MATH. SCAND. 29 (1971), 104–112

ÜBER ORTHONORMALE POLYNOME UND EIN ASSOZIIERTES MOMENTENPROBLEM

P. WYNN

In vorliegender Arbeit betrachten wir die Auswirkung der Bestimmtheit eines assoziierten Momentenproblems auf das Verhalten der Polynome eines orthonormalen Systems; insbesondere leiten wir zwei Resultate über den Absolutbetrag von gewissen orthonormalen Polynomen mit nicht zum Orthogonalitätsintervall gehörigen Argumenten her.

SATZ 1. *Seien c_t, $t=0,1,\ldots$, die aufeinanderfolgenden Momente eines unbestimmten Hamburger'schen Momentenproblems*

$$c_t = \int_{-\infty}^{+\infty} u^t\,dw(u), \qquad t=0,1,\ldots\,, \tag{1}$$

und $p_r(z)$, $r=0,1,\ldots$, die aufeinanderfolgenden orthonormalen Polynome in Bezug auf die Belegung $w(u)$ über dem Intervall $[-\infty,\infty]$; dann gilt

$$\lim\nolimits_{r\to\infty} |p_r(z)| = 0 \tag{2}$$

gleichmäßig in jedem beschränkten offenen Bereich der z-Ebene, der keinen Punkt der reellen Achse einschließt.

Die Bedingungen des Satzes besagen, daß $w(u)$ für $-\infty \leqq u \leqq \infty$ eine beschränkte, nicht abnehmende Funktion ist, für die sämtliche Integrale (1) existieren und weiterhin, daß es noch weitere Funktionen von derselben Art gibt, die sich nicht bloß durch eine additive Konstante von $w(u)$ unterscheiden. Die Polynome $\{p_r(z)\}$ genügen den Bedingungen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_r(u)\,p_s(u)\,dw(u) = \delta_{r,s}, \qquad r=0,1,\ldots,\ s=0,1,\ldots\,, \tag{3}$$

und können durch deren Gebrauch vollständig bestimmt werden.

Eingegangen am 27. April 1971.

Der Beweis des Satzes stützt sich auf gewisse bekannte Ergebnisse aus der allgemeinen Theorie der orthogonalen Polynome und der Kettenbrüche, die wir jetzt zusammenstellen. (Für die allgemeine Behandlung der Theorie der orthogonalen Polynome, des Momentenproblems und der Kettenbrüche seien dem Leser die im Literaturverzeichnis unter [6], [5] bzw. [4] zitierten Bücher empfohlen.)

Die Polynome $\{\tilde{p}_r(z)\}$ wo

$$\tilde{p}_r(z) = \sum_{s=0}^{r} k_{r,s} z^s, \quad r=0,1,\ldots, \tag{4}$$

sind jeweils vom Grad r, werden bestimmt durch die Bedingungen

$$\int_a^b \tilde{p}_r(u)\tilde{p}_s(u)\,dh(u) \begin{matrix} = 0, & s \neq r, \\ \neq 0, & s = r, \end{matrix} \quad r=0,1,\ldots;\ s=0,1,\ldots, \tag{5}$$

$$k_{r,r} = 1, \tag{6}$$

und heißen orthogonal in Bezug auf die Belegung $h(u)$ über $[a,b]$ ($[a,b]$ ist ein nicht verschwindendes Intervall der reellen Achse; möglicherweise ist es mit $[-\infty,\infty]$ identisch). Die orthonormalen Polynome $\{p_r(z)\}$, die den Gleichungen

$$\int_a^b p_r(u)p_s(u)\,dh(u) = \delta_{r,s}, \quad r=0,1,\ldots,\ s=0,1,\ldots, \tag{7}$$

genügen, unterscheiden sich von den orthogonalen Polynomen $\{\tilde{p}_r(z)\}$ lediglich durch multiplikative orthonormierende konstante Faktoren: wenn wir die Schreibweise

$$H_0 = 1, \quad H_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{k-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_k \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{k-1} & c_k & \ldots & c_{2k-2} \end{vmatrix}, \quad k=1,2,\ldots, \tag{8}$$

für Hankeldeterminanten verwenden, so gilt

$$p_r(z) = \{H_r/H_{r+1}\}^{\frac{1}{2}}\tilde{p}_r(z), \quad r=0,1,\ldots, \tag{8}$$

Die Polynome $\{\tilde{p}_r(z)\}$ genügen einer dreigliedrigen Rekursionsformel

$$\tilde{p}_{r+1}(z) = (z-\alpha_r)\tilde{p}_r(z) - \beta_{r-1}\,\tilde{p}_{r-1}(z), \quad r=1,2,\ldots, \tag{10}$$

wobei insbesondere

$$\beta_{r-1} = H_{r+1}H_{r-1}/H_r^{\,2}, \quad r=1,2,\ldots. \tag{11}$$

Wir bemerken für die spätere Anwendung, daß aus den Formeln (9) und (11) sehr leicht die Beziehung

$$\frac{\tilde{p}_r(z)^2}{c_0\beta_0\ldots\beta_{r-1}} = p_r(z)^2, \quad r=1,2,\ldots, \tag{12}$$

hergeleitet werden kann.

