MATH. SCAND. 35 (1974), 115–128

TRANSFORMATIONSEIGENSCHAFTEN ENDLICHER KETTEN UND ALLGEMEINE VERZWEIGUNGSAUSSAGEN

PAUL SARREITHER

Sei $L(\lambda)$ eine Schar linearer stetiger Operatoren zwischen zwei Banachräumen. An jeder Stelle λ des reellen oder komplexen Parameterbereiches sind sogenannte Ketten (bis zu einer von den Differenzierbarkeitseigenschaften von L abhängenden Länge) definiert. Derartige Ketten spielen eine Rolle bei der Untersuchung, bzw. Charakterisierung des Spektrums von L, ebenso wie bei der Frage nach der Vollständigkeit des Systems der Eigenvektoren von L (siehe etwa [3], [12], [9], [4]).

In dieser Arbeit wird nun zunächst gezeigt, daß sich bei einigen Transformationen der Schar $L(\lambda)$ die zugehörigen Ketten in übersichtlicher Weise mitverändern (Abschnitt 2 und 3). Gewisse mit den Ketten verknüpfte Dimensionszahlen bleiben dabei invariant; eine dieser Invarianten läßt sich als eine Verallgemeinerung algebraischer Vielfachheit interpretieren (Abschnitt 4). Diese Ergebnisse werden dann im letzten Abschnitt verwendet, um einen grundlegenden Satz über parameterabhängige nichtlineare Gleichungen (»Verzweigung von Lösungen an Eigenwerten ungerader algebraischer Vielfachheit«) auf eine erheblich weitere Klasse von Problemen zu übertragen.

1. Definitionen und Grundtatsachen.

In dieser Arbeit bezeichnet K stets den Körper R oder C, sowie U eine offene Umgebung des Punktes $\lambda_0 \in K$. Ist Z ein Banachraum über K, so heißt eine Abbildung $f\colon U \to Z$ *von der Klasse* $D_n(\lambda_0)$ $(n \geqq 1)$, wenn f stetig, $(n-1)$-mal stetig differenzierbar ist und an der Stelle λ_0 selbst eine n-te Ableitung besitzt; die Ableitungen von f an der Stelle λ_0 werden mit $f_0^{(k)}$ $(k=0,\ldots,n)$ abgekürzt. Für $K=\mathsf{C}$ und $n>1$ ist f natürlich analytisch und hat bei λ_0 Ableitungen beliebig hoher Ordnung; dennoch ist auch in diesem Fall die obige Notation für f sinnvoll, um bei der Formulierung von Voraussetzungen die tatsächlich benötigten Ableitungen anzugeben.

Eingegangen am 31. Januar, 1974.

Wenn f von der Klasse $D_n(\lambda_0)$ ist, so wird f durch das Taylorpolynom

$$f_n(\lambda) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (\lambda - \lambda_0)^k f_0^{(k)}$$

so approximiert, daß $\|f(\lambda) - f_n(\lambda)\| = o(|\lambda - \lambda_0|^n)$ für $\lambda \in K$, $\lambda \to \lambda_0$ gilt.

Seien X und Y Banachräume über K, sowie $L\colon U \to B(X, Y)$ von der Klasse $D_n(\lambda_0)$. Ein Tupel $\{u_0, \ldots, u_{r-1}\}$ von r Elementen aus X heißt *(L, λ_0)-Kette der Länge r*, wenn (i) $r \leqq n+1$, und (ii) die folgenden r Gleichungen erfüllt sind:

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} L_0^{(i)} u_{k-i} = 0 \quad (k = 0, \ldots, r-1)) . \tag{1.1}$$

Falls $u_0 \neq 0$ ist, wird die Kette *wesentlich* genannt. (Hierzu etwa [5, S. 252] oder [8, S. 563], sowie [12, S. 2]).

Einige später häufig benutzte Eigenschaften von Ketten sind direkt aus ihrer Definition abzulesen:

Jedes Anfangsstück einer (L, λ_0)-Kette ist selbst eine (entsprechend kürzere) (L, λ_0)-Kette. Durch Weglassen, bzw. Einfügen trivialer Anfangsglieder kann eine Kette verkürzt, bzw. verlängert werden (bis zur Maximallänge $n+1$). Nichttriviale Ketten existieren nur dann, wenn der Nullraum $N(L(\lambda_0)) \neq \{0\}$. Falls L bei λ_0 sogar analytisch ist, gibt es (L, λ_0)-Ketten beliebiger Länge; dagegen kann die Länge wesentlicher Ketten beschränkt sein.

(L, λ_0)-Ketten einer festen Länge r bilden in dem Banachraum $\tilde{X}_r := X \times \ldots \times X$ (r-faches Produkt) einen abgeschlossenen linearen Teilraum, dessen Dimension wir mit $\mathrm{DIM}(L, \lambda_0, r)$ bezeichnen. Gleichzeitig bilden auch die (ohne Beschränkung der Allgemeinheit r-ten) Glieder dieser (L, λ_0)-Ketten in X selbst einen abgeschlossenen linearen Teilraum der Dimension $\dim(L, \lambda_0, r)$. Es ist nicht schwer einzusehen, daß diese beiden Dimensionszahlen bezüglich r schwach monoton wachsen und zueinander in der Relation

$$\dim(L, \lambda_0, r) \leqq \mathrm{DIM}(L, \lambda_0, r) \quad (1 \leqq r \leqq n+1) \tag{1.2}$$

stehen. Beide Dimensionen sind genau dann endlich, wenn der Nullraum $N(L(\lambda_0))$ endlichdimensional ist.

