MATH. SCAND. 30 (1972), 65–74

SOUS-DIFFÉRENTIABILITÉ DE FONCTIONS CONVEXES À VALEURS DANS UN ESPACE VECTORIEL ORDONNÉ

MICHEL VALADIER

Introduction.

On se propose d'étendre deux théorèmes de Moreau [8], sur la sous-différentiabilité d'une fonction numérique convexe continue en un point. L'étude de la sous-différentiabilité des fonctions convexes à valeurs dans un espace vectoriel ordonné n'a, à ma connaissance, été abordée que par Raffin [10]. Le principal résultat obtenu est, lorsque la fonction est continue, l'existence d'un sous-gradient et la compacité du sous-différentiel, mais cela pour l'espace R^I et quelques autres cas qui s'y ramènent. Nous obtenons ici des résultats qui s'appliquent notamment aux espaces L^p.

1.

Soit E un espace vectoriel réel, C une partie convexe de E et x_0 un point de C. Soit F un espace vectoriel ordonné. On note $\leqq$ l'ordre, et F_+ l'ensemble des éléments $\geqq 0$. On sait que $x \geqq y$ équivaut à $x-y \in F_+$, et que F_+ est un cône convexe pointé saillant (c'est à dire, $F_+ \cap (-F_+) = \{0\}$).

Définitions. On dit qu'une fonction $f \colon C \to F$ est *convexe* si quels que soient $\alpha \in [0,1]$, x et y appartenant à C, on a

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) .$$

On dit que $p \colon E \to F$ est *positivement homogène* si quels que soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathsf{R}_+$, on a $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. On dit que p est *sous-additive* si, quels que soient x et y, on a $p(x+y) \leqq p(x) + p(y)$. On dit que p est *sous-linéaire* si elle est positivement homogène et sous-additive; elle est alors convexe.

Reçu le 1 juillet, 1970.

2.

Définition. On appelle *sous-gradient* de f en x_0, toute application linéaire $T: E \to F$ (continue si E et F sont topologiques) telle que pour tout $x \in C$, $T(x - x_0) \leqq f(x) - f(x_0)$. L'ensemble des sous-gradients est appelé *sous-différentiel* et noté $\partial f(x_0)$.

Si E et F sont topologiques, mais si on veut l'oublier (c'est a dire, considérer les espaces vectoriels sous-jacents), on précisera sous-gradient (ou sous-différentiel) algèbrique. Cela se produira dans le théorème 6.

Le résultat suivant est classique pour les fonctions numériques et se démontre pareillement.

Proposition. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, $\varphi: I \to F$ une fonction convexe et $\lambda_0 \in I$. Alors, sur $I \setminus \{\lambda_0\}$, la fonction*

$$\lambda \mapsto (\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0))/(\lambda - \lambda_0)$$

est croissante.

3.

La définition suivante est justifiée immédiatement après.

Définition. Si dans F toute suite décroissante minorée a une borne inférieure, et si $C - x_0$ est absorbant dans E, on appelle *dérivée directionnelle de f dans la direction h* (pour tout $h \in E$), et on note $f'(x_0, h)$, l'élément de F égal à

$$\inf \{(f(x_0 + \lambda h) - f(x_0))/\lambda \mid \lambda > 0,\, x_0 + \lambda h \in C\}.$$

Justification. Pour définir $f'(x_0,h)$ il suffit de prendre la borne inférieure de

$$\{(f(x_0 + \lambda_n h) - f(x_0))/\lambda_n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

où (λ_n) est une suite décroissante tendant vers 0, telle que $\lambda_n > 0$ et $x_0 + \lambda_0 h \in C$. En effet on obtient, d'après la prop. 2, une suite décroissante et minorée dans F (par exemple par $(f(x_0) - f(x_0 - \mu h))/\mu$ pour $\mu > 0$ suffisamment petit pour que $x_0 - \mu h \in C$).

Remarque. Il n'est pas sûr que $(f(x_0 + \lambda_n h) - f(x_0))/\lambda_n$ converge vers $f'(x_0, h)$. Cf. le lemme 8 ci-dessous.

