MATH. SCAND. 28 (1971), 317–324

ETUDE D'ENSEMBLES DE DITKIN FORT DANS LES ALGÈBRES TENSORIELLES ET LES ALGÈBRES DE GROUPE

FRANÇOISE LUST

1. Définitions et notations.

Soient K un espace topologique localement compact, $C_0(K)$ l'algèbre des fonctions continues sur K tendant vers 0 à l'infini, $\mathscr{R}$ une algèbre de Banach régulière, de spectre K.

Etant donné un fermé $E \subset K$, $I(E)$ désigne l'idéal des fonctions de $\mathscr{R}$ nulles sur E, $J(E)$ désigne l'adhérence dans $\mathscr{R}$ de l'idéal $I_0(E)$ des fonctions nulles dans un voisinage de E.

E est un *ensemble de synthèse* si $I(E)=J(E)$.

E est un *ensemble de Ditkin* si pour toute $f \in I(E)$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in I_0(E)$ telle que $\|f-fg\| < \varepsilon$.

E admet *une unité approchée bornée* s'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in I(E)$ vérifiant

(i) $\|g\| < M$,
(ii) pour toute $f \in I(E)$, $\|f-fg\| < \varepsilon$.

Supposons K compact. D'après [6, Ch. 8], E est un *ensemble de Ditkin fort* s'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout voisinage Ω de E il existe $e_\Omega \in \mathscr{R}$ vérifiant

(i)′ $e_\Omega \in I_0(E)$,
(ii)′ $e_\Omega = 1$ dans le complémentaire de Ω,
(iii)′ $\|e_\Omega\| < M$.

Rappelons qu'un ensemble de synthèse et de Ditkin fort est de Ditkin.
Nous noterons:

_$A(\mathsf{R}^n)$ (respectivement $A(\mathsf{T}^n)$) l'algèbre des transformées de Fourier de $L^1(\mathsf{R}^n)$ (respectivement $L^1(\mathsf{Z}^n)$);

_$V(\mathsf{R}^{2n})$ l'algèbre tensorielle $C_0(\mathsf{R}^n)\hat{\otimes}C_0(\mathsf{R}^n)$;

Reçu le 1. juin 1970; revision reçue le 2. octobre 1970.

$_V(K_1 \times K_2) = V(\mathsf{R}^{2n})/I(K_1 \times K_2) = C(K_1)\hat{\otimes} C(K_2)$ l'algèbre des restrictions à un compact $K_1 \times K_2 \subseteq \mathsf{R}^{2n}$.

Nous démontrerons les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Soit $K_1 \times K_2 \subseteq \mathsf{R}^{2n}$ un compact contenant la sphère unité. La sphère est de Ditkin fort et de Ditkin dans $V(K_1 \times K_2)$. Elle détermine dans $K_1 \times K_2$ des régions fermées (intérieur et extérieur) qui sont de Ditkin dans $V(K_1 \times K_2)$.*

THÉORÈME 2. *L'intérieur et l'extérieur de la sphère n'ont pas d'unité approchée bornée dans $V(K_1 \times K_2)$ ni dans $A(\mathsf{R}^n)$.*

Nous généraliserons dans $V(K_1 \times K_2)$ à des fermés autres que la sphère et définirons des « fonctions de niveau » analogues aux fonctions radiales.

2. Définition et étude locale des fonctions de niveau.

D'après [2] une fonction radiale de $A(\mathsf{R}^n)$ coïncide sur tout compact de $]0, +\infty[$ avec la transformée de Fourier d'une fonctions de $L^1_{\omega_n}(\mathsf{R})$, ω_n étant le poids $(1+|x|^{\frac{1}{2}(n-1)})$. Démontrons le résultat analogue:

PROPOSITION 1. *Une fonction radiale de $V(\mathsf{R}^{2n})$ coïncide localement avec une fonction $\varphi(\sum_{i=1}^{2n} x_i^2)$ où φ appartient à $A(\mathsf{R})$.*