Die Hauptstütze unseres Beweises ist ein Resultat von Hamburger [1] und Nevanlinna [3]: sei $\{\tilde{p}_r(z)\}$ das System von orthogonalen Polynomen in Bezug auf die Belegung $w(u)$ über dem Intervall $[-\infty,\infty]$, und nehmen wir weiter an, daß sie der Rekursionsformel (10) genügen: dann ist das Momentenproblem (1) bestimmt (unbestimmt), wenn die Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|\tilde{p}_r(z)|^2}{c_0\beta_0\ldots\beta_{r-1}}$$

(von denen alle Glieder positive reelle Zahlen sind) in jedem beschränkten offenen Bereich der z-Ebene, der keinen zur reellen Achse gehörenden Punkt einschließt, gleichmäßig divergiert (konvergiert).

Aus diesem Ergebnis und Formel (12) folgt, wenn das Momentenproblem (1) unbestimmt ist, daß dann die Reihe $\sum_{r=1}^{\infty}|p_r(z)|^2$ konvergiert: aus diesem Resultat folgt Formel (2) und unser Satz 1 sofort.

Folgerung. *Seien c_t, $t=0,1,\ldots$, die aufeinanderfolgenden Momente eines unbestimmten Stieltjes'schen Momentenproblems*

$$c_t = \int_0^{\infty} u^t\,dw(u), \quad t=0,1,\ldots, \tag{13}$$

und $\{p_r(z)\}$ die aufeinanderfolgenden orthonormalen Polynome in Bezug auf die Belegung $w(u)$ über dem Intervall $(0,\infty)$, dann gilt

$$\lim_{r\to\infty}|p_r(z)| = 0 \tag{14}$$

gleichmäßig in jedem beschränkten offenen Bereich der z-Ebene, der keinen Punkt der positiven reellen Achse inklusive Null einschließt.

Obwohl das Stieltjes'sche Momentproblem unabhängig als solches untersucht werden kann, erreicht man eine viel einheitlichere Darstellung des gesamten Momentenproblems dadurch, daß man das Stieltjes'sche Momentenproblem als Sonderfall des Hamburger'schen Momentenproblems betrachtet. Für den Beweis der obigen Folgerung sei lediglich erwähnt, daß eine sehr einfache Beziehung zwischen einer Lösung $w(u)$

des Stieltjes'schen Momentenproblems (13) und einer Lösung $w'(u)$ des Hamburger'schen Momentenproblems

$$\begin{aligned} c_t &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2t}\, dw'(u), \\ 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} u^{2t+1}\, dw'(u), \end{aligned} \qquad t = 0, 1, \ldots, \tag{15}$$

besteht: wir haben schlicht

$$w(u) = 2w'(u^{\frac{1}{2}}), \quad 0 \leqq u \leqq \infty. \tag{16}$$

Weiterhin, wenn $\{\tilde{p}_r(z)\}$ das Orthogonalpolynomensystem in Bezug auf die Belegung $w(u)$ über dem Intervall $[0, \infty]$ ist, und $\{p_r'(z)\}$ dasjenige in Bezug auf die Belegung $w'(u)$ über dem Intervall $[-\infty, \infty]$, dann gilt

$$\tilde{p}_r(z^2) = \tilde{p}'_{2r}(z), \quad r = 0, 1, \ldots. \tag{17}$$

Unsere Folgerung ergibt sich heraus sofort.

Satz 2. *Sei $w(u)$ eine beschränkte nicht abnehmende Funktion in $-\infty < a \leqq u \leqq b < \infty$, und $\{p_r(z)\}$ das orthonormale Polynomensystem in Bezug auf die Belegung $w(u)$ über dem Intervall $[a, b]$, dann gilt*

$$\lim_{r \to \infty} |p_r(z)| = \infty \tag{18}$$

gleichmäßig in jedem offenen Bereich der z-Ebene, der keinen zu dem Intervall $[a, b]$ der reellen Achse gehörenden Punkt einschließt.