Proposition. *Sous les hypothèses de la définition précédente, la fonction $h \mapsto f'(x_0, h)$ est sous-linéaire.*

DÉMONSTRATION. Elle est évidemment positivement homogène. Montrons la sous-additivité. Soit (λ_n) une suite décroissante de nombres >0 tendant vers 0, et telle que λ_0 soit assez petit pour que $x_0+2\lambda_0 h_1$ et $x_0+2\lambda_0 h_2$ appartiennent à C (comme C est convexe cela entraîne $x_0+\lambda_0(h_1+h_2)\in C$). On a, par convexité

$$\frac{f(x_0+\lambda_n(h_1+h_2))-f(x_0)}{\lambda_n} \leqq \frac{f(x_0+2\lambda_n h_1)-f(x_0)}{2\lambda_n}+\frac{f(x_0+2\lambda_n h_2)-f(x_0)}{2\lambda_n}.$$

Désignons par a_n et b_n les deux derniers termes. Les suites (a_n) et (b_n) sont décroissantes et minorées. On a $\inf_n(a_n+b_n)=\inf_{n,m}(a_n+b_m)$, car, si l'on note $\sup(n,m)=p$ et $\inf(n,m)=q$, on a

$$a_p+b_p \leqq a_n+b_m \leqq a_q+b_q\,.$$

D'après Bourbaki [3, ch. VI, § 1, n° 8, prop. 6, p. 12] on a

$$\inf_{n,m}(a_n+b_m) = \inf a_n+\inf b_n\,.$$

Par suite

$$f'(x_0,h_1+h_2) \leqq \inf(a_n+b_n) = \inf a_n+\inf b_n = f'(x_0,h_1)+f'(x_0,h_2)\,.$$

4.

PROPOSITION. *Sous les hypothèses de la définition* 3, *pour qu'une application linéaire* $T: E\to F$ *soit un sous-gradient de* f *en* x_0, *il faut et il suffit que, pour tout* $h\in E$, $T(h)\leqq f'(x_0,h)$.

DÉMONSTRATION. 1) Supposons $T(h)\leqq f'(x_0,h)$ pour tout h. Soit $x\in C$. Alors $T(x-x_0)\leqq f'(x_0,x-x_0)\leqq f(x)-f(x_0)$. La dernière inégalité résulte de la définition de $f'(x_0,\cdot)$.

2) Soit T un sous-gradient. Soit $h\in E$. Pour tout $\lambda>0$ assez petit pour que $x_0+\lambda h\in C$, on a $T(\lambda h)\leqq f(x_0+\lambda h)-f(x_0)$, d'où $T(h)\leqq (f(x_0+\lambda h)-f(x_0))/\lambda$ et $T(h)\leqq f'(x_0,h)$.

5.

Rappelons une définition (cf. Peressini [9, déf. II-1-2, p. 61]).

DÉFINITION. Un espace vectoriel topologique ordonné est dit *normal* s'il existe un système fondamental de voisinages de $0, \mathscr{V}$, tel que $V\in\mathscr{V}$, $x\in V$ et $y\in V$ entraînent $[x,y]\subset V$ (où on note $[x,y]$ l'intervalle au sens de l'ordre d'extrémités x et y: $\{z \mid x\leqq z\leqq y\}$).

Par exemple dans les espaces L^p, les boules centrées en 0 ont cette propriété.

Rappelons aussi qu'on appelle *treillis vectoriel complet* (ou selon Bourbaki [6, ch. 2, § 1, nº 3], espace de Riesz complètement réticulé) un espace vectoriel ordonné filtrant où toute partie non vide majorée a une borne supérieure.

Rappelons, pour la commodité du lecteur, le théorème suivant. (Cf. Peressini [9, prop. II-2-1, p. 78]. On peut reprendre la démonstration du lemme de Meyer [7, p. 271].)

THÉORÈME. *Si F est un treillis vectoriel complet, E_0 un sous-espace de E, $p: E \to F$ une fonction sous-linéaire, T_0 une application linéaire de E_0 dans F majorée par p, alors il existe un prolongement de T_0 à E, T, qui est linéaire et majoré par p.*

6.