Notons

$$I = [0,1], \quad x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \text{ un point de } I^{2n},$$
$$I' = [0,1], \quad y = (y_1, \ldots, y_{2n}) \text{ un point de } I'^{2n}.$$

Considérons les homéomorphismes $\theta_i \colon I \to I'$

$$x_i \rightsquigarrow x_i^2, \quad i = 1, \ldots, 2n,$$

et les applications associées

$$\begin{aligned} \check{T} &= (\theta_1 \times \check{\ldots} \times \theta_n) &&: C(I'^n) \to C(I^n), \\ \check{U} &= (\theta_{n+1} \times \check{\ldots} \times \theta_{2n}) &&: C(I'^n) \to C(I^n), \\ \check{T} &\hat{\otimes} \check{U} &&: V(I'^{2n}) \to V(I^{2n}). \end{aligned}$$

$\check{T} \hat{\otimes} \check{U}$ définit un isomorphisme entre l'espace des fonctions de $V(I'^{2n})$ constantes sur les hyperplans $\{y \in I'^{2n} \mid \sum_{i=1}^{2n} y_i = \text{constante}\}$ et les fonctions radiales de $V(I^{2n})$. Il suffit donc de démontrer le lemme suivant:

LEMME 1. *L'espace des fonctions de $V(I'^{2n})$ constantes sur les hyperplans est localement isomorphe à $A(\mathsf{T})$.*

Considérons l'application $d\colon [-1,1] \to \mathsf{T}$

$$x \rightsquigarrow e^{ix}$$

avec $d[-1,1]=\mathsf{T}$, et les applications associées

$$\begin{aligned} \check{d}^n\colon\ & C(\mathsf{T}^n) \to C([-1,1]^n)\,, \\ \check{d}^n\hat{\otimes}\check{d}^n\colon\ & V(\mathsf{T}^{2n}) \to V([-1,1]^{2n})\,. \end{aligned}$$

$\check{d}^n\hat{\otimes}\check{d}^n$ définit un isomorphisme local entre les fonctions de $V(I'^{2n})$ constantes sur les hyperplans et les fonctions de $V(\mathsf{T}^{2n})$ constantes sur les fibres

$$\{t \in \mathsf{T}^{2n} \mid \textstyle\prod_{i=1}^{2n} t_i = \text{constante}\}\,.$$

D'après [7, Ch. 8] l'espace des fonctions de $V(\mathsf{T}^{2n})$ constantes sur les fibres

$$\{t \in \mathsf{T}^{2n} \mid t_i t_{n+i} = \text{constante},\ i=1,\ldots,n\}$$

est isomorphe à $A(\mathsf{T}^n)$. D'autre part l'application $R\colon \mathsf{T}^n \to \mathsf{T}^n$,

$$t_1 \rightsquigarrow t_1 \times \ldots \times t_n, \qquad t_i \rightsquigarrow t_i, \qquad i=2,\ldots,n\,,$$

définit un isomorphisme de $A(\mathsf{T}^n)$ sur $A(\mathsf{T}^n)$ identifiant les fonctions constantes sur $\{t \in \mathsf{T}^n \mid t_1 \times \ldots \times t_n = \text{constante}\}$ aux fonctions ne dépendant que de t_1 c'est-à-dire à $A(\mathsf{T})$.

Plus généralement soient I_i, I_i' des intervalles compacts de R, et

$$\begin{aligned} \theta_i\colon\ & I_1 \times \ldots \times I_n \to I_i', \quad && i=1,\ldots,n \\ \theta_i\colon\ & I_{n+1} \times \ldots \times I_{2n} \to I_i', \quad && i=n+1,\ldots,2n \end{aligned}$$

des applications, associées à $\check{T}=(\theta_1 \times \check{\ldots} \times \theta_n)$, $\check{U}=(\theta_{n+1} \times \check{\ldots} \times \theta_{2n})$, $\check{T}\hat{\otimes}\check{U}$. Supposons que $T=\theta_1 \times \ldots \times \theta_n$ et $U=\theta_{n+1} \times \ldots \times \theta_{2n}$ soient des homéomorphismes de $I_1 \times \ldots \times I_n$ sur $I_1' \times \ldots \times I_n'$ et de $I_{n+1} \times \ldots \times I_{2n}$ sur $I_{n+1}' \times \ldots \times I_{2n}'$ respectivement.