Gilt für ein $r_0 \leqq n$:

$$\mathrm{DIM}(L, \lambda_0, r_0) = \mathrm{DIM}(L, \lambda_0, r_0 + 1) < \infty ,$$

kann es keine wesentlichen (L, λ_0)-Ketten der Länge $r \geqq r_0 + 1$ geben. Also ist $\mathrm{DIM}(L, \lambda_0, r) = \mathrm{DIM}(L, \lambda_0, r_0)$ — und ebenso $\dim(L, \lambda_0, r) = \dim(L, \lambda_0, r_0)$ — für alle r mit $r_0 \leqq r \leqq n+1$. Dagegen kann aus der Relation:

$\dim(L,\lambda_0,r_0) = \dim(L,\lambda_0,r_0+1)$ im allgemeinen nicht auf die Konstanz der beiden Dimensionszahlen für $r \geqq r_0$ geschlossen werden.

Die Bedeutung dieser Begriffe bei gewöhnlichen Eigenwertaufgaben ist leicht einzusehen:

Wenn $L: K \to B(X)$ durch $L(\lambda) := \lambda I_X - A$, bzw. $L(\lambda) := I_X - \lambda A$ mit $A \in B(X)$ definiert ist, sind die Glieder u_k $(k=0,\ldots,r-1)$ einer (L,λ_0)-Kette $\{u_0,\ldots,u_{r-1}\}$ Hauptvektoren zu $L(\lambda_0)$ von einer Stufe $\leqq k+1$, und von genau der Stufe $k+1$, wenn $u_0 \neq 0$.

Andererseits kann man zeigen, daß auch alle Hauptvektoren zu $L(\lambda_0)$ als Glieder einer (L,λ_0)-Kette auftreten (siehe [4, S. 84] und [11, S. 50ff.]). Daher gilt für alle natürlichen r

$$\begin{aligned} \dim(I(\cdot)-A,\lambda_0,r) &= \dim N((\lambda_0 I - A)^r) \\ \dim(I-(\cdot)A,\lambda_0,r) &= \dim N((I-\lambda_0 A)^r)\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Da außerdem aus $u_{r-1}=0$ auch $u_{r-2}=\ldots=u_1=u_0=0$ folgt, hier also Ketten bereits durch ihr »rechtes Ende« eindeutig bestimmt sind, gilt in der Relation (1.2) stets das Gleichheitszeichen.

Falls zusätzlich $\lambda_0 \neq 0$ und A als vollstetig angenommen wird, ist die Länge wesentlicher (L,λ_0)-Ketten beschränkt und gerade gleich dem Riesz'schen Index, bzw. der Ordnung des Poles, den die Resolvente $\{\lambda I - A\}^{-1}$, bzw. $\{I-\lambda A\}^{-1}$ in $\lambda=\lambda_0$ hat ([6, Kapitel III]).

2. Elementare Transformationen.

Seien X, Y, Z Banachräume über K, sowie $L: U \to B(X,Y)$ und $S: U \to B(Y,Z)$ von der Klasse $D_n(\lambda_0)$. Dann ist die Komposition $SL: U \to B(X,Z)$, die definiert wird durch $(SL)(\lambda) := S(\lambda)L(\lambda)$, ebenfalls von der Klasse $D_n(\lambda_0)$.

Satz 2.1. *Falls $S(\lambda_0)$ eine stetige Inverse auf Z besitzt, so sind die (SL,λ_0)-Ketten genau die (L,λ_0)-Ketten.*

Beweis. (Vergleiche Lemma 4.1 aus [4]). Man beachte, daß für $r \leqq n+1$ beliebige Elemente $w_0,\ldots,w_{r-1} \in X$ stets die folgenden r Gleichungen gelten:

$$\textstyle\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!}\,(SL)_0^{(i)} w_{k-i} = \sum_{l=0}^{k} S_0^{(l)} \sum_{j=0}^{k-l} \frac{1}{j!}\, L_0^{(j)} w_{k-l-j}$$

für $k=0,\ldots,r-1$.

Sei weiter $T: U \to B(Z,X)$ von der Klasse $D_n(\lambda_0)$, LT analog wie SL definiert; LT ist ebenso von der Klasse $D_n(\lambda_0)$.

SATZ 2.2. *Falls $T(\lambda_0)$ eine stetige Inverse auf X besitzt, sind die (L,λ_0)-Ketten $\{u_0,\ldots,u_{r-1}\}$ und die (LT,λ_0)-Ketten $\{v_0,\ldots,v_{r-1}\}$ jeder Länge $r\leqq n+1$ bijektiv und linear aufeinander abbildbar durch die Relationen*

$$(2.1)\qquad u_k = \textstyle\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}T_0^{(i)}v_{k-i}\quad (k=0,\ldots,r-1).$$

BEWEIS. Wenn $u_0,\ldots,u_{r-1}\in X$ und $v_0,\ldots,v_{r-1}\in Z$ durch (2.1) verknüpft, sonst aber beliebig sind, dann gilt, wie leicht zu verifizieren:

$$\textstyle\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}L_0^{(i)}u_{k-i} = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}(LT)_0^{(j)}v_{k-j}\quad (k=0,\ldots,r-1).$$

Die Zuordnung (2.1) ist linear, von Dreiecksgestalt mit Diagonalelementen $T(\lambda_0)$ und daher eindeutig umkehrbar.

Ketten lassen sich auch mittels »erzeugender Scharen« beschreiben: Wenn $\{u_0,\ldots,u_k\}$ eine (L,λ_0)-Kette ist, so besitzt die durch $u(\lambda):=\sum_{i=0}^{k}u_i(\lambda-\lambda_0)^i$ definierte Vektorschar $u\colon K\to X$ die Asymptotik

$$\|L(\lambda)u(\lambda)\| = o(|\lambda-\lambda_0|^k)\quad \text{für } \lambda\in K,\ \lambda\to\lambda_0 .$$

Ist andererseits auf einer Umgebung U_0 von λ_0 eine Vektorschar $u\colon U_0\to X$ von der Klasse $D_k(\lambda_0)$ mit dieser Asymptotik gegeben, so wird durch sie eindeutig eine (L,λ_0)-Kette der Länge $k+1$ bestimmt, deren Glieder gerade $u_i:=(i!)^{-1}u_0^{(i)}$ $(i=0,\ldots,k)$ sind.

