MATH. SCAND. 32 (1973), 225–241

ETUDE DES ESPACES $A(K)$ QUI SONT DES DUAUX

MICHÈLE CAPON

0. Introduction.

Nous allons étudier les propriétés de certains convexes compacts K tels que l'espace $A(K)$ des fonctions affines continues sur K soit un dual. L'espace $A(K)$ sera toujours muni de la norme uniforme et de l'ordre usuel sur les fonctions. L'expression "$A(K)$ est un dual" signifiera que $A(K)$ est le dual pour l'ordre et la norme d'un espace normé ordonné V. Notons ici que l'injection canonique de V dans son bidual permet d'identifier V à un sous espace de $A'(K)$ muni de la norme et de l'ordre induit par $A'(K)$.

A partir de certaines propriétés introduites par Alfsen nous ferons l'étude des espaces $A(K)$ qui sont des duaux. Notre étude peut être éclairée par la considération d'un cas particulier, celui de l'espace $\mathscr{C}(X)$ des fonction continues sur un espace compact X, qui s'identifie à l'espace $A(K)$ où $K=M_1{}^+(X)$. Les résultats de Dixmier [4] constituent un cas particulier de ceux que nous avons en vue. Rappelons pour cela qu'une mesure μ sur le compact X est dite normale si, lorsque f est l'enveloppe supérieure dans l'espace ordonné $\mathscr{C}(X)$ d'une famille filtrante croissante $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ alors $\mu(f)$ est la limite des $\mu(f_\alpha)$. Dixmier montre dans [4] qu'une condition nécessaire est suffisante pour que $\mathscr{C}(X)$ soit un dual et que X soit un compact hyperstonien, c'est à dire vérifie les deux conditions suivantes:

1) L'espace $\mathscr{C}(X)$ est complétement réticulé.

2) La réunion des supports des mesures normales sur X est dense dans X.

Dans ces conditions le prédual de $\mathscr{C}(X)$ est unique et s'identifie à l'espace des mesures normales sur X.

Nous commencerons notre étude par le cas où K est un simplexe en montrant que dans ce cas les conditions nécessaires introduites par Alfsen sont aussi suffisantes. L'étude du cas général nous permettra de retrouver et d'améliorer les résultats de Phelps [7] sur les polytopes, et de Behrendts [2] sur les espaces réflexifs.

Reçu Juillet 21, 1972.

1. Une propriete introduite par Alfsen.

Soit K un convexe compact. Par analogie avec les mesures normales nous dirons qu'un point x de K est normal si pour toute f de $A(K)$ qui est borne supérieure dans l'espace ordonné $A(K)$ d'une famille filtrante croissante $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ on a

$$f(x) = \sup_{\alpha\in I} f_\alpha(x) .$$

Nous noterons N l'ensemble des points normaux de K. Nous dirons que K possède la propriété $\mathscr{A}$ s'il vérifie les deux conditions suivantes introduites par Alfsen:

$\mathscr{A}1$. Toute famille filtrante croissante et majorée de $A(K)$ admet une borne supérieure dans l'espace ordonné $A(K)$.

$\mathscr{A}2$. N est dense dans K.

Remarque 1. Ces deux conditions sont exactement celles qui interviennent dans l'exemple cité plus haut d'un espace $\mathscr{C}(X)$. En effet si $K = M_1{}^+(X)$ ensemble des mesures de probabilités sur X, il est équivalent de dire que la réunion des supports des mesures normales sur X est dense dans X ou que l'ensemble des mesures de probabilité normales, c'est à dire N, est dense dans K.

Nous dirons que K possède la propriété $\mathscr{A}_f$ si K vérifie $\mathscr{A}$ et si de plus $N = K$. On peut donner une autre forme de la propriété $\mathscr{A}_f$.

Lemme 2. *On a l'équivalence*:
K vérifie $\mathscr{A}_f$ si et seulement si toute fonction affine semi-continue inférieurement sur K est continue.

Demonstration. *Condition nécessaire*: Toute fonction affine semi-continue inférieurement est l'enveloppe supérieure de la famille filtrante croissante des fonctions affines continues qui la minorent strictement. D'après $\mathscr{A}_f$ cette enveloppe est aussi la borne supérieure dans $A(K)$ de la famille en question, donc elle est continue.

Condition suffisante: Soit $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille filtrante croissante majorée de $A(K)$. L'enveloppe supérieure ponctuelle f est une fonction affine semi-continue inférieurement donc continue par hypothèse. Or f est évidemment la borne supérieure des $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ dans $A(K)$, et la définition d'un point normal montre que $N = K$.

Proposition 3. (Alfsen). *Lorsque $A(K)$ est un dual, K vérifie $\mathscr{A}$.*

Demonstration. Soit V un prédual de $A(K)$. Pour démontrer $\mathscr{A}1$ considérons une famille $\mathscr{F}$ filtrante croissante majorée de $A(K)$. Lorsque

f parcourt $\mathscr{F}$ et g parcourt l'ensemble des majorants de $\mathscr{F}$ les intervalles d'ordre $[f,g]$ forment, pour la topologie $\sigma(A(K), V)$, une famille de compacts de $A(K)$ dont aucune intersection finie n'est vide; l'intersection totale est non vide et nécessairement réduite à un point F, borne supérieure de $\mathscr{F}$ dans $A(K)$.