Définition. Une fonction de niveau dans $V(I_1 \times \ldots \times I_{2n})$ est l'image par $\check{T}\hat{\otimes}\check{U}$ d'une fonction de $V(I_1' \times \ldots \times I_{2n}')$ constante sur les hyperplans

$$\{y \in I_1' \times \ldots \times I_{2n}' \mid \textstyle\sum_{i=1}^{2n} y_i = \text{constante}\}\,.$$

Proposition 1bis. *Une fonction de niveau coïncide localement avec une fonction* $\varphi(\sum_{i=1}^{2n} \theta_i(x))$ *où* φ *appartient à* $A(\mathsf{R})$.

3. Propriétés de synthèse et de Ditkin fort.

Les notations sont celles des paragraphes précédents.

PROPOSITION 2. *Soit* H *l'hyperplan* $\{y \in I_1' \times \ldots \times I_{2n}' \mid \sum_{i=1}^{2n} y_i = 1\}$. *Le fermé* $E = (T \times U)^{-1}(H)$ *est de synthèse dans* $V(\mathsf{R}^{2n})$.

Il suffit de montrer que E est de synthèse dans $V(I_1 \times \ldots \times I_{2n})$ car $I_1 \times \ldots \times I_{2n}$ est de synthèse dans $V(\mathsf{R}^{2n})$. Cela résulte des lemmes suivants:

LEMME 2. *Soient* K_1, K_2, K_1', K_2' *des espaces topologiques localement compacts,* T *et* U *des homéomorphismes de* K_1 *dans* K_1' *et de* K_2 *dans* K_2'. *Soit* E' *un fermé de synthèse dans* $V(K_1' \times K_2')$. *Alors* $E = (T \times U)^{-1}(E')$ *est de synthèse dans* $V(K_1 \times K_2)$.

La démonstration est évidente.

LEMME 3. *L'hyperplan* $H = \{y \in [-1,1]^{2n} \mid \sum_{i=1}^{2n} y_i = 1\}$ *est de synthèse dans* $V([-1,1]^{2n})$.

Reprenant les notations du lemme 1, il suffit de montrer que

$$d^n \times d^n(H) \;=\; d^n \times d^n([-1,1]^{2n}) \cap \{t \in \mathsf{T}^{2n} \mid \textstyle\prod_{i=1}^{2n} t_i = e^i\} \;=\; \mathsf{T}^{2n} \cap H_1$$

est de synthèse dans $V(\mathsf{T}^{2n})$.

Soient M l'application: $\mathsf{T}^n \to \mathsf{T}^{2n}$

$$t_1, \ldots, t_n \leadsto t_1 t_{n+1}, \ldots, t_{n-1} t_{2n}$$

et $\check{M}$ l'application de Hopf associée [7, Ch. 8]: $A(\mathsf{T}^n) \to V(\mathsf{T}^{2n})$. Par définition,

$$H_1 \;=\; M\{t \in \mathsf{T}^n \mid \textstyle\prod_{i=1}^{n} t_i = e^i\} \;=\; M \circ R\{t \in \mathsf{T}^n \mid t_1 = e^i\}\,.$$

L'ensemble $\{t \in \mathsf{T}^n \mid t_1 = e^i\}$ est un translaté de sous-groupe donc est de synthèse dans $A(\mathsf{T}^n)$. D'après [7, Ch. 8] H_1 est donc de synthèse dans $V(\mathsf{T}^{2n})$.

