varphi) & \to & K_1(A\langle x\rangle) & \to & K_1(A)\\
{\scriptstyle\theta}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
K^{-2}(A) & \to & K^{-1}(\varphi) & \to & K^{-1}(A\langle x\rangle) & \to & K^{-1}(A)\,.
\end{array}$$

Le théorème résulte alors du fait que l'application canonique $K_1(\varphi)\to K^{-1}(\varphi)$ est surjective et, vu l'hypothèse, du fait que $K_2(A)\to K_1(\varphi)$ est aussi un épimorphisme.

REMARQUE 1. Le théorème s'applique notamment dans le cas où A est un anneau noethérien régulier discret.

REMARQUE 2. La même méthode permet de démontrer le résultat suivant de Milnor: si A est une algèbre de Banach commutative, l'image de $\theta\colon K_2(A)\to K^{-2}(A)\approx\pi_1(\mathrm{GL}(A))$ est le sous-groupe $\pi_1(SL(A))$.

REMARQUE 3. Une autre manière de construire θ est de remarquer que la suite exacte

$$1 \to K^{-2}(A) \to \mathrm{GL}(EA)/\mathrm{GL}^\circ(\Omega A) \to G \to 1$$

où $G=\mathrm{GL}^\circ(A)$ définit une extension centrale de G par le groupe $K^{-2}(A)$. L'homomorphisme θ se déduit alors du fait que l'extension centrale

$$1 \to K_2(A) \to ST(A) \to G' \to 1$$

où $G' = [\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}(A)] \subset G$ est universelle. Bien entendu, les considérations précédentes peuvent s'appliquer à un groupe algébrique parfait quelconque G, la définition de $\pi_1(G)$ étant calquée sur celle de K^{-2}.

Appendice 7. Suites de Mayer-Vietoris.

Considérons un diagramme cartésien d'anneaux de Banach

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi'} & A_2 \\ {\scriptstyle \varphi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ A_1 & \xrightarrow{\psi} & A' \end{array}$$

et supposons que φ (ou ψ) soit une fibration. On a alors le résultat suivant:

THÉORÈME. *Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il existe une suite exacte naturelle (∂ est explicité dans la démonstration)*

$$(1) \qquad K^{n-1}(A) \to K^{n-1}(A_1) \oplus K^{n-1}(A_2) \to K^{n-1}(A') \xrightarrow{\partial} K^n(A) \to \dots .$$

DÉMONSTRATION. On a les suites exactes (où $K^n(\varphi) \approx K^n(\varphi')$ par excision)

$$(2) \qquad \to K^{n-1}(A_2) \to K^{n-1}(A') \to K^n(\varphi) \to K^n(A_2) \to K^n(A') \to \dots$$

$$(3) \qquad \to K^{n-1}(A) \to K^{n-1}(A_1) \to K^n(\varphi') \to K^n(A) \to K^n(A_1) .$$

L'opérateur bord ∂: $K^{n-1}(A') \to K^n(A)$ s'en déduit en suivant le zigzag évident. L'exactitude de la suite (1) est alors une simple conséquence formelle de l'exactitude des suites (2) et (3).

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Bass, *Algebraic K-theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York · Amsterdam, 1968.
2. H. Bass, A. Heller and R. G. Swan, *The Whitehead group of a polynomial extension*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 22 (1964), 61–80.
3. M. Karoubi, *Algèbres de Clifford et K-théorie*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 1 (1968), 161–270.
4. M. Karoubi, R. Gordon, P. Löffler and M. Zisman, *Séminaire Heidelberg-Saarbrücken Strasbourg sur la K-théorie* (1967/68) (Lecture Notes in Mathematics 136), Springer-Verlag, Berlin, 1970.
5. M. Karoubi et O. Villamayor, *K-théorie algébrique et K-théorie topologique*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 219 (1969), A 416–A 419.

6. A. Nobile et O. Villamayor, *Sur la K-théorie algébrique*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 1 (1968), 581–616.
7. R. G. Swan, *Algebraic K-theory* (Lecture Notes in Math. 76) Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1968.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE, STRASBOURG, FRANCE