Pour $\mathscr{A}2$ il suffit de démontrer les deux inclusions

$$(V^+ \cap K) \subset N \subset \overline{V^+ \cap K} = K .$$

Comme $A(K)$ est dual ordonné, la relation $f(x) \geqq 0$ pour tout x de $V^+ \cap K$ implique que f est positive ou nulle. On déduit de là, la densité de $V^+ \cap K$, sinon il existerait une fonction f de $A(K)$ telle que

$$\inf_{x \in K} f(x) < 0 \leqq \inf_{x \in V^+ \cap K} f(x) ,$$

et ceci contradirait l'assertion précédente. D'autre part, si G est un point adhérent de $\mathscr{F}$ dans $A(K)$ on a

$$(*) \qquad G(x) = \lim f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } V^+ \cap K .$$

Donc $G(x) > f(x)$ pour tout x de $V^+ \cap K$ et toute fonction f de $\mathscr{F}$. Comme $V^+ \cap K$ est dense, G majore chaque fonction de $\mathscr{F}$ donc G majore F.

Mais F étant un majorant de $\mathscr{F}$ on a

$$F(x) \geqq \sup_{f \in \mathscr{F}} f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } K .$$

Soit $F(x) \geqq G(x)$ pour tout x de $V^+ \cap K$ donc $F \geqq G$. On en déduit l'égalité $F = G$ et $(*)$ montre que $V^+ \cap K$ est contenu dans N.

Alfsen a conjecturé que la condition $\mathscr{A}$ était aussi suffisante pour que $A(K)$ soit un dual. En fait cette hypothèse est fausse. On peut énoncer en effet, le théorème suivant:

THEOREME 4. *Tout convexe compact qui possède un point interne relativement à la variété qu'il engendre, vérifie* $\mathscr{A}_f$.

Pour le montrer nous utiliserons un lemme intéressant en lui-même.

LEMME 5. *Soit K un convexe compact, les propriétés suivantes sont équivalentes*:

1) 0 *est un point interne de* K.
2) *Il existe* $\lambda \geqq 1$, *et un convexe compact symétrique* X *tel que* $X \subset K \subset \lambda X$.

DEMONSTRATION. $2 \Rightarrow 1$. Pour tout point x de K on peut en effet trouver un segment fermé I_x contenu dans K et contenant x tel que 0 soit intérieur à I_x, donc 0 est un point interne.

$1 \Rightarrow 2$. Pour tout x de K on peut trouver un segment symétrique I_x dont le support passe par x contenu dans K tel que 0 soit dans $(I_x)°$. Soit S la réunion des I_x; c'est un ensemble équilibré et absorbant dans K donc aussi dans l'espace engendré $(\mathrm{lin} K)$. L'enveloppe convexe fermée X de S est un tonneau et par suite absorbe toutes les parties convexes équilibrées et complétes (voir [3]). X absorbe donc l'enveloppe équilibrée de K et on peut trouver $\lambda \geqq 1$ tel que λX contienne K.

DEMONSTRATION DE THEOREME 4. Avec les notations du lemme on a $X \subset K \subset \lambda X$.

Pour x de K on peut écrire

$$0 = \lambda(1+\lambda)^{-1}(-\lambda^{-1}x)+(1+\lambda)^{-1}x\,,$$

donc $f(0)(1+\lambda)=f(x)+\lambda f(-\lambda^{-1}x) \geqq f(x)$ pour toute f de $A^+(K)$. Si on considère une famille filtrante croissante et majorée $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$, on a alors

$$0 \leqq f_\beta(x)-f_\alpha(x) \leqq (1+\lambda)[f_\beta(0)-f_\alpha(0)] \quad \text{pour tout } \beta \geqq \alpha\,,$$

donc $\|f_\beta - f_\alpha\| \leqq (1+\lambda)[f_\beta(0)-f_\alpha(0)]$.

La famille converge donc *en norme* vers un élément de $A(K)$ qui en est nécessairement la borne supérieure. Il en résulte facilement que $\mathscr{A}_f$ est vérifié.

COROLLAIRE 6. *Tout convexe compact symétrique vérifie* $\mathscr{A}_f$.

REMARQUE 7. Soit E un espace de Banach, E' dual et K la boule unité de E' munie de la topologie $\sigma(E',E)$.

Nous allons expliciter l'espace $A(k)$. Une forme linéaire sur E' étant continue si et suelement si sa restriction à K l'est, $A(K)$ s'identifie à $E \oplus \mathsf{R}$. On vérifie facilement que pour tout (f,λ) de $E\oplus\mathsf{R}$:

$$\|(f,\lambda)\|_K = \sup_{x\in K}|f(x)+\lambda| = \|f\|_E+|\lambda|$$

et que (f,λ) est positive sur K si et seulement si $\lambda \geqq \|f\|$.

COROLLAIRE 8. *Il existe des convexes compacts vérifiant $\mathscr{A}_f$ et tels que $A(K)$ ne soit pas un dual.*

DEMONSTRATION. Soit E un espace de Banach qui n'est dual d'aucun autre espace normé, par exemple $C_0(\mathsf{N})$. En gardant les notations de la remarque 7, supposons que $E\oplus\mathsf{R}$ soit dual, pour l'ordre et la norme, d'un sous-espace V de $A'(K)$ (voir l'introduction).

D'après la proposition 3, $V \cap K$ est dense dans K donc non vide. Soit

$(x_0, 1)$ un point de $E' \times \mathsf{R}$ (identifié à $A'(K)$) qui est dans $V \cap K$; alors $(-x_0, 1)$ y est aussi et $(0,1)$ est dans $V \cap K$. On en tire facilement la relation $V = V_1 \times \mathsf{R}$ où V_1 est la projection de V sur E'.

Comme V est faiblement dense dans $A'(K)$, V_1 est faiblement dense dans E'. De plus la boule unité de $A(K)$ étant $\sigma(A(K), V)$ compacte on montre aisément que la boule unité de E est $\sigma(E, V_1)$ compacte. E serait par conséquent dual de V_1 pour la norme ce qui est impossible.