Soient $f \in I(\mathsf{T}^{2n} \cap H_1) \subset V(\mathsf{T}^{2n})$ et $F = \check{d}^n \hat{\otimes} \check{d}^n(f) \in I(H) \subset V[-1,1]^{2n}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe α tel que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ et $\|F(y) - F(\alpha y)\| < \varepsilon$. Il en résulte que $I(\mathsf{T}^{2n} \cap H_1) = (\check{d}^n \hat{\otimes} \check{d}^n)^{-1} I(H)$ est égal à

$$I(H_1)/I(\mathsf{T}^{2n}) \;=\; J(H_1)/I(\mathsf{T}^{2n}) \;=\; J(\mathsf{T}^{2n} \cap H_1)\,.$$

PROPOSITION 3. *La portion* E *de la sphère unité située dans* $[0,1]^{2n}$ *est un ensemble de Ditkin fort dans* $V([0,1]^{2n})$.

Les ensembles $\{x \in [0,1]^{2n} \mid \sum_{i=1}^{2n} x_i^2 - 1 \in v(0)\}$ forment une base de voisinages de E dans $[0,1]^{2n}$ lorsque $v(0)$ parcourt une base de voisinages de $\{0\}$ dans R. Le point $\{1\}$ étant de Ditkin fort dans $A(\mathsf{T})$, à tout $v(0)$ correspondent un voisinage $w(1) \subset \mathsf{T}$ tel que $d^{-1}(w) \subset v(0)$ et une fonction

e_ω appartenant à $A(\mathsf{T})$. Notons F une fonction de $V([0,1]^{2n})$ égale à 1 dans un voisinage de E, à support inclus dans

$$\{x \in [0,1]^{2n} \mid \textstyle\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 - 1 \in [-1,1]\} .$$

La famille des fonctions

$$1 - F(x)[1 - \check{d}(e_\omega)(\textstyle\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 - 1)]$$

répond à la question.

Remarque. Le même raisonnement montre que si $K_1 \times K_2 \subset \mathsf{R}^{2n}$ est un compact contenant la sphère unité, celle-ci est de Ditkin fort dans $V(K_1 \times K_2)$.

Théorème 1. *La sphère unité est un ensemble de Ditkin fort et de Ditkin dans* $V(K_1 \times K_2)$. *Les régions fermées (intérieur et extérieur) qu'elle détermine sont de Ditkin dans* $V(K_1 \times K_2)$.

Dans $K_1 \times K_2 \subset \mathsf{R}^{2n}$ l'intersection de deux Ditkin fort est un Ditkin fort. La portion E de la sphère unité située dans $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]^{2n}$ est donc de Ditkin fort dans $V([0,1]^{2n})$. D'après la proposition 2 elle est aussi de synthèse, donc de Ditkin dans $V([0,1]^{2n})$ ou $V(\mathsf{R}^{2n})$. La sphère unité, réunion finie d'ensembles de Ditkin est donc de Ditkin dans $V(\mathsf{R}^{2n})$. Pour la seconde partie du théorème, la démonstration est analogue à celle faite dans [5, Ch. 7.5] pour $A(\mathsf{R}^n)$.

Plus généralement, soient I_i, $i = 1,\ldots,2n$, et J, J', J'' des intervalles compact de R tels que $J' + J'' \subseteqq -J$, $J' + J'' \neq -J$. Considérons des applications continues:

$$\begin{aligned} \varphi &: I_2 \times \ldots \times I_n \to J' ,\\ \psi &: I_{n+1} \times \ldots \times I_{2n} \to J'' ,\\ \theta &: I_1 \to J , \end{aligned}$$

θ étant de plus un homéomorphisme de I_1 sur J, et l'ensemble

$$E = \{x \in I_1 \times \ldots \times I_{2n} \mid \theta(x_1) + \varphi(x_2,\ldots,x_n) + \psi(x_{n+1} \ldots x_{2n}) = 0\} .$$

Proposition 3bis. *Le fermé* E *est un ensemble de Ditkin fort dans* $V(I_1 \times \ldots \times I_{2n})$.