Neben den Resultaten, die für den Beweis des Satzes 1 schon bereitgestellt worden sind, brauchen wir noch weitere Ergebnisse aus der Lehre der orthogonalen Polynome und der Kettenbrüche.

Wir benötigen folgenden Satz von Markoff ([2], [3, Kap. IV § 34]): $\{\tilde{p}_r(z)\}$ sei das System der Orthogonalpolynome in Bezug auf die beschränkte nicht abnehmende Belegung $h(u)$ über dem Intervall $[a, b]$, wo $-\infty < a < b < \infty$; sie genügen Gleichung (10); dann konvergiert der Kettenbruch

$$\frac{c_0}{z - \alpha_0 -}\, \frac{\beta_0}{z - \alpha_1 -} \cdots \frac{\beta_{r-2}}{z - \alpha_{r-1} -} \cdots \tag{19}$$

gleichmäßig in jedem offenen Bereich der z-Ebene, der keinen zu dem Intervall (a, b) der reellen Achse gehörenden Punkt einschließt.

Man kann die aufeinanderfolgenden Näherungsbrüche des Kettenbruches (19) mit Hilfe der Polynome des Systems $\{\tilde{p}_r(z)\}$ ausdrücken. Aus den Euler–Minding'schen Formeln für den Kettenbruch (19) folgt

$$\frac{c_0}{z-\alpha_0-}\,\frac{\beta_0}{z-\alpha_1-}\cdots\frac{\beta_{r-2}}{z-\alpha_{r-1}} = \sum_{s=1}^{r}\frac{c_0\beta_0\cdots\beta_{s-2}}{\tilde{p}_{s-1}(z)\,\tilde{p}_s(z)} \tag{20}$$

$$(\beta_{-1}\equiv c_0),\quad r=1,2,\ldots .$$

Das letzte Resultat, das wir zu benützen wünschen, betrifft schließlich die Verteilung der Nullstellen der Polynome $\{\tilde{p}_r(z)\}$ die in Bezug auf die beschränkte nicht abnehmende Belegung $h(u)$ über dem endlichen Intervall $[a,b]$ orthogonal sind. Es ist bekannt, daß die Nullstellen $z_{r,s}$, $s=1,2,\ldots,r$ des Polynoms $\tilde{p}_r(z)$ zum Intervall (a,b) der reellen Achse gehören, und daß sie darüber hinaus die Glieder der Menge $z_{r+1,s}$, $s=1,2,\ldots,r+1$ voneinander trennen; d.h. bei passender Numerierung gilt

$$a < z_{r+1,1} < z_{r,1} < z_{r+1,2} < \ldots < z_{r+1,r} < z_{r,r} < z_{r+1,r+1} < b . \tag{21}$$

Aus der Art, in der die Polynome $\{\tilde{p}_r(z)\}$ normalisiert sind (siehe Gleichung (6)), folgt

$$\tilde{p}_r(z) = \prod_{s=1}^{r}(z-z_{r,s}) . \tag{22}$$

Bezeichne $\varkappa$ das Minimum über alle Entfernungen zwischen z einerseits und den Punkten des Intervalls $[a,b]$ andererseits und bezeichne ξ das entsprechende Maximum; dann ist es leicht mit Hilfe der Bedingungen (21) und Gleichung (22) zu beweisen, daß

$$|\tilde{p}_r(z)/\tilde{p}_{r+1}(z)| > \varkappa/\xi^2,\quad r=0,1,\ldots , \tag{23}$$

gilt.

Wir sind jetzt in der Lage, Satz 2 zu beweisen. Unter Berücksichtigung der Bedingungen dieses Satzes wissen wir, daß die Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ mit

$$u_r = \frac{c_0\beta_0\cdots\beta_{r-2}}{\tilde{p}_{r-1}(z)\,\tilde{p}_r(z)},\qquad r=1,2,\ldots , \tag{24}$$

in jedem offenen Bereich der z-Ebene, der keinen zum Intervall $[a,b]$ der reellen Achse gehörenden Punkt einschließt, gleichmäßig konvergiert. Aus Ungleichung (23) folgt aber, daß

$$\left|\frac{\tilde{p}_r(z)}{c_0\beta_0\cdots\beta_{r-1}}\right|^2 > (\varkappa/\xi^2)\,|u_{r+1}|^{-1},\quad r=1,2,\ldots , \tag{25}$$

d.h. unter Benutzung der Gleichungen (9) und (11)

$$|p_r(z)|^2 > \varkappa/\xi^2 |u_r|^{-1}, \quad r=1,2,\ldots. \tag{26}$$

Da $\lim_{r\to\infty}|u_r|^{-1}=\infty$, folgt Beziehung (18) sofort.