THÉORÈME. *Si E est un espace vectoriel topologique et F un espace vectoriel topologique ordonné normal qui soit un treillis vectoriel complet, si $x_0 \in \mathring{C}$ et si f est continue en x_0, alors le sous-différentiel algébrique est identique au sous-différentiel topologique $\partial f(x_0)$, et c'est une partie convexe non vide équicontinue de $\mathscr{L}(E,F)$. De plus on a la formule*

$$f'(x_0,h) = \max\{T(h) \mid T \in \partial f(x_0)\} .$$

DÉMONSTRATION. Il est évident que $\partial f(x_0)$ est convexe. Soit $\mathscr{V}$ un système fondamental de voisinages de 0 dans F ayant la propriété de la définition 5, et $V \in \mathscr{V}$. Soit U un voisinage symétrique de 0 dans E tel que $x_0 + U \subset C$ et que

$$x - x_0 \in U \Rightarrow f(x) - f(x_0) \in V \cap -V .$$

Alors si T est un sous-gradient algébrique, et si $h \in U$, on a $T(h) \leqq f(x_0+h) - f(x_0)$, et $T(-h) \leqq f(x_0-h) - f(x_0)$, d'où $T(h) \geqq f(x_0) - f(x_0-h)$. Il en résulte

$$T(h) \in [f(x_0) - f(x_0-h), f(x_0+h) - f(x_0)] , \tag{1}$$

d'où $T(h) \in V$. Cela prouve que les sous-gradients algébriques sont continus et forment une partie équicontinue. Établissons la formule. D'après la proposition 4 il reste à montrer que pour h fixé il existe $T \in \partial f(x_0)$ tel que $T(h) = f'(x_0,h)$. Or soit T_0 l'application linéaire de $\mathsf{R}h$ dans F définie par $T_0(\lambda h) = \lambda f'(x_0,h)$, pour tout $\lambda \in \mathsf{R}$. On a $T_0(\lambda h) \leqq f'(x_0,\lambda h)$, quel que soit le signe de λ, car $f'(x_0, -h) \geqq -f'(x_0,h)$. D'après le théorème 5, T_0 se prolonge à E en gardant la majoration par $f'(x_0, \cdot)$, ce qui, grâce encore à la proposition 4, donne un sous-gradient ayant la propriété désirée.

REMARQUE. Les hypothèses topologiques ne sont pas nécessaires pour montrer l'existence d'un sous-gradient algébrique; il suffit que $C-x_0$ soit absorbant et que F soit un treillis vectoriel complet.

7.

Rappelons une définition de Raffin [10, 2ème partie, p. 8]:

DÉFINITION. Lorsque E et F sont des espaces vectoriels topologiques, on dit que f est *sous-différentiable régulière* en x_0, si pour tout $y' \in F_+'$ (le cône positif du dual de F), on a

$$y' \circ \partial f(x_0) = \partial (y' \circ f)(x_0) .$$

REMARQUE. L'intérêt de cette notion réside dans le résultat suivant. Raffin [10, 2ème partie, p. 20] a montré que, si $f: E \to \mathsf{R}$ et $g: E \to F$ sont convexes continues, si $\tilde{x}$ réalise la borne inférieure de $\{f(x) \mid g(x) \leqq 0\}$, si g est sous-différentiable régulière en $\tilde{x}$, et sous une hypothèse dite de régularité, il existe: $x' \in \partial f(\tilde{x})$, $T \in \partial g(\tilde{x})$ et $z' \in F_-'$ tels que $x' = z' \circ T$ et $\langle z', g(\tilde{x})\rangle = 0$. Les contraintes vectorielles avaient déja été considérées dans Arrow, Hurwicz, Uzawa [1], mais, pour obtenir des résultats, il fallait en général supposer l'intérieur de F_+ non vide (ce qui n'est pas vérifié pour les espaces L^p).