Les ensembles

$$\{x \in I_1 \times \ldots \times I_{2n} \mid x_1 - \theta^{-1}[-\varphi(x_2,\ldots x_n) - \psi(x_{n+1} \ldots x_{2n})] \in v(0)\}$$

forment une base de voisinages de E dans $I_1 \times \ldots \times I_{2n}$ lorsque $v(0)$ parcourt une base de voisinages de $\{0\}$ dans R. La fonction θ^{-1} étant uniformément continue sur J il en est de même des ensembles

$$\{x \in I_1 \times \ldots \times I_{2n} \mid \theta(x_1) + \varphi(x_2 \ldots x_n) + \psi(x_{n+1} \ldots x_{2n}) \in v(0)\} .$$

La démonstration est alors la même que pour la proposition 3.

Exemple. Le graphe $\subset I_1 \times I_2$ d'une fonction réelle continue sur un intervalle compact I_2 de R est de Ditkin fort dans $V(I_1 \times I_2)$.

Regroupons les hypothèses du paragraphe 2 et de la proposition 3bis. Soient I_i, I_i', $i=1,\ldots,2n$, des intervalles compacts de R tels que $I_2' + \ldots + I_{2n}' \subseteq -I_1'$. Soient

$$\begin{aligned} \theta_1 &: I_1 \to I_1', \\ \theta_i &: I_2 \times \ldots \times I_n \to I_i', \quad i = 2,\ldots,n , \\ \theta_i &: I_{n+1} \times \ldots \times I_{2n} \to I_i', \quad i = n+1,\ldots,2n , \end{aligned}$$

des applications telles que $T = (\theta_1 \times \ldots \times \theta_n)$, $U = (\theta_{n+1} \times \ldots \times \theta_{2n})$ soient des homéomorphismes.

Théorème 1bis. *Le fermé* $E = \{x \in I_1 \times \ldots \times I_{2n} \mid \sum_{i=1}^{2n} \theta_i(x) = 0\}$ *est un ensemble de Ditkin dans* $V(I_1 \times \ldots \times I_{2n})$, *ainsi que les régions*

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in I_1 \times \ldots \times I_{2n} \mid \textstyle\sum_{i=1}^{2n} \theta_i(x) \geqq 0\} , \\ E_2 &= \{x \in I_1 \times \ldots \times I_{2n} \mid \textstyle\sum_{i=1}^{2n} \theta_i(x) \leqq 0\} . \end{aligned}$$

4. Applications de la détermination des fonctions de niveau.

Théorème 2-A. *Soit* $K_1 \times K_2 \subset \mathsf{R}^{2n}$ *un compact contenant la sphère unité. L'intérieur et l'extérieur de la sphère ne sont pas de Ditkin fort dans* $V(K_1 \times K_2)$. *Les régions* E_1, E_2 *définies dans le théorème* 1*bis ne sont pas de Ditkin fort dans* $V(I_1 \times \ldots \times I_{2n})$.

Cela résultera de l'appartenance locale à $A(\mathsf{T})$ des fonctions radiales et des fonctions de niveau, et du théorème suivant [1, Ch. 3]: soient K un espace topologique localement compact, $\mathscr{R}$ une algèbre de Banach de spectre K, E_1, E_2 deux fermés de K. Une condition suffisante pour que l'idéal $I(E_1) + I(E_2)$ soit fermé dans $\mathscr{R}$ est que E_1 ou E_2 admette une unité approchée bornée.

Ici E_1, E_2 et $E_1 \cap E_2$ sont de synthèse. Nous avons donc:

$$\begin{aligned} I(E_1) + I(E_2) &= J(E_1) + J(E_2) , \\ \overline{I(E_1) + I(E_2)} &= \overline{J(E_1) + J(E_2)} = J(E_1 \cap E_2) = I(E_1 \cap E_2) . \end{aligned}$$

Il suffit donc de trouver une fonction de $I(E_1 \cap E_2)$ n'appartenant pas à $I(E_1)+I(E_2)$. Soit $F \in I(E_1 \cap E_2)$ une fonction de niveau. Si $F=F_1+F_2$ avec $F_i \in I(E_i)$, $i=1,2$, la fonction F_i est nécessairement une fonction de niveau. Les fonctions F, F_1, F_2 coïncident dans un voisinage de $\{0\}$ avec des fonctions φ, φ_1, $\varphi_2 \in A(\mathsf{T})$ vérifiant

(i) $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ dans un voisinage de $\{0\}$.
(ii) $\varphi_1=0$ dans un voisinage à gauche de 0.
(iii) $\varphi_2=0$ dans un voisinage à droite de 0.