Nous allons voir que la réciproque de la proposition 3 est vraie dans le cas des simplexes.

PROPOSITION 9. *Pour tout simplexe K les propriétés suivantes sont équivalentes*

1) *K vérifie $\mathscr{A}$,*
2) *$A(K)$ est un dual.*

De plus si ces conditions sont vérifiées K est un simplexe de Bauer et le prédual de $A(K)$ est l'espace noté $(\operatorname{lin} N)$, *engendré par N dans $A'(K)$.*

DEMONSTRATION $2 \Rightarrow 1$. résulte de la proposition 3.

$1 \Rightarrow 2$. Montrons que K est un simplexe de Bauer:

Soient f_1 et f_2 deux éléments de $A(K)$ et $f = \sup(f_1, f_2)$. $\hat{f}$ est affine semi-continue supérieurement donc enveloppe inférieure de l'ensemble filtrant décroissant $\mathscr{H}$ des fonctions affines continues qui la majorent strictement. Soit F la borne inférieure dans $A(K)$ de $\mathscr{H}$ (qui existe d'après la propriété $\mathscr{A}1$). On a

$$\hat{f} \geqq F \geqq f.$$

Donc

$$F = \hat{f}.$$

$A(K)$ étant réticulé, K est un simplexe de Bauer et $A(K)$ est isomorphe pour l'ordre et la norme à $\mathscr{C}(\mathscr{E}(K))$. On vérifie aisément que nous sommes dans le cas de Dixmier rappelé dans l'introduction, donc $\mathscr{C}(\mathscr{E}(K))$ est le dual de l'espace des mesures normales sur $\mathscr{E}(K)$. En revenant à $A(K)$ on en déduit la proposition.

COROLLAIRE 10. *Un simplexe K vérifie $\mathscr{A}_f$ seulement lorsqu'il est de dimension finie.*

DEMONSTRATION. La condition est évidemment suffisante; réciproquement si $\mathscr{A}_f$ est vraie, chaque mesure δ_x sur $\mathscr{E}(K)$ est une mesure normale sur $\mathscr{E}(K)$ donc x est un point isolé de $\mathscr{E}(K)$. $\mathscr{E}(K)$ est donc un compact fini et K est de dimension finie.

Nous allons maintenant donner des résultats plus précis concernant la propriété $\mathscr{A}_f$, montrant que sous certaines hypothèses on a une réciproque au théorème 4.

DEFINITION 11. Soit S un simplexe et K un convexe compact. Nous noterons (a) et (b) les conditions suivantes:

(a) Il existe une application affine continue surjective de S sur K telle que pour tout x de K, $\varphi^{-1}(x)$ soit de dimension finie.

(b) (1) Il existe une sous variété fermée de codimension finie (dans l'espace E qui contient S) telle que $S \cap M = K$.

(2) L'ensemble $K^{\perp}$ des f de $A(S)$ qui sont nulles sur K, est de dimension finie.

(3) K possède la propriété d'extension dans S:

$$A(S,K) = A(K) .$$

(Voir [1].)

REMARQUE. Suivant Phelps [7] nous dirons que K est un α (resp. β) polytope s'il existe un couple (S,K) lié par la relation (a) (resp. un couple (S,K) vérifiant (b1)).

Dans le cas (a), φ se prolonge de manière unique en une application linéaire $\tilde{\varphi}$ de $A'(S)$ sur $A'(K)$. Phelps montre en [7] que $\tilde{\varphi}^{-1}(0)$ est de dimension finie.

PROPOSITION 12. *Soit* (S,K) *un couple lié par* (a) *ou par* (b) (*voir définition* 11). *Si* K *vérifie* $\mathscr{A}_f$ *alors* S *vérifie* $\mathscr{A}_f$.

DEMONSTRATION I. *Cas* (a). On prolonge φ en $\tilde{\varphi}$ de $A'(S)$ sur $A'(K)$. D'après la remarque précédente, $\tilde{\varphi}^{-1}(0)$ est de dimension finie. On plonge $A(K)$ dans $A(S)$ par l'application i définie par $i(f) = f \circ \varphi$.

LEMME. *$A(K)$ est un sous-espace complémentable de $A(S)$.*

DEMONSTRATION. Considérons la restriction à $A(S)$ de l'application

$$P : A'(S)^* \to A'(S)^*/(\tilde{\varphi}^{-1}(0))^{\perp} = (\tilde{\varphi}^{-1}(0))^*$$

définie par $P(f) = f \mid \tilde{\varphi}^{-1}(0)$. Le noyau de cette restriction est $A(K)$ et par conséquent $A(K)$ est de codimension finie dans $A(S)$. Comme de plus il est fermé tout supplémentaire algébrique est un supplémentaire topologique.

Le lemme étant montré, soit M un supplémentaire de $A(K)$ dans $A(S)$. Il existe $\lambda > 0$ tel que toute f de $A(S)$ s'écrive de manière unique

$$f = h\circ\varphi + g, \quad h \in A(K),\ g \in M$$

et

$$\|f\|_S \leqq \|h\|_K + \|g\|_S \leqq \lambda\|f\|_S .$$

Pour vérifier que S vérifie $\mathscr{A}_f$, considérons une famille filtrante croissante majorée et montrons que son enveloppe supérieure $f = \sup_{\alpha\in I} f_\alpha$ est continue (voir le lemme 2). On suppose $0 \leqq f_\alpha \leqq 1$ et on écrit

$$f_\alpha = h_\alpha \circ \varphi + g_\alpha .$$

Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des sections de I et soit g la limite (en norme) des g_α suivant $\mathscr{U}$. On peut trouver une suite décroissante A_P de parties de $\mathscr{U}$ telles que $\|g_\alpha - g_\beta\| < 2^{-P}$ dès que α et β sont dans A_P. On définit un nouvel ensemble I' d'indices

$$I' = (\alpha, P), \quad P \in \mathsf{N},\ \alpha \in A .$$

On vérifie aisément que I' est filtrant croissant pour la relation d'ordre suivante

$$\begin{aligned}(\alpha,P) \geqq (\alpha',P') \Leftrightarrow\ & \alpha = \alpha' \text{ et } P = P' ,\\ & \text{ou } P > P' \text{ et } \alpha \geqq \alpha' .\end{aligned}$$

Posons alors

$$\Psi_{\alpha,P} = f_\alpha - g_\alpha + (2^{-1} + \ldots + 2^{-(P-1)}) .$$

Un calcul facile montre que $\Psi_{\alpha,P}$ est filtrante croissante majorée dans $A(K)$. Elle converge en norme vers sa borne supérieure Ψ dans $A(K)$, qui est aussi la borne supérieure dans $A(S)$ car c'est la limite simple des $\Psi_{\alpha,P}$. Grâce au choix des indices on montre facilement que l'on a aussi

$$f - g + 1 = \Psi\circ\varphi .$$

On déduit de cette égalité la continuité de f.

II. *Cas* (b). Soit (S,K) un couple lié par la relation (b). Reprenons les notations et résultats de 1:

En considérant l'application φ de $A(S)$ sur $A(S,K)$ donnée par $\varphi(f) = f|K$, on définit une isométrie entre $A(S,K)$ et $A(S)/K^\perp$.

Si K possède la propriété d'extension dans S, il existe $\varrho > 0$ tel que

$$\|g\|_{A(K)} \leqq \|g\|_{A(S,K)} < \varrho\|g\|_{A(K)}$$

pour toute g de $A(K)$.

Considérons maintenant une famille $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ de $A(S)$ et son enveloppe supérieure f comme au cas (a). La famille $(\varphi(f_\alpha))_{\alpha\in I}$ est filtrante croissante majorée dans $A(K)$ donc elle converge en norme vers une fonction g de $A(K)$.

1) Supposons d'abord que l'on ait $\varphi(f_\alpha)\neq g$ pour tout α. Posons alors

$$\varepsilon_\alpha = \|g-\varphi(f_\alpha)\| = \sup_K(g-\varphi(f_\alpha)) > 0 ,$$

$(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in I}$ est filtrante décroissante vers 0 et $\varepsilon_\alpha > 0$.

Si on note $\bar{g}$ un prolongement de g à S, on a $\varphi(\bar{g})=g$; donc

$$\|\varphi\bar{g}-\varphi f_\alpha\|_{A(S,K)} = \|g-f_\alpha\|_{A(S,K)} \leqq \varrho\|g-f_\alpha\|_{A(K)} .$$

On peut donc trouver, par définition d'une norme quotient, une h_α de $K^\perp$ telle que

$$\|\bar{g}-f_\alpha-h_\alpha\|_{A(S)} \leqq \varrho\|f_\alpha-g\|_{A(K)}+\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha(\varrho+1) .$$

Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des sections de I. La famille $(h_\alpha)_{\alpha\in I}$ est bornée en norme donc elle converge suivant $\mathscr{U}$. On a donc: Si h est sa limite

$$\|f_\alpha-\bar{g}-h\|_{A(S)} \leqq (\varrho+1)\varepsilon_\alpha+\|h_\alpha-h\|_{A(S)} .$$

On tire de là l'égalité

$$\lim_{\mathscr{U}} f_\alpha = h+\bar{g} = f;$$

donc f est continue.

2) Supposons maintenant $\varphi(f_\alpha)=g$ pour tout $\alpha\geqq\alpha_0$. Pour tout $\alpha\geqq\alpha_0$, $\bar{g}-f_\alpha=h_\alpha$ est dans $K^\perp$. Soit h la limite des h_α suivant l'ultrafiltre $\mathscr{U}$. On a

$$h = \lim_{\mathscr{U}} h_\alpha = \lim_{\mathscr{U}}(\bar{g}-f_\alpha) = \bar{g}-f .$$

Donc $f=\bar{g}-h$. Comme $\bar{g}$ et h sont continues, f l'est aussi.

Proposition 13. *Soit K un convexe compact tel qu'il existe un couple (S,K) lié par l'une des relations* (a) *ou* (b). *Les propriétés suivantes sont alors équivalentes*:

1) *K vérifie $\mathscr{A}_f$;*
2) *K possède un point interne;*
3) *$A(K)$ est un réflexif;*
4) *K est de dimension finie.*

Demonstration $4 \Rightarrow 3$ est évident.

$3 \Rightarrow 1$ est vrai car si $A(K)$ est réflexif alors K vérifie $\mathscr{A}$ et $K=N$.

$1 \Rightarrow 4$ résulte de la proposition 12.

$4 \Rightarrow 2$ et $2 \Rightarrow 1$ se vérifient facilement avec le théorème 4.

REMARQUE 14. L'équivalence $3 \Leftrightarrow 4$ se trouve dans [2].

On améliore ainsi les résultats de Phelps [7] qui a montré qu'un α-polytope (resp. un β polytope) de dimension infinie ne peut avoir de centre de symétrie. On peut se demander si un β polytope de dimension infinie qui ne vérifie pas (b) peut posséder un point interne ou vérifier $\mathscr{A}_f$. Nous allons voir que, dans le cas général, un convexe compact peut vérifier $\mathscr{A}_f$ sans posséder de point interne.