COROLLAIRE. *Sous les hypothèses du théorème* 6:

1) *Si F est localement convexe séparé, si les intervalles $[x,y]$ sont faiblement relativement compacts, $\partial f(x_0)$ est relativement compact dans $\mathscr{L}_s(E,F_\sigma)$.*

2) *Si de plus F_+ est fermé, $\partial f(x_0)$ est compact dans $\mathscr{L}_s(E,F_\sigma)$, et si F est faiblement séquentiellement complet, f est sous-différentiable régulière en x_0.*

Ici F_σ désigne l'espace vectoriel F muni de la topologie $\sigma(F,F')$, et $\mathscr{L}_s(E,F_\sigma)$ désigne l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F_σ muni de la topologie de convergence simple.

DÉMONSTRATION. 1) On remarque que $\partial f(x_0)$ reste équicontinue dans $\mathscr{L}(E,F_\sigma)$. D'après la formule (1) de la démonstration du théorème 6, pour tout $h \in U$, $\{T(h) \mid T \in \partial f(x_0)\}$ est contenu dans un intervalle. Comme U est absorbant, cela est vrai pour tout $h \in E$. La conclusion résulte du corollaire de la proposition 4, chapitre 3, § 3, nº 5 de Bourbaki [5] (c'est une conséquence facile du théorème d'Ascoli).

2) Si F_+ est fermé, d'après la prop. 4,

$$\begin{aligned}\partial f(x_0) &= \bigcap_{h\in E}\{T\in\mathscr{L}(E,F)\mid T(h)\leqq f'(x_0,h)\}\\ &= \bigcap_{h\in E}\{T\in\mathscr{L}(E,F)\mid T(h)\in f'(x_0,h)-F_+\}\,,\end{aligned}$$

donc $\partial f(x_0)$ est fermé dans $\mathscr{L}_s(E,F)$, donc compact. Montrons que f est sous-différentiable régulière en x_0. Soit $y'\in F_+'$. Comme l'application $T\mapsto y'\circ T$ est continue de $\mathscr{L}_s(E,F_\sigma)$ dans E_s' (c'est à dire, E' muni de $\sigma(E',E)$), $y'\circ\partial f(x_0)$ est compact. Il est aussi convexe et trivialement contenu dans $\partial(y'\circ f)(x_0)$. Soit $h\in E$. On sait que le maximum de $\langle\cdot,h\rangle$ sur $\partial(y'\circ f)(x_0)$ est $(y'\circ f)'(x_0,h)$. On va montrer qu'il existe $T\in\partial f(x_0)$ tel que $\langle y'\circ T,h\rangle=(y'\circ f)'(x_0,h)$. D'après Hahn–Banach cela établira l'égalité $y'\circ\partial f(x_0)=\partial(y'\circ f)(x_0)$. Il existe, d'après le théorème 6, $T\in\partial f(x_0)$ tel que $T(h)=f'(x_0,h)$. On a

$$\begin{aligned}\langle y'\circ T,h\rangle &= \langle y',T(h)\rangle = \langle y',f'(x_0,h)\rangle\\ &= \langle y',\inf(f(x_0+\lambda_n h)-f(x_0))/\lambda_n\rangle\,,\end{aligned}$$

où (λ_n) est une suite décroissante tendant vers 0 de nombres >0, telle que $x_0+\lambda_0 h\in C$. D'après le lemme 8 ci-dessous la suite

$$(f(x_0+\lambda_n h)-f(x_0))/\lambda_n$$

converge dans F_σ vers sa borne inférieure. Donc, comme y' est continue et positive:

$$\langle y'\circ T,h\rangle = \inf\langle y',(f(x_0+\lambda_n h)-f(x_0))/\lambda_n\rangle = (y'\circ f)'(x_0,h)\,.$$

Remarque. Si F est semi-réflexif, et normal, les intervalles sont bornés donc faiblement relativement compacts. Si F est un espace L^1, les intervalles sont des parties équi-intégrables, donc faiblement relativement compactes.

8.