Dans [4, theorème 7] J. P. Kahane construit une fonction Ψ impaire, appartenant localement à $A(\mathsf{T})$ en $\{0\}$, telle que la fonction paire correspondante $\tilde{\Psi}$ n'appartienne pas à $A(\mathsf{T})$. La fonction $\frac{1}{2}(\Psi(z)+\tilde{\Psi}(z))$ coïncide avec Ψ dans un voisinage à droite de $\{0\}$, est nulle dans un voisinage à gauche de $\{0\}$ et n'appartient pas localement à $A(T)$ en $\{0\}$. A Ψ correspond localement une fonction de niveau. Donc $I(E_1)+I(E_2)$ est strictement inclus dans $I(E_1 \cap E_2)$.

THÉORÈME 2-B. *L'intérieur E_1 et l'extérieur E_2 de la sphère unité n'ont pas d'unité approchée bornée pour l'algèbre $A(\mathsf{R}^n)$.*

D'après [5, Ch. 7, 5], E_1 et E_2 sont de synthèse dans $A(\mathsf{R}^n)$.

Si $n>2$ la sphère $E_1 \cap E_2$ n'est pas de synthèse dans $A(\mathsf{R}^n)$.

Il suffit de trouver une fonction de $J(E_1 \cap E_2)$ n'appartenant pas à $J(E_1)+J(E_2)$. D'après [8] les fonctions radiales de $A(\mathsf{R}^n)$ sont $[\frac{1}{2}(n-1)]$ fois dérivables ($[\frac{1}{2}(n-1)]$ désigne la partie entière de $\frac{1}{2}(n-1)$). Elles sont synthésables sur la sphère si et seulement si elles sont nulles en $\{1\}$ ainsi que leurs $[\frac{1}{2}(n-1)]$ premières dérivées. Soit $F \in J(E_1 \cap E_2)$ une telle fonction et posons $F=F_1+F_2$ vérifiant les conditions (i) (ii) (iii) du théorème 2-A. Nécessairement F_1 et F_2 sont radiales, et dérivables $[\frac{1}{2}(n-1)]$ fois. Notons φ, φ_1, φ_2 les profils de F, F_1, F_2. Leurs dérivées d'ordre $[\frac{1}{2}(n-1)]$ vérifient encore les conditions (i) (ii) (iii), et d'après [2] appartiennent à $\mathscr{F}L^1_{\omega_n'}(\mathsf{R})$ où ω_n' est le poids $1+|y|^{\frac{1}{2}(n-1)-[\frac{1}{2}(n-1)]}$.

Si $n>2$ est impair, l'exemple est le même que pour le théorème 2-A.

Si $n>2$ est pair, il suffit de trouver $\varphi \in \mathscr{F}L^1_{(1+|y|^{\frac{1}{2}})}(\mathsf{R})$, φ_1 et φ_2 vérifiant (i) (ii) (iii) n'appartenant pas à $\mathscr{F}L^1_{(1+|y|^{\frac{1}{2}})}(\mathsf{R})$.

Si $n=2$ le cercle $E_1 \cap E_2$ est de synthèse dans $A(\mathsf{R}^2)$. Il suffit de trouver une fonction de $I(E_1 \cap E_2)$ n'appartenant pas à $I(E_1)+I(E_2)$. L'exemple sera le même que pour le cas n pair, $n>2$.

Construction de l'exemple.