Diese Charakterisierung läßt sich vorteilhaft verwenden, um das Verhalten von Ketten bei Parametertransformationen zu studieren:

Sei $\mu\in K$, V eine offene Umgebung von μ_0 und $\Lambda\colon V\to U$ von der Klasse $D_n(\mu_0)$ derart, daß Λ auf $\Lambda(V)$ stetig umkehrbar mit $\Lambda(\mu_0)=\lambda_0$ ist. Dann gilt:

SATZ 2.3. *Falls $\Lambda'(\mu_0)\neq 0$ ist, sind die (L,λ_0)-Ketten $\{u_0,\ldots,u_{r-1}\}$ und die $(L\cdot\Lambda,\mu_0)$-Ketten $\{v_0,\ldots,v_{r-1}\}$ jeder Länge $r\leqq n+1$ bijektiv und linear aufeinander abbildbar durch Relationen der Gestalt*

$$(2.2)\qquad v_k = \textstyle\sum_{j=0}^{k}A_{kj}u_j\quad (k=0,\ldots,r-1),$$

wobei $A_{kj}=A_{kj}(\Lambda_0',\ldots,\Lambda_0^{(k)})\in K$, speziell $A_{kk}=(\Lambda_0')^k$.

BEWEIS. 1) Sei $\{u_0,\ldots,u_{r-1}\}$ eine (L,λ_0)-Kette, $u(\lambda):=u_0+\ldots+(\lambda-\lambda_0)^{r-1}u_{r-1}$ eine zugehörige erzeugende Schar. Substituiert man auf $\Lambda(V)$ dann $\lambda=\Lambda(\mu)$, gilt wegen

$$|\Lambda(\mu)-\Lambda(\mu_0)| = |\Lambda_0'|\cdot|\mu-\mu_0|(1+o(1))\quad (\mu\to\mu_0)$$

die Asymptotik

$$\|(L\cdot\Lambda)(\mu)(u\cdot\Lambda)(\mu)\| = o(|\mu-\mu_0|^{r-1}) \quad \text{für } \mu\in K,\ \mu\to\mu_0 .$$

Also ist $(u\cdot\Lambda)\colon V\to X$ eine erzeugende Schar für die $(L\cdot\Lambda,\mu_0)$-Kette der Länge r, deren Glieder gegeben sind durch

$$v_k := \frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\mu^k}(u\cdot\Lambda)(\mu)\bigg|_{\mu=\mu_0} \qquad (k=0,\ldots,r-1)\,.$$

Die Darstellung (2.2) folgt daraus leicht (vergleiche [1, S. 37]).

2) Sei andererseits $\{v_0,\ldots,v_{r-1}\}$ eine $(L\cdot\Lambda,\mu_0)$-Kette, $v\colon V_0\subset V\to X$ eine zugehörige erzeugende Schar. Dabei kann V_0 wegen $\Lambda_0'\neq 0$ so gewählt werden, daß die Umkehrabbildung Λ^{-1} auf $\Lambda(V_0)$ von der Klasse $D_n(\lambda_0)$ ist. Teil 1 dieses Beweises, angewendet auf $(L\cdot\Lambda,\Lambda^{-1},\Lambda(V_0),\lambda_0)$ statt (L,Λ,V,μ_0), zeigt, daß $u := (v\cdot\Lambda^{-1})|\Lambda(V_0)$ eine erzeugende Schar für eine (L,λ_0)-Kette der Länge r darstellt; die Glieder dieser Kette sind gerade durch die eindeutig bestimmte Auflösung $\{u_0,\ldots,u_{r-1}\}$ von (2.2) gegeben, da auf V_0 ja $u\cdot\Lambda=v$, also ebenfalls erzeugende Schar für $\{v_0,\ldots,v_{r-1}\}$ ist.

3. Allgemeine Zuordnungen.

Für das Studium von Scharen linearer Operatoren mit polynomialer oder auch allgemein analytischer Parameterabhängigkeit sind Methoden der globalen Linearisierung bezüglich des Parameters schon von vielen Autoren benutzt worden; im Zusammenhang damit wurde auch das Verhalten von Ketten untersucht (z. B. [3, S. 255], sowie [4, Lemma 5.1] und [9, Lemma 1]).

Ein einfaches Beispiel soll den Sachverhalt illustrieren: Sei L ein Operatorpolynom vom Grade $N>1$, das wir in der Form

$$L(\lambda) := \textstyle\sum_{i=0}^{N} L_i(\lambda-\lambda_0)^i$$

mit $L_0,\ldots,L_N\in B(X,Y)$ annehmen. Die linearen Räume $\tilde X_N := X\times\ldots\times X$ (N-faches Produkt) und $\tilde Y_N := Y\times\tilde X_{N-1}$ sind in natürlicher Weise Banachräume über K. Wir definieren nun $\tilde L_0,\tilde L_1\in B(\tilde X_N,\tilde Y_N)$ als diejenigen linearen Operatoren, die $\tilde x=(x_1,\ldots,x_N)\in\tilde X_N$ auf

$$\tilde L_0\tilde x := (L_0x_1,x_2,x_3,\ldots,x_N)\,, \tag{3.1}$$

bzw.

$$\tilde L_1\tilde x := (\textstyle\sum_{i=1}^{N} L_ix_i,\ -x_1,\ -x_2,\ldots,\ -x_{N-1})$$

abbilden, und ordnen dann $L\colon K\to B(X,Y)$ eine bezüglich des Parameters $(\lambda-\lambda_0)$ linearisierte Operatorschar $\tilde L\colon K\to B(\tilde X_N,\tilde Y_N)$ durch $\tilde L(\lambda) := \tilde L_0+(\lambda-\lambda_0)\tilde L_1$ zu. Es gilt:

SATZ 3.1. *Die* $(\tilde{L},\lambda_0)$-*Ketten* $\{\tilde{u}_0,\ldots,\tilde{u}_{r-1}\}$ *und die* (L,λ_0)-*Ketten* $\{u_0,\ldots,u_{r-1}\}$ *jeder Länge r sind bijektiv und linear aufeinander abbildbar durch die Relationen*

$$(\tilde{u}_i)_j = \begin{cases} u_{i-j+1} & \textit{für } i \geqq j-1 \\ 0 & \textit{für } i < j-1 \end{cases} \tag{3.2}$$

für alle i,j *mit* $0 \leqq i \leqq r-1$ *und* $1 \leqq j \leqq N$. (*Dabei bezeichnet* $(\tilde{u}_i)_j$ *die* j-*te Komponente von* $\tilde{u}_i$).