PROPOSITION 15. *Tout produit de convexes compacts vérifiant $\mathscr{A}_f$, vérifie aussi $\mathscr{A}_f$.*

DEMONSTRATION. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de convexes compacts vérifiant $\mathscr{A}_f$ et soit X leur produit. D'après le lemme 2 il suffit de montrer que toute fonction affine F semi-continue inférieurement sur X, est continue. On peut supposer que X contient 0 et que F atteint son minimum 0 au point 0.

Notons u_i l'injection de X_i dans X; c'est-à-dire

$$u_i(x) = (y_j)_{j\in I}$$

avec

$$y_j = 0 \text{ si } j \neq i, \quad \text{et} \quad y_i = x .$$

Posons $F_i = F \circ u_i$. Alors F_i est affine semi-continue inférieurement sur X_i, donc elle est continue, en vertu du lemme 2. De plus F_i est positive et $F_i(0) = 0$. Montrons que la famille $(\|F_i\|)_{i\in I}$ est sommable:

Soit x_i dans X_i tel que $F_i(x_i) = \|F_i\|$. Pour toute partie finie J de I posons

$$z_J = \sum_{i\in J} u_i(x_i) .$$

On a alors

$$F(z_J) = \sum_{i\in J} F_i(x_i) = \sum_{i\in J} \|F_i\| \leqq \|F\| .$$

Ceci étant vrai pour tout J on a $\sum_{i\in I} \|F_i\| \leqq \|F\|$.

Notons P_i la projection de X sur X_i et posons

$$H = \sum_{i\in I} F_i \circ P_i .$$

La famille $(F_i \circ P_i)_{i\in I}$ est normalement sommable, donc H est continue. Montrons maintenant que $F = H$:

Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ un point de X. Posons $z_J = \sum_{i\in I} u_i(x_i)$ pour toute partie finie J de I on a alors $H(z_J) = F(z_J) \leqq F(x)$ puisque $x - z_J$ est dans X et que F est positive sur X. Or (z_J), $J \in \mathscr{P}_f(I)$, tend vers x suivant le filtre des sections $\mathscr{P}_f(I)$, donc $H(x) \leqq F(x)$. D'autre part F étant semi-continue inférieurement on a

$$F(x) \leqq \lim_J F(z_J) = H(x) .$$

Donc F est égale à H.

PROPOSITION 16. *Il existe une suite (X_n) de convexes compacts ayant chacun un point interne et tels que $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ soit sans point interne.*

DEMONSTRATION. Posons en effet

$$X_n = \{\mu \in M[0,1] : \|\mu\| \leqq 1 \text{ et } \mu(1) \geqq 1 - n^{-1}\} .$$

X_n est convexe compact et si μ_0 est point de $M_1{}^+[0,1]$ on vérifie aisément que

$$\mu_{0n} = (1-(2n)^{-1})u_0$$

est point interne de X_n. Si X possédait un point interne $\nu_0 = (\nu_{0n})_{n \in \mathbf{N}}$, cela signifierait que pour toute famille $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$, avec μ_n dans X_n, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $(1+\varepsilon)\nu_{0n} - \varepsilon\mu_n$ soit dans X_n pour tout n.

En prenant pour μ_n une masse de Dirac δ_{x_n} étrangère à ν_{0n}, ce qui est possible sur $[0,1]$, on montre facilement que l'on devrait avoir $\varepsilon \leqq (2n)^{-1}$ pour tout n, ce qui est impossible.

2. Recherche de conditions necessaires.

Nous allons voir qu'il existe une condition nécessaire plus forte que la condition $\mathscr{A}$.

PROPOSITION 17. *Soit K un convexe compact et supposons que $A(K)$ soit un dual. Alors pour toute famille $(I_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'intervalles de $A(K)$ telle que toute sous-famille finie ait une intersection non vide, l'intersection totale est non vide.*

DEMONSTRATION. Posons en effet $M_J = \bigcap_{\alpha \in J} I_\alpha$, pour toute partie finie J de I. Si $A(K)$ est dual d'un espace V, les M_J ont un point adhérent f dans $A(K)$ pour $\sigma(A(K), V)$. Comme $A(K)$ est dual de V pour l'ordre, f est dans chacun des I_∞.

REMARQUE. Cette propriété est équivalente à l'énoncé analogue pour des boules B_α de $A(K)$. En effet toute boule est un intervalle, mais tout intevalle est intersection de deux boules. Il suffit pour le voir de remarquer que

$$[f_1, f_2] = B(f_2 - r; r) \cap B(f_1 + r; r) \quad \text{où } r = \|f_2 - f_1\| .$$

REMARQUE. Si K vérifie la condition $\mathscr{A}'$ de la proposition 17, K vérifie $\mathscr{A}1$:

Soit en effet $\mathscr{F}$ une famille filtrante croissante majorée de $A(K)$ et soit $\mathscr{M}$ l'ensemble des majorants de $\mathscr{F}$. La proposition 17 appliqué aux intervalles $[f,g]$, lorsque f parcourt $\mathscr{F}$ et g parcourt $\mathscr{M}$, montre l'existence d'une borne supérieure. Par contre, K peut vérifier $\mathscr{A}_1$ sans vérifier $\mathscr{A}'$:

CONTRE EXEMPLE. Soit K la boule unité de $l_1(\mathsf{N})$ muni de la topologie $\sigma(l_1(\mathsf{N}),C_0(\mathsf{N}))$ alors $A(K)$ s'identifie à $C_0(\mathsf{N})\times\mathsf{R}$. (Voir remarque 7.) Posons alors $e_n(m)=\delta_{mn}$. Chaque e_n est dans $C_0(\mathsf{N})$. Considérons maintenant les éléments f_n et g_n de $A(K)$ ainsi définis:

$$g_n = (e_n, -1), \quad f_n = (2e_n, 1) .$$

On vérifie aisément qu'aucune intersection finie des intervalles $I_n=[g_n,f_n]$ n'est vide. Cependant l'intersection totale est vide, car toute point (h,λ) de cette intersection vérifie pour tout n:

$$1-\lambda \geqq \|2e_n-h\| \geqq 2-|h(n)|$$

et

$$\lambda-(-1) \geqq \|h-e_n\| \geqq 1-|h(n)| ;$$

donc

$$-|h(n)| \leqq \lambda \leqq -1+|h(n)| .$$

Or h étant dans $C_0(\mathsf{N})$ on ne peut avoir $|h(n)|\geqq\frac{1}{2}$, K ne vérifie pas la propriété $\mathscr{A}'$ du proposition 17, par contre il vérifie $\mathscr{A}_f$ puisqu'il est symétrique.