LEMME 4. *Soient* $(\omega_m), (\omega_m')$, $m \in \mathsf{Z}$, *des suites de réels* >0, $A(\omega_m)$ *et*

$A(\omega_m')$ les algèbres à poids définies sur T, *comme dans* [4]. *$F \in A(\omega_m)$ entraîne $F \circ f \in A(\omega_m')$ si et seulement si f est réelle et si $|||e^{imf}|||_{A(\omega_m')} = O(\omega_m)$.*

C'est une généralisation d'un théorème de Leibenson (cf. [4, p. 249]). La condition nécessaire est une application du théorème du graphe fermé à l'opérateur $F \rightsquigarrow F \circ f$ défini sur $A(\omega_m)$.

Posons maintenant $f(z) = |z|$ sur $[-\pi, \pi]$. D'après [4, p. 251]

$$\|e^{im|z|}\|_A = 2/\pi \log|m| + O(1)\,.$$

D'autre part

$$|||e^{im|z|}|||_{A(|m|^{\frac{1}{2}})} = C|m|^{\frac{1}{2}} \log|m| + O(|m|^{\frac{1}{2}})\,.$$

D'après le lemme 4, $F(z) \in A(|m|^{\frac{1}{2}})$ entraîne donc $F(|z|) \in A$ mais il existe $F_0(z) \in A(|m|^{\frac{1}{2}})$ telle que $F_0(|z|)$ n'appartienne pas à $A(|m|^{\frac{1}{2}})$. Posons

$$\begin{aligned} F_0(z) &= \textstyle\sum_{m \geq 0} a_m \cos mz \; + \; i \sum_{m \geq 0} b_m \sin mz \\ F_0(|z|) &= \textstyle\sum_{m \geq 0} a_m \cos mz \; + \; i \sum_{m \geq 0} b_m \sin m|z|\,. \end{aligned}$$

La fonction $F^*(z) = \sum_{m \geq 0} b_m \sin mz$ appartient à $A(|m|^{\frac{1}{2}})$ mais $F^*(|z|)$ n'y appartient pas.

La fonction $\frac{1}{2}(F^*(z-1) + F^*(|z-1|))$ coïncide avec $F^*(z-1)$ à droite de 1, est nulle à gauche de 1, mais n'appartient pas à $A(|m|^{\frac{1}{2}})$. A $F^*(z-1)$ correspond bien une fonction radiale de $A(\mathsf{R}^2)$ d'après le lemme suivant [3, Ch. 3.1]:

LEMME 5. *$\mathscr{F}L^1_{1+|y|^{\frac{1}{2}}}(\mathsf{R})$ est localement isomorphe à $\mathscr{F}L^1_{|m|^{\frac{1}{2}}}(\mathsf{Z}) = A(|m|^{\frac{1}{2}})$.*

Ceci achève la démonstration du théorème 2-B.

TRAVAUX CITÉS

1. J. Detraz, *Algèbres uniformes de fonctions analytiques dans le disque*, Thése, Polycopié d'Orsay, 1970.
2. M. Gatesoupe, *Sur les éléments de $\mathscr{F}L^p(R^n)$ invariants par rotation*, C. R. Acad. Sci. Paris 267 (1968), 926–928.
3. M. Gatesoupe, *Sur les transformées de Fourier radiales*, Thèse, Polycopié d'Orsay, 1970.
4. J. P. Kahane, *Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes*, J. Math. Pures Appl. 35 (1956), 249–259.
5. W. Rudin, *Fourier analysis on groups* (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics 12), New York · London, 1962.
6. N. Th. Varopoulos, *Application des algèbres tensorielles à l'analyse harmonique*, Polycopié d'Orsay, 1967.
7. N. Th. Varopoulos, *Tensor algebras and harmonic analysis*, Acta Math. 119 (1967), 51–112.
8. N. Th. Varopoulos, *Spectral synthesis on spheres*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 62 (1966), 379–387.

FACULTÉ DES SCIENCES, MATHÉMATIQUE, 91-ORSAY, FRANCE