BEWEIS. Man schreibe die Bedingungen für (L,λ_0)-Ketten und für $(\tilde{L},\lambda_0)$-Ketten unter Berücksichtigung von (3.1) explizit aus.

Tatsächlich ist eine analoge Aussage für erheblich allgemeinere Zuordnungen $L \to \tilde{L}$ gültig. Es muß sich dabei gar nicht um eine eigentliche Linearisierung bezüglich des Parameters handeln, sondern es kommt nur auf einen gewissen Zusammenhang zwischen den inhomogenen Aufgaben an:

Seien neben X und Y auch $\overline{X}$ und $\overline{Y}$, sowie damit $\tilde{X} := X \times \overline{X}$ und $\tilde{Y} := Y \times \overline{Y}$ Banachräume über K; dementsprechend schreiben wir $\tilde{x} = (x,\bar{x})$ für $\tilde{x} \in \tilde{X}$, bzw. $\tilde{f} = (f,\bar{f})$ für $\tilde{f} \in \tilde{Y}$. Einer Operatorschar $L\colon U \to B(X,Y)$ von der Klasse $D_n(\lambda_0)$ sei eine Schar $\tilde{L}\colon U \to B(\tilde{X},\tilde{Y})$ zugeordnet mit der Eigenschaft, daß für beliebiges $\tilde{f} \in \tilde{Y}$ und jedes $\lambda \in U$ die Lösung der inhomogenen Aufgabe: $\tilde{L}(\lambda)\tilde{x} = \tilde{f}$ äquivalent ist zur Lösung des Systems

$$\begin{aligned} L(\lambda)x &= F(\lambda)f + G(\lambda)\bar{f} \\ \bar{x} &= A(\lambda)x + H(\lambda)\bar{f}\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dabei sollen die Scharen $F\colon U \to B(Y)$, $G\colon U \to B(\overline{Y},Y)$, $H\colon U \to B(\overline{Y},\overline{X})$ und $A\colon U \to B(X,\overline{X})$ alle von der Klasse $D_n(\lambda_0)$ sein; F, G, H und A hängen im allgemeinen von L ab. Unter diesen Voraussetzungen gilt dann:

SATZ 3.2. *Falls* $F(\lambda_0)$ *eine stetige Inverse auf* Y *besitzt, sind die* $(\tilde{L},\lambda_0)$-*Ketten* $\{\tilde{u}_0,\ldots,\tilde{u}_{r-1}\}$ *und die* (L,λ_0)-*Ketten* $\{u_0,\ldots,u_{r-1}\}$ *jeder Länge* $r \leqq n+1$ *bijektiv und linear aufeinander abbildbar durch die Relationen*

$$\tilde{u}_k = \left(u_k, \textstyle\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} A_0^{(j)} u_{k-j}\right) \quad (k = 0,\ldots,r-1)\,. \tag{3.4}$$

BEWEIS. Falls $\tilde{u}\colon U \to \tilde{X}$ eine erzeugende Schar für eine $(\tilde{L},\lambda_0)$-Kette der Länge r bildet, genügt die erste Komponente dieser Schar $\tilde{u}(\lambda) = (u(\lambda),\bar{u}(\lambda))$ wegen (3.3) der Asymptotik

$$\|L(\lambda)u(\lambda)\| = o(|\lambda-\lambda_0|^{r-1}) \quad \text{für } \lambda \in K,\ \lambda \to \lambda_0 ,$$

und stellt daher eine erzeugende Schar einer (L,λ_0)-Kette der Länge r dar.

Wenn andererseits $u: U \to X$ eine erzeugende Schar für irgendeine (L,λ_0)-Kette der Länge r ist, dann kann man auf einer hinreichend kleinen Umgebung U_0 von λ_0 durch

$$f(\lambda) := \{F(\lambda)\}^{-1}L(\lambda)u(\lambda)$$

eine Schar $f: U_0 \to Y$ von der Klasse $D_{r-1}(\lambda_0)$ definieren. Für jede Wahl einer Abbildung $\bar{f}: U_0 \to \bar{Y}$ von der Klasse $D_{r-1}(\lambda_0)$ wird durch (3.3) eine Schar $\tilde{u}: U_0 \to \tilde{X}$ ebenfalls von dieser Klasse mit $\tilde{u}(\lambda) = (u(\lambda), \bar{u}(\lambda))$ bestimmt; es handelt sich dabei um eine erzeugende Schar für eine $(\tilde{L},\lambda_0)$-Kette der Länge r genau dann, wenn

$$\|\bar{f}(\lambda)\| = o(|\lambda-\lambda_0|^{r-1}) \quad \text{für } \lambda \in K,\ \lambda \to \lambda_0$$

gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzt man $\bar{f}(\lambda) \equiv 0$ und erhält

$$\tilde{u}(\lambda) = \big(u(\lambda), A(\lambda)u(\lambda)\big) .$$

Die explizite Gestalt (3.4) der Abbildung zwischen (L,λ_0)- und $(\tilde{L},\lambda_0)$-Ketten folgt daraus unmittelbar.

Beispiele für eine Anwendung dieses Satzes bieten die verschiedenen Arten von globaler Linearisierung bezüglich des Parameters, die wir zu Beginn dieses Abschnittes erwähnt haben; auch Satz 3.1 kann als ein Korollar zu Satz 3.2 aufgefaßt werden. Mit L sind hierbei auch F, G, H und A von polynomialer oder allgemein analytischer Parameterabhängigkeit; insbesondere gilt $F(\lambda) \equiv I_Y$ für alle $\lambda \in U$. Außerdem hängt nur G explizit von L ab.