Lemme. *Si F est un espace localement convexe séparé ordonné normal, faiblement séquentiellement complet, si F_+ est fermé, et si (a_n) est une suite décroissante minorée dans F, elle admet une borne inférieure b, et a_n converge faiblement vers b.*

Démonstration. 1) Montrons d'abord que $F'=F_+'-F_+'$. Soit $z'\in F'$. Soit V appartenant à $\mathscr{V}$ (cf. définition 5) un voisinage de 0 tel que $z'\in V^0$. On a $V=(V+F_+)\cap(V-F_+)$ d'où

$$V^0 = \overline{\mathrm{co}}((V+F_+)^0\cup(V-F_+)^0)$$

($\overline{\mathrm{co}}$ désigne l'enveloppe convexe fermée). Comme $(V+F_+)^0$ et $(V-F_+)^0$ sont convexes faiblement compacts, car contenus dans V^0, on a

$$V^0 = \operatorname{co}\big((V+F_+)^0 \cup (V-F_+)^0\big) .$$

Il existe donc $\lambda \in [0,1]$, $z_1' \in (V+F_+)^0$ et $z_2' \in (V-F_+)^0$ tels que $z' = \lambda z_1' + (1-\lambda) z_2'$. Il reste à remarquer que $(V+F_+)^0 \subset F_+'$ et $(V-F_+)^0 \subset F_-'$ (avec la définition du polaire de Bourbaki [4, p. 92]).

2) D'après le 1) tout $z' \in F'$ est de la forme $z' = z_1' - z_2'$. avec $z_i' \in F_+'$. Les deux suites $(\langle z_i', a_n\rangle)_{n\in\mathsf{N}}$ sont décroissantes et minorées, donc $(\langle z', a_n\rangle)_{n\in\mathsf{N}}$ converge. Cela signifie que (a_n) est faiblement de Cauchy. Soit a_∞ sa limite. Montrons que a_∞ est borne inférieure. On a,

$$a_\infty \in \overline{\{a_p \mid p \geqq n\}} \subset a_n - F_+ ,$$

d'où $a_\infty \leqq a_n$, $\forall n$. Si z est un minorant de (a_n), on a $a_n \in z + F_+$, d'où $a_\infty \in z + F_+$ et $a_\infty \geqq z$.

REMARQUE. Pour ce lemme cf. Peressini [9, p. 92]. On peut appliquer ce lemme aux espaces L^p, $1 \leqq p < \infty$. (Pour $p > 1$, L^p est réflexif. Or si F est semi-réflexif il est faiblement séquentiellement complet, car une suite de Cauchy faible est bornée. Et il est connu que L^1 est faiblement séquentiellement complet.) Toutefois il est plus simple, dans ce cas, d'utiliser le théorème de Lebesgue.

9.

La proposition suivante n'est que la reprise de Bourbaki [4, ch. II, § 2, nº 10, prop. 21, p. 60] et sera utile dans la démonstration du théorème 10.

PROPOSITION. *Si E est un espace vectoriel topologique et F un espace vectoriel topologique ordonné où tout intervalle $[x,y]$ est borné pour la topologie, et si f est majorée au voisinage d'un point de $\mathring{C}$, alors f est continue sur $\mathring{C}$.*

DÉMONSTRATION. 1) Montrons d'abord que si f est majorée au voisinage de $x_0 \in \mathring{C}$, f est continue en x_0. On peut supposer $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$. Soit U un voisinage symétrique de 0 dans E contenu dans C, et $z \in F$ tel que $x \in U$ entraîne $f(x) \leqq z$. Soit V un voisinage de 0 dans F. Il existe $\varepsilon \in\,]0,1]$ tel que $\varepsilon[-z,z] \subset V$. Montrons que $x \in \varepsilon U$ entraîne $f(x) \in \varepsilon[-z,z]$. En effet si $x \in \varepsilon U$, $\varepsilon^{-1}x \in U$ et $x = \varepsilon\varepsilon^{-1}x + (1-\varepsilon)0$, d'où

$$f(x) \leqq \varepsilon f(\varepsilon^{-1}x) \leqq \varepsilon z .$$

De plus

$$-\varepsilon^{-1}x \in U \quad \text{et} \quad 0 = (1+\varepsilon)^{-1}\big(\varepsilon(-\varepsilon^{-1}x) + x\big) ,$$