Plus généralement considérons les énoncés suivants:

1) $A(K)$ est un dual.
2) Il existe une projection de norme 1 de $A''(K)$ sur $A(K)$.
3) $A(K)$ vérifie $\mathscr{A}'$.

On sait, d'après Dixmier [5] que (1) $\Rightarrow$ (2) et d'après Lindenstrauss [6] que (2) $\Rightarrow$ (3).

On ignore si (3) $\Rightarrow$ (2).

Montrons que (2) $\not\Rightarrow$ (1): Soit K la boule unité de $L^\infty[0,1]$ munie de $\sigma(L^\infty,L^1)$. Alors $A(K)$ s'identifie à $L^1[0,1]\times\mathsf{R}$ muni de l'ordre et la norme définis à la remarque 7. On sait qu'il existe une projection de L^1 « sur L^1 », de norme 1, donc K vérifie (2). Par contre la boule unité de L^1 n'ayant aucun point extrémal, on vérifie aisément que la boule unité de $A(K)$ ne posséde que deux points extrémaux, $(0,1)$ et $(0,-1)$, $A(K)$ ne peut donc pas être un dual. Cet exemple montre que la propriété $\mathscr{A}'$, même jointe à $N=K$ n'est pas suffisante pour que $A(K)$ soit un dual.

3. Recherche de conditions suffisantes.

Nous avons vu que dans le cas des simplexes le prédual de $A(K)$ est unique. De plus la démonstration de la proposition 3 montre qu'un prédual de $A(K)$ est toujours contenu dans $\operatorname{lin} N$. Montrons par un exemple que ce prédual n'est pas toujours unique. Plus précisement:

EXEMPLE 18. *Il existe un convexe compact K tel que $A(K)$ soit dual, pour l'ordre et la norme, de deux espaces E_1 et E_2 tels qu'il n'existe entre E_1 et E_2 aucune isométrie qui soit un isomorphisme d'ordre.*

On prend pour K la boule unité de $l^\infty(\mathsf{N})$ munie de $\sigma(l^\infty, l^1)$ $A(K)$ s'identifie à $l^1(\mathsf{N}) \times \mathsf{R}$ muni de l'ordre et la norme définis à la remarque 7. Or $l^1(\mathsf{N})$ est le dual de nombreux espaces, à savoir tous les $\mathscr{C}(X)$ où X est un compact dénombrable. Soient X_1 et X_2 deux compacts dénombrables, non homéomorphes, $\mathscr{C}(X_1)$ et $\mathscr{C}(X_2)$ ne sont pas isométriques.

On munit $E_i = \mathscr{C}(X_i) \times \mathsf{R}$ de la norme et de l'ordre définis comme suit

$$\|(f,t)\| = \sup(\|f\|, |t|) ,$$
$$(f,t) \geqq 0 \Leftrightarrow t \geqq \|f\| .$$

On vérifie aisément que $l_1(\mathsf{N}) \times \mathsf{R}$ est dual de E_1 et E_2. Ces deux préduaux ne sont pas isométriques, car en désignant par Φ une isométrie de E_1 sur E_2, on aurait

$$\|\Phi(f,t)\| = \|(f,t)\| = t \quad \text{pour tout } t \geqq \|f\| ,$$

c'est à dire que $\Phi(f,t)$ serait positif.

$$\Phi(f,t) = \Phi(f,0) + t\Phi(0,1) = (h,\mu) + t(h_0,\mu_0) .$$

On en tirerait que $\mu + t\mu_0 = t$ pour tout $t \geqq \|f\|$, on aurait donc $\mu_0 = 1$ et $\mu = 0$. On pourrait alors en déduire aisément que $\Phi | \mathscr{C}(X_1)$ serait une isométrie de $\mathscr{C}(X_1)$ sur $\mathscr{C}(X_2)$, ce qui est impossible.

Nous allons maintenant donner deux critères:

NOTATION. Pour tout sous-convexe X de K on définit une relation de préordre sur $A''(K)$ en posant:

$$f \gg g \Leftrightarrow f(x) \geqq g(x) \text{ pour tout } x \text{ de } X .$$

On notera $(u,v)_X$ l'ensemble des f de $A''(K)$ vérifiant $u \ll f \ll v$. Pour toute f de $A''(K)$ posons

$$\hat{\hat{f}}(x) = \inf\{u(x) : u \in A(K),\ u \gg f\} ,$$
$$\check{\check{f}}(x) = \sup\{v(x) : v \in A(K),\ v \ll f\} .$$

Remarquons que si X est dense dans K, la restriction de cette relation, à $A(K)$ n'est autre que la relation d'ordre usuelle

THEOREME 19. *Pour que $A(K)$ soit un dual il faut et il suffit qu'il existe dans K un convexe X dense dans K tel que:*

(1) *Pour toute famille $((u_\alpha, v_\alpha)_X)$ d'intervalles de $A''(K)$ telle que u_α et v_α soient dans $A(K)$ et telle qu'aucune intersection finie dans $A''(K)$ ne soit vide, alors l'intersection totale dans $A(K)$ est non vide.*

(2) *Pour toute f de $A''(K)$ et tout x de X, $\hat{\hat{f}}(x) = \check{\check{f}}(x)$.*

DEMONSTRATION. *Condition nécessaire*: On considère K et le prédual V de $A(K)$ comme plongés dans $A'(K)$. La démonstration de la proposition 3 montre que $X = V \cap K$ est dense dans K. D'autre part, d'après [5], si $A(K)$ est dual de V, il est facteur direct dans $A''(K)$. Plus précisement il existe une projection P de norme 1 de A'' sur A dont le noyau est l'espace V° orthogonal de V.

Pour démontrer (1) considérons une telle famille $((u_\alpha, v_\alpha)_X)_{\alpha\in I}$. Pour toute famille finie J de I on choisit h_J dans $A''(K) \cap \bigcap_{\alpha\in J} (u_\alpha, v_\alpha)_X$. On a alors $u_\alpha \leqq Ph_J \leqq v_\alpha$ pour tout α de J. On applique alors la proposition 17 pour obtenir la conclusion de (1).

Pour montrer (2), on vérifie que pour toute f de $A''(K)$ on a l'égalité

$$\{u : u \in A(K),\ u \gg f\} = \{u : u \in A(K),\ u \geqq Pf\}$$

et par suite $\hat{\hat{f}} = Pf$.

Condition suffisante: Soit $W = \operatorname{lin} X$, espace engendré dans $A'(K)$, et V l'adhérence en norme de W. Alors V est faiblement dense, car X est dense; donc la topologie $\sigma(A, V)$ est séparée. Montrons que la boule unité B_1 de $A(K)$ est compacte pour $\sigma(A, V)$: Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur B_1 et f sa limite dans $A''(K)$ (pour $\sigma(A'', A')$). Appliquons la propriété 1 à la famille de tous les intervalles $(u, v)_X$ où u et v sont dans $A(K)$ et vérifient $v \gg f \gg u$. Il existe h, élément de $A(K)$, contenu dans chacun de ces intervalles. La condition (2) implique aisément que $h - f$ est dans V^0 et que h est unique, c'est donc la limite de $\mathscr{U}$ pour $\sigma(A, V)$.

En utilisant la densité de X on voit aisément que $A(K)$ est dual pour l'ordre et la norme.

On va maintenant remplacer (1,2) par un (2) renforcé.

THEOREME 20. *Pour que $A(K)$ soit un dual il faut et il suffit qu'il existe un convexe X dense dans K tel que pour toute f de $A''(K)$ et tout x de K on ait $\hat{\hat{f}}(x) = \check{\check{f}}(x)$*

DEMONSTRATION. *Condition nécessaire*: Même démonstration que pour le théorème 19.

Condition suffisante: On garde les notations du théorème 19. On sait que f limite de $\mathscr{U}$ dans $A''(K)$, vérifie $\hat{\hat{f}}=\check{\check{f}}$. Cette fonction est à la fois concave semi-continue supérieure et convexe semi-continue inférieure, donc elle est affine continue. De plus $\hat{\hat{f}}(x) \geqq f(x) \geqq \check{\check{f}}(x)$ pour tout x de X donc $f-\hat{\hat{f}}$ est dans V°. On termine comme au théorème 19.

4. Etude ces espaces $A(K)$ qui sont reflexifs.

THEOREME 21. *Soit $A(K)$ le dual de V, sous espace de $A'(K)$; soit F un convexe compact contenu dans $(V \cap K)$ et tel que* $\operatorname{lin} F$ *soit fermé en norme dans $A'(K)$. Alors $A(F)$ est réflexif.*

DEMONSTRATION. L'espace $(\operatorname{lin} F)$ engendré par F, peut être muni de deux normes: celle induite par $A'(K)$ et notée $\|\cdot\|$, et celle définie par les boules unité $\operatorname{conv}(F \cup -F)$, notée $\|\cdot\|_F$. De même $A(F,K)$ sera muni de la norme quotient $\|\cdot\|_q$, de l'espace

$$A(K)/(\operatorname{lin} F)^\circ .$$

Rappelons que Alfsen [1] a montré l'équivalence suivante:

1) $\operatorname{lin} F$ est fermé en norme dans $A'(K)$.
2) $\operatorname{lin} F$ est fermé faiblement dans $A'(K)$.
3) $A(F,K)=A(F)$.
4) $A(F,K) = A(F)$ et

$$\varrho_F = \sup_{f \in A(F)} \|f\|_q / \|f\|_\infty < +\infty .$$

De plus le dual de $A(F)$ s'identifie à $\operatorname{lin} F$, muni de la norme $\|\cdot\|_F$. Or losque l'on munit $\operatorname{lin} F$ de la norme $\|\cdot\|$, qui est celle induite par V, son dual est isométrique à

$$V'/(\operatorname{lin} F)^\circ, \quad \text{soit } A(F,K) .$$

Comme par hypothèse $A(F,K)=A(F)$ et que de plus les deux normes sur $A(F)$ (la norme uniforme et la norme quotient de $A(F,K)$) sont équivalentes, on en déduit les égalités suivantes:

$$[A(F), \|\cdot\|_F]'' = [\operatorname{lin} F, \|\cdot\|_F]' = [\operatorname{lin} F, \|\cdot\|]' = A(F,K) = A(F) .$$

Ceci montre que les ensembles $A(F)$ et $A(F)''$ sont identiques; $A(F)$ est donc réflexif.