Ein entsprechendes Beispiel für nichtanalytische Scharen L ist in ([11, Beweis zu Satz 3.4.5]) zu finden.

In allen diesen Fällen genügt die Zuordnung $L \to \tilde{L}$ nicht nur den Voraussetzungen des Satzes 3.2, sondern $F(\lambda)$ und $H(\lambda)$ besitzen sogar für alle $\lambda \in U$ stetige Inverse auf Y, bzw. $\tilde{X}$. Erst mit dieser zusätzlichen Eigenschaft bekommen derartige Zuordnungen ihre eigentliche Bedeutung: Man kann dann nämlich zeigen, daß für L und $\tilde{L}$ das Spektrum und seine verschiedenen Teile wie diskretes, kontinuierliches und auch Fredholm-Spektrum samt Indizes vollständig übereinstimmen. Für den Fall einer Linearisierung von analytischen Operatorscharen ist diese Korrespondenz der Spektren in [11, Kapitel II] ausführlich behandelt.

4. Zur Deutung der Invarianten.

Bei den verschiedenen Transformationen, die Gegenstand der Sätze in den Abschnitten 2 und 3 sind, werden den (L,λ_0)-Ketten stets bijektiv und linear gewisse Ketten der gleichen Länge zugeordnet. Daher sind die von entsprechenden Ketten gebildeten Räume zueinander isomorph, und die Dimensionszahlen $\mathrm{DIM}(L,\lambda_0,r)$ selbst Invariante.

Interessant ist vor allem der Fall, daß $\lambda_0 \in U$ eine isolierte Singularität von L, ferner $L(\lambda_0)$ Fredholmoperator (mit Index 0) ist, und zudem $L(\lambda)$ genügend oft differenzierbar von dem Parameter λ abhängt: Dann ist nämlich die Länge wesentlicher (L,λ_0)-Ketten beschränkt, und ihre maximale Länge r_0 charakterisiert das Verhalten der Resolvente $\{L(\lambda)\}^{-1}$ bei $\lambda=\lambda_0$ (siehe [12, Satz 1 und 2]); die Zahl r_0 ist aber direkt durch die Dimensionszahlen $\mathrm{DIM}(L,\lambda_0,r)$ bestimmt (vergleiche Abschnitt 1). Besondere Bedeutung hat auch die maximale Dimensionszahl

$$\max_r \mathrm{DIM}(L,\lambda_0,r);$$

bei gewöhnlichen Eigenwertaufgaben stimmt sie mit der algebraischen Vielfachheit überein — andererseits übernimmt sie, wie wir im Folgenden noch zeigen, deren Rolle bei der Erweiterung einiger klassischer Resultate auf allgemeinere Scharen linearer Operatoren. Hier zunächst

SATZ 4.1. *Sei X ein endlichdimensionaler Banachraum über K, $L\colon U \to B(X)$ von der Klasse $D_n(\lambda_0)$ $(1 \leqq n < \infty)$; die maximale Länge wesentlicher (L,λ_0)-Ketten sei n. Dann gilt*

$$\det L(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^m\, q(\lambda)\ ,$$

wobei $m=\mathrm{DIM}(L,\lambda_0,n)$ und $q\colon U \to K$ stetig mit $q(\lambda_0) \neq 0$ ist.

BEWEIS. Es genügt, die Behauptung lokal bei λ_0 zu beweisen. Wir bezeichnen mit L_n das Taylorpolynom n-ten Grades

$$L_n(\lambda) := \textstyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\, L_0^{(k)}(\lambda-\lambda_0)^k\ .$$

(L,λ_0)-Ketten und (L_n,λ_0)-Ketten bis zur Länge $n+1$ stimmen überein; also ist auch die Länge wesentlicher (L_n,λ_0)-Ketten beschränkt und gerade gleich n. Da für $\lambda \in K$, $\lambda \to \lambda_0$ die Asymptotik

$$\|L(\lambda)-L_n(\lambda)\| = o(|\lambda-\lambda_0|^n)\ ,$$

sowie nach [12, Satz 1] auch

$$\|\{L_n(\lambda)\}^{-1}\| = c|\lambda-\lambda_0|^{-n}(1+o(1))$$

mit $c > 0$ besteht, gibt es eine Umgebung U_0 von λ_0, auf der eine Darstellung

$$L(\lambda) = L_n(\lambda)\{I + F(\lambda)\}$$

mit stetigem $F: U_0 \to B(X)$ und $\|F(\lambda)\| = o(1)$ für $\lambda \to \lambda_0$ möglich ist. Daraus folgt für $\lambda \in U_0$

$$\det L(\lambda) = \det L_n(\lambda) \cdot g(\lambda) , \tag{4.1}$$

wobei $g: U_0 \to K$ stetig und $g(\lambda_0) = 1$ ist. Wir haben daher die Behauptung nur für die polynomiale Schar L_n zu zeigen.

Dazu führen wir wie in Abschnitt 3 eine Linearisierung bezüglich des Parameters $(\lambda - \lambda_0)$ durch, indem wir auf $\tilde{X}_n := X \times \ldots \times X$ (n-faches Produkt) zwei lineare Operatoren $\tilde{L}_0, \tilde{L}_1$ durch (3.1),

$$L_k := \frac{1}{k!} L_0^{(k)} \quad (k = 0, \ldots, n)$$

definieren und dann L_n die linearisierte Schar $\tilde{L}: K \to B(\tilde{X}_n)$ mit

$$\tilde{L}(\lambda) := \tilde{L}_0 + (\lambda - \lambda_0)\tilde{L}_1$$

zuordnen. Man kann leicht nachweisen, daß für alle $\lambda \in K$

$$\det L_n(\lambda) = \det \tilde{L}(\lambda) \tag{4.2}$$

gilt (elementare Determinantenumformungen). Daher ist λ_0 auch isolierte Singularität von $\tilde{L}$, und es existiert ein $\beta \in K \setminus \{0\}$, sodaß

$$\tilde{L}(\lambda) = (\tilde{L}_0 + \beta\tilde{L}_1)(\tilde{I} - \mu\tilde{L}_2)$$

mit $\tilde{L}_2 := -(\tilde{L}_0 + \beta\tilde{L}_1)^{-1}\tilde{L}_1$ und $\mu := \lambda - \lambda_0 - \beta$ geschrieben werden kann. Aus (4.2) folgt sofort

$$\det L_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m'} p(\lambda) , \tag{4.3}$$

wobei m' die algebraische Vielfachheit des charakteristischen Wertes $\mu_0 := -\beta$ von $\tilde{L}_2$ und $p: K \to K$ ein Polynom vom Grade $(n \cdot \dim X - m')$ mit $p(\lambda_0) \neq 0$ ist.