d'où

$$0 \leqq (1+\varepsilon)^{-1}(\varepsilon f(-\varepsilon^{-1}x)+f(x))$$

et

$$f(x) \geqq -\varepsilon f(-\varepsilon^{-1}x) \geqq -\varepsilon z\,.$$

2) Soit maintenant y un point quelconque de $\mathring{C}$. On va montrer, en conservant les notations précédentes, que f est majorée sur un voisinage de y. Il existe $\varrho > 1$ tel que $u = \varrho y$ appartienne à $\mathring{C}$. Posons $\lambda = 1 - \varrho^{-1}$. Soit H l'homothétie $x \mapsto \lambda x + (1-\lambda)u$. Elle est de rapport $\lambda < 1$, de centre u, elle transforme 0 en y et U en un voisinage $H(U)$ de y. Pour les points $H(x)$, $x \in U$, on a

$$f(H(x)) \leqq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(u) \leqq z + (1-\lambda)f(u)\,,$$

ce qui signifie que f est majorée par $z+(1-\lambda)f(u)$ sur $H(U)$.

10.

THÉORÈME. 1) *Soit E et F des espaces vectoriels topologiques. On suppose que dans F tout intervalle $[x,y]$ est borné pour la topologie. Alors si f est majorée au voisinage d'un point $x_0 \in \mathring{C}$, il existe un voisinage V de* 0, *contenu dans $\mathring{C} - x_0$, tel que $\bigcup \{\partial f(x) \mid x \in x_0 + V\}$ soit équicontinue.*

2) *Si de plus F est un espace localement convexe séparé, si F_+ est fermé, si les intervalles $[x,y]$ sont faiblement relativement compacts, et si toute suite décroissante minorée dans F admet une borne inférieure et converge faiblement vers sa borne inférieure, alors la multi-application $x \mapsto \partial f(x)$ est à valeurs compactes et semicontinue supérieurement de $x_0 + V$ dans $\mathscr{L}_s(E, F_\sigma)$.*

DEMONSTRATION. 1) Soit U un voisinage de 0 symétrique contenu dans $\mathring{C} - x_0$, tel que f soit majorée par $z \in F$ sur $x_0 + U$. Montrons d'abord que si $x = x_0 + h \in x_0 + U$, on a $f(x) \geqq 2f(x_0) - z$. En effet

$$f(x_0) \leqq \tfrac{1}{2}f(x_0+h) + \tfrac{1}{2}f(x_0-h) \leqq \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}z\,,$$

d'où l'inégalité. Soit V un voisinage symétrique de 0 tel que $V + V \subset U$. Soit $x \in x_0 + V$, $T \in \partial f(x)$ et $h \in V$. Comme x et $x+h$ appartiennent à $x_0 + U$, on a

$$T(h) \leqq f(x+h) - f(x) \leqq z - 2f(x_0) + z = 2z - 2f(x_0)$$

et

$$T(h) = -T(-h) \geqq f(x) - f(x-h) \geqq 2f(x_0) - z - z = 2f(x_0) - 2z\,.$$

L'ensemble $B = [2f(x_0) - 2z, 2z - 2f(x_0)]$ est borné. Si W est un voisinage de 0 dans F il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon B \subset W$. Alors si $h \in \varepsilon V$, on a $T(h) \in W$ pour tout $x \in x_0 + V$ et tout $T \in \partial f(x)$. Cela prouve que

$$\bigcup \{\partial f(x) \mid x \in x_0 + V\}$$

est équicontinu.

2) Sous les hypothèses du 2) l'ensemble $\bigcup \{\partial f(x) \mid x \in x_0 + V\}^{\sim}$ est relativement compact dans $\mathscr{L}_s(E, F_\sigma)$ (mêmes arguments que dans le 1) du corollaire 7). Les $\partial f(x)$ sont compacts car ils sont fermés; on va montrer plus: que $x \mapsto \partial f(x)$ est de graphe fermé. Grâce à un théorème de Berge [2] cela établira que $x \mapsto \partial f(x)$ est semicontinue supérieurement. Le graphe est

$$\{(x,T) \in (x_0 + V) \times \mathscr{L}(E,F) \mid T(h) \leqq f'(x,h), \forall h \in E\}.$$

Comme F_+ est fermé et que F est un espace localement convexe séparé, ce graphe est égal à

$$\begin{aligned}\{(x,T) \mid \langle z', f'(x,h)\rangle &\geqq \langle z', T(h)\rangle, \forall h \, \forall z' \in F_+'\} \\ &= \{(x,T) \mid \langle z', f'(x,h)\rangle - \langle z', T(h)\rangle \geqq 0, \forall h \, \forall z'\}.\end{aligned}$$

Il suffit de montrer, que pour $z' \in F_+'$ et $h \in E$, la fonction $x \mapsto \langle z', f'(x,h)\rangle$ est semicontinue supérieurement sur $x_0 + V$. Soit (λ_n) une suite décroissante tendant vers 0 de nombres > 0, telle que $\lambda_n h \in V$, $\forall n$. On a

$$\langle z', f'(x,h)\rangle = \langle z', \inf(f(x + \lambda_n h) - f(x))/\lambda_n\rangle.$$

D'après l'hypothèse sur F

$$\langle z', f'(x,h)\rangle = \inf\langle z', (f(x + \lambda_n h) - f(x))/\lambda_n\rangle.$$

D'après la proposition 9 les fonctions $x \mapsto \langle z', f(x + \lambda_n h) - f(x)\rangle$ sont continues sur $x_0 + V$.

Remarques. 1) Si E et F sont localement convexes séparés, le dual de $\mathscr{L}_s(E,F)$ s'identifie à $E \otimes F'$. On ne sait calculer la fonction d'appui de $\partial f(x)$ que pour des tenseurs décomposables $h \otimes z'$, où $z' \in F_+'$.

2) La démonstration de l'équicontinuité de $\bigcup \{\partial f(x) \mid x \in x_0 + V\}$ semble nouvelle, même dans le cas $F = \mathsf{R}$ (cf. Moreau [8, prop. 11.e, p. 79]).

3) Le lecteur a pu s'apercevoir que l'on sait montrer l'équicontinuité de $\partial f(x_0)$ sous deux hypothèses différentes. Dans le théorème 6 on suppose F normal et f continue en x_0. Dans le théoreme 10 on suppose les intervalles de F bornés pour la topologie et f majorée au voisinage de x_0.

BIBLIOGRAPHIE

1. K. J. Arrow, L. Hurwicz and H. Uzawa, *Studies in linear and non-linear programming*, Stanford University Press, 1958.
2. C. Berge, *Espaces topologiques. Fonctions multivoques*, Dunod, Paris, 1959.
3. N. Bourbaki, *Algèbre*, Ch. 6, 7 (Act. Sci. Ind. 1179), 1ère éd., Hermann, Paris, 1952.
4. N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Ch. 1–2 (Act. Sci. Ind. 1189), 2ème éd., Hermann, Paris, 1966.
5. N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Ch. 3, 4, 5 (Act. Sci. Ind. 1229), 1ère éd., Hermann, Paris, 1964.
6. N. Bourbaki, *Intégration*, Ch. 1, 2, 3, 4 (Act. Sci. Ind. 1175), 2ème éd., Hermann, Paris, 1965.
7. P. A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Hermann, Paris, 1966.
8. J. J. Moreau, *Fonctionnelles convexes* (Séminaire sur les équations aux dérivées partielles II), Collège de France, Paris, 1966–67.
9. A. L. Peressini, *Ordered topological vector spaces*, Harper and Row, New York, 1967.
10. C. Raffin, *Contribution à l'étude des programmes convexes définis dans des espaces vectoriels topologiques*, Thèse, Paris, 1969.

Ajouté en épreuve:

11. A. D. Ioffe et V. L. Levin, *Sous-différentiabilité de fonctions convexes* (à paraitre dans Trudy Moskov. Mat. Obšč.)
12. V. L. Levin, *Sur le sous-différentiel de fonctions composées*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 194–2 (1970), 28–29. (En Russe.)
13. C. Raffin, *Sur les programmes convexes définis dans les espaces vectoriels topologiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 20–1 (1970), 457–491.

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC
MONTPELLIER, FRANCE