Corollaire 22. *Pour tout convexe compact K, les propriétés suivantes sont équivalentes*:

1) $A(K)$ *est réflexif.*

2) *Il existe un espace de Banach reflexif B et un point extremal x_0 de la boule unité de B tel que K soit affinement homéomorphe à*

$$H = \{\varphi \in B' : \|\varphi\| = \varphi(x_0) = 1\},$$

où $(\operatorname{lin} H)$ *est fermé dans* $A'(K)$.

3) *Il existe un espace de Banach reflexif B et un sous-convexe compact H de la boule unité B_1' de B' qui possède la propriété d'extension dans B_1' et tel que K soit affinement homéomorphe à H.*

Demonstration. $1 \Rightarrow 2$. Il suffit de prendre la constante 1 pour B et $A(K)$ lui-même pour x_0.

$2 \Rightarrow 3$ est trivial d'après les résultats de Alfsen rappelés ci-dessus.

$3 \Rightarrow 1$ Soit B_1' la boule unité de B'. L'espace $A(B_1')$ s'identifie à $B \times \mathsf{R}$, comme dans la remarque 7. Cet espace est reflexif et d'après le théorème précédent, $A(K)$ est reflexif.

L'équivalence entre 1) et 2) est due à Behrendts [2].

Appendice.

On peut étudier les espaces $A_0(K)$, où K est un chapeau et 0 est un point extrémal de $A_0(K)$. En fait ce cas se ramène aux espaces $A(X)$ où X est convexe compact.

Remarque. Si $A_0(K)$ est un dual, toute famille filtrante croissante (f_α) telle que $\|f_\alpha\| \leqq 1$ admet une borne supérieure dans $A_0(K)$. En effet si $\mathscr{F}$ est le filtre engendré par les M_α, où

$$M_\alpha = \{f \in A_0(K) : f_\alpha \leqq f \leqq 1\},$$

soit F un point adhérent au filtre. $F \geqq f_\alpha$ pour tout α car F est adhérent à M_α. Donc F est un majorant.

Soit G un autre majorant. $G \geqq f_\alpha$ donc $G(x) \geqq f_\alpha(x)$ pour tout x de $(A_0(K)')^+$. Or $F(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$ pour tout x de V^+ donc $G(x) \geqq F(x)$ pour tout x de V^+, $G-F$ est dans $(V^+)^\circ$ et le polaire de V^+ est $A_0(K)^+$ car $A_0(K)$ est dual pour l'ordre. Donc F est borne supérieure.

Consequence. D'après le théorème d'Asimow [8] la boule unité ouverte de $A_0(K)$ est filtrante croissante donc si $A_0(K)$ est dual la boule unité fermée admet un plus grand élément e qui est la borne supérieure de la boule unité ouverte.

Lemme. *Si la boule unité de $A_0(K)$ admet un plus grand élément e alors e coincide avec la jauge de K.*

Demonstration. Soit P cette jauge, montrons que $P(x)=1$ si et seulement si $e(x)=1$. Si $e(x)=1$ et $\lambda>1$ le point λx n'est pas dans K car on aurait $e(\lambda x)\leqq 1$; donc $P(x)\geqq 1$, mais comme x était dans K, $P(x)=1$. Réciproquement soit x un point de K tel que $P(x)=1$. Pour tout $\mu>1$, μx n'est pas dans K donc on peut trouver g dans $A(K)$ telle que $\mu g(x)>1$, et $g(y)<1$ sur K.

En considérant

$$(g-g(0))/\sup_K(g-g(0))+\varepsilon$$

on peut trouver f dans $A_0(K)$ telle que $\mu f(x)>1$, et $f\leqq 1$ sur K. Soit

$$m = \min_{y\in K} f(y)$$

1*er cas*. Si $m\geqq -1$ on a $-1\leqq f\leqq 1$ donc $-e\leqq f\leqq e$ on en tire

$$\mu^{-1} < f(x) \leqq e(x).$$

2*éme cas*. Si $m<-1$ on a $\|f\|=m$. En considérant la fonction $\frac{1}{2}(f-1+m)e$ qui est de norme inférieure à $\frac{1}{2}(1-m)$ on montre que $me\leqq f\leqq e$ donc

$$\mu^{-1} < f(x) \leqq e(x) .$$

Ceci étant vrai pour tout $\mu>1$ on a $e(x)=1$.

Ce lemme montre que $L(K)$, ensemble des points de jauge 1 est convexe compact et $A_0(K)$ est isomorphe pour l'ordre et isométrique à $A(L(K))$. On est donc ramené au problème précédent.

Remarque. En copiant la démonstration de la proposition 12 pour on couple (S,K) qui vérifie (b) on montre l'analogue de cette proposition.

On a donc le résultat analogue à la proposition 13 pour les couples convexes compacts K vérifiant (b) et où l'on remplace $A(K)$ par $A_0(K)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Alfsen, *Compact convex sets and boundary integrals*, (Ergebnisse der Mathematik 57) Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1971.
2. F. Behrendts, *Reflexivität von Räumen stetiger affiner Fonctionen*, (à paraître).
3. N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. III, Act. Sci. Ind. 1229, Hermann, Paris, 1964.
4. J. Dixmier, *Sur certains espaces considérés par M. H. Stone*, Summa Brasil Math. t.2, fasc. 11 (1951), 151–182.

5. J. Dixmier, *Sur un théorème de Banach*, Duke Math. J. 15 (1948), 1057–1071.
6. J. Lindenstrauss, *Extension of compact opérators*, Mem. Amer. Math. Soc. 48 (1964).
7. R. Phelps, *Infinite dimensional compact convex polytopes*, Math. Scand. 24 (1969), 5–26.
8. L. Asimow, *Well capped convex cones*, Pacific J. Math. 26 (1968), 421–431.

UNIVERSITE DE PARIS-SUD, ORSAY, FRANCE