Nun hat man sich anhand der Transformationsgesetze aus den Abschnitten 2 und 3 nur noch klarzumachen, daß

$$\mathrm{DIM}(L_n, \lambda_0, r) = \mathrm{DIM}(\tilde{L}, \lambda_0, r) = \mathrm{DIM}(\tilde{I} - (\cdot)\tilde{L}_2, \mu_0, r)$$

für alle r gilt. Nach (1.3) folgt $m = m'$, und aus (4.1), (4.3) damit die Behauptung.

5. Anwendung auf Verzweigungsprobleme.

Von nun an setzen wir $K = \mathsf{R}$ und damit alle auftretenden Banachräume als reell voraus. Wir beschäftigen uns mit Aussagen über die Existenz von sogenannten Verzweigungspunkten — der kürze halber sei hier für einschlägige Definitionen, die wichtigsten Ergebnisse und Beweismethoden auf [7] verwiesen. Wir knüpfen an folgenden wohlbekannten Sachverhalt an:

Sei $T: X \to X$ ein (nichtlinearer) vollstetiger Operator mit $T(0) = 0$, der an der Stelle $x = 0$ ein (vollstetiges) Fréchetdifferential $A \in B(X)$ besitzt. Dann ist $(\lambda_0, 0) \in \mathsf{R} \times X$ ein Verzweigungspunkt für die Gleichung $x - \lambda T(x) = 0$, falls das zugehörige Fréchetdifferential

$$I_X - \lambda A \tag{5.1}$$

für $\lambda = \lambda_0$ von ungerader algebraischer Vielfachheit ist.

Zu dieser Aussage gibt es zahlreiche Verallgemeinerungen, die etwa kompliziertere Parameterabhängigkeit, teilweisen Verzicht auf Kompaktheit und ähnliches beinhalten (z. B. [7, IV § 2.6]), dabei aber weiterhin für das entsprechende Fréchetdifferential die einfache Gestalt (5.1) voraussetzen. Nun stützen sich die Beweise für diese Verzweigungsaussage auf den topologischen Abbildungsgrad (nach Leray–Schauder) und nützen im wesentlichen nur die Tatsache aus, daß sich bei ungerader algebraischer Vielfachheit von $I - \lambda_0 A$ der Index $i_{\mathrm{LS}}[I - \lambda A]$ an der Stelle $\lambda = \lambda_0$ ändert; ansonsten wird die spezielle Gestalt (5.1) des Fréchetdifferentials jedoch nicht benötigt. Man kann daher diese Einschränkung ohne weiteres lockern, wenn man bei den Voraussetzungen die algebraische Vielfachheit geeignet, d. h. so, wie es Satz 4.1 nahelegt, ersetzt:

Es sei $A : U \to B(X)$ stetig, $A(\lambda)$ für alle $\lambda \in U$ vollstetig, sowie $\lambda_0 \in U$ eine isolierte Singularität der Schar $I_X - A$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß der Leray–Schauder'sche Index $i_{\mathrm{LS}}[I - A(\lambda)]$ für alle λ mit $\lambda_0 - \delta \leqq \lambda < \lambda_0$, bzw. $\lambda_0 < \lambda \leqq \lambda_0 + \delta$ definiert und jeweils konstant ist ([7, II § 3.3]); wir schreiben dafür $i_{\mathrm{LS}}[I - A(\lambda_0 - 0)]$, bzw. $i_{\mathrm{LS}}[I - A(\lambda_0 + 0)]$. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Indizes läßt sich unter etwas schärferen Voraussetzungen folgendermaßen angeben:

SATZ 5.1. *Sei $A : U \to B(X)$ von der Klasse $D_n(\lambda_0)$ $(1 \leqq n < \infty)$, $A(\lambda)$ für alle $\lambda \in U$ vollstetig; die maximale Länge wesentlicher $(I - A, \lambda_0)$-Ketten sei n. Dann gilt mit $m := \mathrm{DIM}(I - A, \lambda_0, n)$*

$$i_{\mathrm{LS}}[I - A(\lambda_0 + 0)] = (-1)^m i_{\mathrm{LS}}[I - A(\lambda_0 - 0)] .$$

BEWEIS. Bezeichne P den zu $I - A(\lambda_0)$ gehörenden, mit $A(\lambda_0)$ vertauschbaren, endlichdimensionalen Projektionsoperator; $Q := I - P$. Für alle λ-Werte einer gewissen λ_0-Umgebung U_0 besitzt $I-QA(\lambda)$ eine stetige Inverse; nach [12, Satz 2] ist λ_0 isolierte Singularität von $I-A$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit die einzige auf U_0. Die so definierte Schar $(I-QA)^{-1}$: $U_0 \to B(X)$ ist ebenfalls von der Klasse $D_n(\lambda_0)$; der Index $i_{\mathrm{LS}}[\{I-QA(\lambda)\}^{-1}]$ ist auf ganz U_0 konstant. Es genügt daher, die Behauptung statt für $I-A(\lambda)$ für

$$\begin{aligned} I-W(\lambda) &:= \{I-A(\lambda)\}\{I-QA(\lambda)\}^{-1} \\ &= I-PA(\lambda)\{I-QA(\lambda)\}^{-1} \end{aligned}$$

zu beweisen (vergleiche [13, Theorem 3.54]).