In einem sehr beschränkten Sinne darf man Satz 2 als Erweiterung des folgenden Resultates von Szegö ([7], [6, Kap. XII § 12.1]) betrachten: die orthonormalen Polynome $\{p_r(z)\}$ werden mit Hilfe der Bedingungen

$$\int_{-1}^{+1} p_r(u)p_s(u)g(u)\,du = \delta_{r,s}, \quad r=0,1,\ldots, \; s=0,1,\ldots \tag{27}$$

konstruiert; es wird weiter angenommen, daß mit

$$f(\theta) = g(\cos\theta)\,|\sin\theta| \tag{28}$$

nicht nur $f(\theta)$ definiert und messbar ist in $[-\pi,\pi]$, sondern außerdem sowohl das Integral $\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)d\theta$ existiert und positiv ist, als auch das Integral $\int_{-\pi}^{+\pi} |\ln f(\theta)|d\theta$ existiert; dann gibt es eine Funktion $E(z)$ von der Art, daß

$$p_r(z) \sim E(z)\sigma^r; \tag{29}$$

$E(z)$ ist analytisch, verschwindet nirgends, Formel (29) gilt gleichmäßig für alle beschränkten Werte von z, die nicht zum Intervall $[-1,1]$ der reellen Achse gehören; dabei sei

$$\sigma = z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}} \tag{30}$$

wo der Zweig der Quadratwurzel so gewählt wird, daß $|\sigma|>1$ für alle in Betracht kommenden Werte von z.

Offensichtlich gibt es Fälle, die Satz 2 unterworfen sind, aber von diesem Resultat nicht betroffen werden. In der Schreibweise der Gleichungen (3) und (27) gilt

$$dw(u) = g(u); \tag{31}$$

an denjenigen Punkten, wo $w(u)$ konstant ist, ist $g(u)$ Null, und es kann vorkommen, daß es ein Kontinuum solcher Punkte in $[-1,1]$ gibt; in solch einem Falle hört das Integral $\int_{-\pi}^{+\pi}|\ln f(\theta)|d\theta$ auf zu existieren. Jedoch, wenn es anwendbar ist, gibt Formel (29) viel genauere Auskunft über das Wachstum von $|p_r(z)|$, als Formel (18).

Sei $w(u)$ eine beschränkte nicht abnehmende Funktion in $-\infty<a\leqq u\leqq b<\infty$, dann ist es sehr leicht zu beweisen, daß die Momente

$$c_t = \int_a^b u^t\,dw(u), \quad t=0,1,\ldots, \tag{32}$$

mit einem bestimmten Hamburger'schen Momentenproblem verknüpft sind; d.h. wenn eine beschränkte nicht abnehmende Funktion $w(u)$ in $-\infty < a \leqq u \leqq b < \infty$ existiert von der Art, daß die Gleichungen (32) gelten, dann gibt es genau eine Lösung des Hamburger'schen Momentenproblems

$$c_t = \int_{-\infty}^{+\infty} u^t \, dw'(u), \qquad t = 0, 1, \ldots \tag{33}$$

nämlich

$$\begin{aligned} w'(u) &= w(a) \quad \text{für } u < a\,, \\ &= w(u) \quad \text{für } a \leqq u \leqq b\,, \\ &= w(b) \quad \text{für } u > b\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Die Vermutung liegt sehr nahe, daß es ein Komplement zu Satz 1 gibt, nämlich daß, wenn in der Schreibweise von Gleichung (1) $\{c_t\}$ die Momente eines bestimmten Hamburger'schen Momentenproblems sind, dann gilt

$$\lim_{r\to\infty} |p_r(z)| = \infty\,, \tag{35}$$

und zwar gleichmäßig in jedem offenen Bereich der z-Ebene, der keinen Punkt der reellen Achse einschließt.

Sicherlich gibt es weitere Resultate, die Anlaß zu einer solchen Vermutung geben. Die orthonormierten Hermite'schen Polynome $\{H_r(z)\}$, die in der Schreibweise der Gleichung (7) orthogonal in Bezug auf die Belegung

$$h(u) = \int_{-\infty}^{u} e^{-u^2} \, du \tag{36}$$

über dem Intervall $[-\infty, \infty]$ sind (es läßt sich sehr leicht beweisen, daß das damit verknüpfte Momentenproblem bestimmt ist), genügen für große r der folgende Beziehung (siehe z. B. [6, Kap. VIII, § 8,22])

$$\begin{aligned} H_r(z) = {} & \frac{\pi^{-\frac{1}{4}} \exp(\frac{1}{2}z^2)\{\Gamma(r+1)\}^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}r}\,\Gamma(\frac{1}{2}r+1)} [\cos\{(2r+1)^{\frac{1}{2}}z - \tfrac{1}{2}r\pi\} + \\ & + \tfrac{1}{6}z^3(2r+1)^{-\frac{1}{2}} \sin\{(2r+1)^{\frac{1}{2}}z - \tfrac{1}{2}r\pi\} + \exp\{(2r+1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im}(z)\} O(r^{-1})] \end{aligned} \tag{37}$$

gleichmäßig in jedem beschränkten offenen Bereich der z-Ebene. Wenn z nicht reell ist, dann folgt, daß derartige von r unabhängige positive reelle Konstanten $k(z)$, $l(z)$ existieren, daß

$$|H_r(z)| \sim k(z) r^{-\frac{1}{4}} e^{l(z) r^{\frac{1}{2}}}\,, \tag{38}$$

und zwar gleichmäßig in jedem beschränkten offenen Bereich der z-Ebene, der keinen zur reellen Achse gehörenden Punkt einschließt.

Die orthonormierten Laguerre'schen Polynome $\{L_r^{(\alpha)}(z)\}$, die in Bezug auf die Belegung

$$h(u) = \int_0^u u^\alpha e^{-u}\, du \tag{39}$$

über dem Intervall $[0, \infty]$ orthogonal sind, genügen der Beziehung (siehe, z. B. wieder [6, Kap. VIII, § 8.22])

$$\begin{aligned} L_r^{(\alpha)}(z) & \\ &= \tfrac{1}{2}\{\pi\Gamma(\alpha+1)\tbinom{r+\alpha}{r} r^{-\alpha+\frac{1}{2}}\}^{-\frac{1}{2}}(-z)^{-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}}[\exp\{\tfrac{1}{2}z+2(-rz)^{\frac{1}{2}}\}]\{1+O(r^{-\frac{1}{2}})\} \end{aligned} \tag{40}$$

(wo $(-z)^{-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}}$ und $(-z)^{\frac{1}{2}}$ reell und positiv sind, wenn z reell und negativ ist) gleichmäßig in jedem beschränkten offenen Bereich der z-Ebene. Als Hinweis darauf, daß wieder ein Komplement zur Folgerung von Satz 1 besteht, haben wir

$$|L_r^{(\alpha)}(z)| \sim k'(z) r^{-\frac{1}{4}} e^{l'(z) r^{\frac{1}{2}}} \tag*{41)}$$

(wo $k'(z)$, $l'(z)$ wieder von r unabhängige positive reelle Konstanten sind) gleichmäßig in jedem offenen Bereich der z-Ebene, der keinen zur reellen Achse gehörenden Punkt einschließt.

Alles was wir bisher tatsächlich bewiesen haben, ist lediglich, daß die Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} |p_r(z)|^2$ gleichmäßig in jedem beschränkten offenen Bereich der z-Ebene, der keinen zur reellen Achse gehörenden Punkt einschließt, divergiert, wenn das Momentenproblem (1) bestimmt ist; wir lassen die oben aufgeworfene Frage nach einem komplementären Satz völlig offen.

Vorliegende Arbeit war die Frucht eines kurzen Aufenthaltes in Zürich. Der Verfasser möchte die Gelegenheit nicht versäumen, Herrn Prof. Dr. E. Stiefel, Direktor des Institutes für angewandte Mathematik der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich, für die freundliche Einladung, die die Entstehung dieser Arbeit ermöglicht hat, ergebenst zu danken.

LITERATURVERZEICHNIS

1. H. Hamburger, *Über eine Erweiterung des Stieltjes'schen Momentenproblems* I, Math. Ann. 81 (1921), 235–318.
2. A. Markoff, *Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues*, Acta Math. 19 (1895), 93–104.
3. R. Nevanlinna, *Asymptotische Entwicklung beschränkter Funktionen und das Stieltjes'sche Momentenproblem*, Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A, 18:5 (1922).

4. O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen* II, Teubner, Stuttgart, 1957.
5. J. Shohat, and J. D. Tamarkin, *The Problem of Moments*, (Amer. Math. Soc. Mathematical Surveys 1), Amer. Math. Soc., New York, 1943.
6. G. Szegö, *Orthogonal Polynomials* (Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 23), Amer. Math. Soc., New York, 1939.
7. G. Szegö, *Über den Asymptotischen Ausdruck von Polynomen die durch eine Orthogonalitätseigenschaft definiert sind*, Math. Ann. 86 (1922), 114–139.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, LOUISIANA STATE UNIVERSITY IN NEW ORLEANS, U.S.A.