Nun ist $I-W(\lambda)$ für alle $\lambda \in U_0 \setminus \{\lambda_0\}$ homotop zu $I-W(\lambda)P$ vermöge $I-W(\lambda)(P+tQ)$, $t \in [0,1]$; denn aus $x-W(\lambda)(P+tQ)x=0$ folgt $Qx=0$, also $\{I-W(\lambda)\}Px=0$ und somit auch $Px=0$. $I-W(\lambda)P$ läßt aber für alle $\lambda \in U_0$ die Zerlegung $X=PX \oplus QX$ invariant und stimmt auf QX mit I_X überein; daher haben wir nur den rechts-, bzw. linksseitigen LS-Index von $\{I-W(\lambda)\}|PX$ bei λ_0 zu ermitteln ([7, Kapitel II, Theorem 4.5]). Auf einem endlichdimensionalen Banachraum hängt der LS-Index jedoch in einfacher Weise mit der Determinante zusammen; wir erhalten für alle $\lambda \in U_0 \setminus \{\lambda_0\}$

$$i_{\mathrm{LS}}[I-W(\lambda)] = \operatorname{sign}\det\{(I-W(\lambda))|PX\}.$$

Andererseits sind $(I-W,\lambda_0)$-Ketten stets $(P-WP,\lambda_0)$-Ketten, da $Q\{I-W(\lambda)\} \equiv Q$ für alle $\lambda \in U_0$; so besitzt $(I-W)|PX$ bei λ_0 wesentliche Ketten der Maximallänge n mit

$$\mathrm{DIM}((I-W)|PX,\lambda_0,n) = \mathrm{DIM}(I-W,\lambda_0,n) = m.$$

Daher läßt sich Satz 4.1 anwenden: Das Vorzeichenverhalten von $\det\{(I-W(\lambda))|PX\}$ bei λ_0 wird durch den Faktor $(\lambda-\lambda_0)^m$ bestimmt. Der Index $i_{\mathrm{LS}}[I-A(\lambda)]$ ändert sich bei λ_0 also genau dann, wenn m ungerade ist.

Wie schon vorher angedeutet, liefert dieser Satz 5.1 unmittelbar eine Verallgemeinerung zu der eingangs zitierten Verzweigungsaussage. Tatsächlich tragen die Hilfsmittel dieser Arbeit aber noch erheblich weiter; wir zeigen

SATZ 5.2. *Bezeichne Ω eine offene Umgebung des Origo von X. Sei*

1) L: $U \to B(X,Y)$ *von der Klasse* $D_n(\lambda_0)$ $(1 \leqq n < \infty)$, $L(\lambda_0)$ *Fredholmoperator mit dem* (*Fredholm-*) *Index* 0; *die maximale Länge wesentlicher* (L,λ_0)-*Ketten gleich* n.

2) $M: U \times \Omega \to Y$ *vollstetig; für alle* $\lambda \in U$ *gelte*

$$\|M(\lambda,x)\| = o(\|x\|) \quad \textit{für } x \in \Omega,\ \|x\| \to 0 .$$

3) $N: U \times \Omega \to Y$ *stetig,* $N(\lambda,0)=0$ *für alle* $\lambda \in U$; N *genüge einer verschärften Lipschitzbedingung: Für alle* $\lambda \in U$ *und alle* $x_1, x_2, \in \Omega$ *mit* $\|x_1\|, \|x_2\| \leqq \varrho$ *gelte*

$$\|N(\lambda,x_1)-N(\lambda,x_2)\| \leqq c(\varrho)\|x_1-x_2\| ,$$

wobei $c(\varrho)$ *unabhängig von* λ *mit* $\lim_{\varrho\to 0} c(\varrho)=0$ *ist.*

Dann gilt: Ist $\mathrm{DIM}(L,\lambda_0,n)$ *ungerade, so ist* $(\lambda_0,0) \in U \times \Omega$ *ein Verzweigungspunkt der Gleichung*

$$L(\lambda)x+M(\lambda,x)+N(\lambda,x) = 0 . \tag{5.2}$$

Beweis. Man kann von einer Darstellung $L(\lambda)=S\{I_X-A(\lambda)\}$ ausgehen, wobei $S \in B(X,Y)$ stetig auf Y invertierbar, $A: U \to B(X)$ ebenfalls von der Klasse $D_n(\lambda_0)$ ist, und speziell $A(\lambda_0)$ vollstetig ist (Lemma aus [12]). Damit gibt es, wie beim Beweis zu Satz 5.1, einen endlichdimensionalen Projektionsoperator $P \in B(X)$, bzw. eine Projektion $Q := I_X-P$ derart, daß $I_X-QA(\lambda)$ für alle λ-Werte einer gewissen λ_0-Umgebung U_0 eine stetige Inverse auf X besitzt; ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\{I-QA(\lambda)\}^{-1}$ als gleichmäßig beschränkt bezüglich $\lambda \in U_0$ annehmen. Die durch

$$\begin{aligned} I_X-W(\lambda) &:= \{I_X-A(\lambda)\}\{I_X-QA(\lambda)\}^{-1} \\ &= I_X-PA(\lambda)\{I_X-QA(\lambda)\}^{-1} \end{aligned} \tag{5.3}$$

definierte Operatorschar $I_X-W: U_0 \to B(X)$ ist wiederum von der Klasse $D_n(\lambda_0)$; die Maximallänge wesentlicher (I_X-W,λ_0)-Ketten beträgt n, und es gilt

$$\mathrm{DIM}(L,\lambda_0,n) = \mathrm{DIM}(I_X-W,\lambda_0,n) \equiv 1 \mod 2 .$$

Für alle $\lambda \in U_0$ ist $W(\lambda)$ vollstetig; λ_0 ist isolierte Singularität von I_X-W ([12, Satz 2]). Der LS-Index von $I_X-W(\lambda)$ ist rechts- und linksseitig bei λ_0 definiert, und zwar haben wir nach Satz 5.1

$$i_{\mathrm{LS}}[I_X-W(\lambda_0+0)] \neq i_{\mathrm{LS}}[I_X-W(\lambda_0-0)] . \tag{5.4}$$

Nun wählen wir eine offene Umgebung Ω_0 von $0 \in X$ derart, daß für alle $\lambda \in U_0$ auch $\{I_X-QA(\lambda)\}^{-1}\Omega_0 \subset \Omega$ gilt. Wenn wir dann (5.2) mittels S^{-1} transformieren und $z := \{I_X-QA(\lambda)\}x$ substituieren, erhalten wir eine auf $U_0 \times \Omega_0$ äquivalente Verzweigungsaufgabe

$$z-W(\lambda)z+M_0(\lambda,z)+N_0(\lambda,z) = 0 , \tag{5.5}$$

deren Fréchetdifferential (längs $z=0$) gerade durch (5.3) gegeben ist, und wo M_0, N_0 den Voraussetzungen von M, N mit

$$(U_0, \Omega_0, X, c(\varrho) \cdot \|S^{-1}\| \cdot \max\{\|\{I_X - QA(\lambda)\}^{-1}\|;\ \lambda \in U_0\})$$

statt $(U, \Omega, Y, c(\varrho))$ genügen.

(5.5) stellt eine Verzweigungsaufgabe vom »fast vollstetigen Typ« dar, die sich bekanntlich auf den »vollstetigen Typ« zurückführen läßt: Substituiert man etwa $y = z + N_0(\lambda, z)$ und beschränkt y auf eine hinreichend kleine Nullumgebung $\Omega_1 \subset \Omega_0$, so wird dadurch $z = z(\lambda, y) \in \Omega_0$ eindeutig bestimmt, und (5.5) geht in eine auf $U_0 \times \Omega_1$ äquivalente Gleichung

$$y - W(\lambda)y + M_1(\lambda, y) = 0 \tag{5.6}$$

über; dabei ist $M_1 \colon U_0 \times \Omega_1 \to X$ vollstetig und besitzt die Asymptotik

$$\|M_1(\lambda, y)\| = o(\|y\|) \quad \text{für } \|y\| \to 0$$

(vergleiche [7, Kapitel IV § 2.6] und [11, Kapitel I § 2]). Daher sichert die Eigenschaft (5.4), wie schon zu Beginn dieses Abschnitts 5 ausgeführt, daß $(\lambda_0, 0) \in U_0 \times \Omega_1$ ein Verzweigungspunkt von (5.6) ist; offenbar ist $(\lambda_0, 0)$ dann aber auch Verzweigungspunkt der ursprünglichen Aufgabe (5.2).

Bemerkung. Verzweigungsaufgaben der in Satz 5.2 betrachteten allgemeinen Art wurden bereits in den Arbeiten [2] und [14] behandelt; insbesondere sind dort auch Fréchetdifferentiale $L(\lambda)$ mit nicht notwendig linearer Parameterabhängigkeit zugelassen. Jedoch wird zusätzlich gefordert, daß $L'(\lambda_0)x \notin L(\lambda_0)X$ für alle $x \neq 0$ aus dem Nullraum $N(L(\lambda_0))$ gilt. Wie leicht zu verifizieren (siehe [12, Abschnitt 4]), können unter dieser Voraussetzung wesentliche (L, λ_0)-Ketten höchstens die Länge $n = 1$ besitzen.

Der Beweisgang zu Satz 5.2 zeigt, daß die allgemeine Verzweigungsaufgabe wenigstens in einer kleinen Umgebung der kritischen Stelle $(\lambda_0, 0)$ zu einer der üblichen Verzweigungsaufgaben vom vollstetigen Typ äquivalent ist. Es lassen sich daher auch für die nichttrivialen Lösungen der Gleichung (5.2) einige weitere der Eigenschaften nachweisen, die im vollstetigen Fall bekannt sind; dazu zählen beispielsweise Aussagen über Stetigkeit und Zusammenhang der Verzweigungsäste (siehe [7, Kapitel IV § 1–2] und [10]).

LITERATUR

1. N. Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*, livre IV, chapitres I–III (Act. Sci. Ind. 1074), Hermann, Paris 1958.
2. M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, J. Functional Analysis 8 (1971), 321–340.
3. K.-H. Förster, *Über lineare, abgeschlossene Operatoren, die analytisch von einem Parameter abhängen*, Math. Z. 95 (1967), 251–258.
4. A. Friedman and M. Shinbrot, *Nonlinear eigenvalue problems*, Acta Math. 121 (1968), 77–125.
5. I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators* (Transl. Math. Monographs 18), Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1969.
6. T. Kato, *Perturbation theory for linear operators.* (Grundlehren Math. Wissenschaften 132), Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1966.
7. M. A. Krasnoselskij, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*, Pergamon Press, New York, 1964.
8. P. Lancaster and P. N. Webber, *Jordan chains for lambda-matrices*, Linear Algebra and Appl. 1 (1968), 563–569.
9. A. S. Markus, *The spectral theory of polynomial operator bundles in a Banach space*, Sibirian Math. J. 8 (1967), 1022–1038.
10. P. H. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Functional Analysis 7 (1971), 487–513.
11. P. Sarreither, *Verzweigungsaussagen für parameterabhängige Gleichungen mit Hilfe des Fréchetdifferentials*, Dissertation Würzburg 1971.
12. P. Sarreither, *Über das Wachstum von Resolventen in der Nähe einer isolierten Singularität*, Manuscripta Math. 11 (1974), 261–272.
13. J. T. Schwartz, *Nonlinear Functional Analysis*, Gordon and Breach Sci. Publ. New York · London · Paris, 1969.
14. D. Westreich, *Bifurcation at eigenvalues of odd multiplicity*, Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), 609–614.

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE
MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT
D-87 WÜRZBURG, AM HUBLAND
BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND