MATH. SCAND. 38 (1976), 341–349

A PROPOS D'UN PROBLEME DE KLEE SUR LA SEPARATION DE PLUSIEURS ENSEMBLES

J. BAIR

0. Introduction.

En 1968, V. Klee publia un article très intéressant où il obtient quelques théorèmes de séparation possédant des hypothèses « minimales », ce qui le conduit à la notion de théorème maximal de séparation [14]; trois ans plus tard, il nous soumit le problème suivant: « try to find separation theorems for several convex sets which, on the one hand, are maximal (in a sense somehow related to that of my paper [14]) and, on the other hand, are useful in improving some of the results of Lindenstrauss [11] ». Nous nous proposons, dans cet article, de donner quelques éléments de réponse à cette question. A cet effet, nous retenons parmi les diverses façons de séparer plusieurs ensembles (cfr. [2], [3], [5], [9], [10], [11], [12], [13] et [15]), une méthode introduite par Gale [9] et déjà exploitée à plusieurs reprises ([4], [10], [13] et [14]): dans un espace vectoriel réel quelconque, des ensembles $A_1,A_2,\ldots,A_n$ sont séparés s'il existe des demi-espaces fermés $\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_n$ incluant respectivement $A_1,A_2,\ldots,A_n$ et tels que $\bigcap_{j=1}^{n} {}^i\Sigma_j=\emptyset$; lorsque $n=2$, on retrouve bien la séparation ordinaire de deux ensembles par un hyperplan; bien entendu, on introduit tout aussi aisément les séparations stricte et forte de n ensembles. Après avoir donné les théorèmes fondamentaux de séparation simple et stricte, nous obtenons une caractérisation de la séparation forte qui permet, en corollaire, de démontrer que n ensembles fortement séparés à notre sens sont séparés au sens de Klee [12; section 3]: ainsi, parmi nos théorèmes de séparation forte, certains améliorent des résultats de Lindenstrauss. Enfin, nous généralisons, dans le cas d'une famille finie d'ensembles, un théorème de Gale–Klee [10; 2.8, pp. 388–389]; ceci permet d'affirmer que tous les théorèmes maximaux de séparation forte donnés par Klee [14; p.136] peuvent être étendus au cas de n ensembles.

Reçu Novembre 14, 1975.

1. Généralités.

Nous ne travaillerons que dans des espaces vectoriels (de dimension non nulle) sur le corps R des réels et spécifierons dans chaque énoncé les hypothèses variables auxquelles ils sont soumis.

Nous adopterons des notations qui tendent à devenir classiques et figurent dans [6]. Par ailleurs, la terminologie utilisée est ancienne et empruntée à divers auteurs. C'est ainsi que les définitions de l'*internat* ${}^iA$ d'un ensemble A, d'*ensembles proprement ouvert et algébriquement borné* sont exposées dans [6; pp. 2 et 24] et ont déjà été exploitées antérieurement ([1], [2], [3], [4], [7], [8] et [15]); les notions de *cône asymptote* C_A d'une partie A et d'*ensemble parabolique* sont introduites par Bourbaki [7; p. 125]: nous les reprenons en nous plaçant toutefois dans un espace vectoriel topologique quelconque, non nécessairement séparé; Gale et Klee ont introduit les ensembles *continus* [10; p. 379]; la notion d'*asymptote* que nous utilisons est celle de Klee [14; p. 356]; enfin, nous appellerons *vrai* tout ensemble non vide qui ne coïncide pas avec tout l'espace [15; p. 270].

Venons-en à ce que nous entendons par « séparation de n ensembles ($n \geqq 2$) ».

Des parties $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'un espace vectoriel E seront *séparées* s'il existe des demi-espaces fermés $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ tels que $\bigcap_{j=1}^n {}^i\Sigma_j = \emptyset$ et $A_j \subset \Sigma_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$; elles seront *séparées strictement* si elles sont séparées et si, de plus, $A_j \subset {}^i\Sigma_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$; enfin, elles seront *fortement séparées* si elles sont séparées et si, de plus, pour tout indice j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, A_j est *fortement contenu* dans Σ_j, en ce sens qu'il existe un demi-espace fermé Σ_j' qui est strictement inclus dans Σ_j et qui contient néanmois A_j; lorsque l'espace vectoriel E sera topologique, on exigera de plus que tous les demi-espaces considérés soient fermés pour la topologie vectorielle de l'espace. Il est clair que, lorsque n vaut 2, ces définitions redonnent respectivement les séparations ordinaire, stricte et forte de deux ensembles par un hyperplan [15; pp. 248, 249].

Enfin, nous dirons, dans un espace vectoriel (éventuellement muni d'une topologie vectorielle) de dimension au moins égale à $n-1$, que n ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont *séparés au sens de Klee* s'il existe un sous-espace vectoriel V (qui doit être fermé lorsqu'on travaille dans un espace vectoriel topologique) de codimension $n-1$ dont aucun translaté ne rencontre tous les A_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) [12].

2.

Commençons par donner les résultats fondamentaux de séparation simple et stricte de n ensembles convexes; les preuves se trouvent dans

[4; Theorem 5.6, Corollary 2] pour le cas d'un espace vectoriel, le cas d'un espace vectoriel topologique se traitant de façon analogue.

THEOREME 1. *Dans un espace vectoriel* (resp. *un espace vectoriel topologique*) E, *soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des ensembles convexes vrais d'internat* (respectivement *d'intérieur*) *non vide*; $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont séparés si* (respectivement *si et seulement si*) *l'intersection des internats* (respectivement *des intérieurs*) *des* A_j *pour* $j = 1, 2, \ldots, n$ *est vide*; *dans le cas d'un espace vectoriel, la réciproque est exacte pour autant que l'enveloppe linéaire de chaque* A_j *coïncide avec* E.

THEOREME 2. *Dans un espace vectoriel* (respectivement *un espace vectoriel topologique*) E, *soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des ensembles convexes vrais et proprement ouverts* (respectivement *convexes, vrais et ouverts*); $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont strictement séparés si et seulement si* $\bigcap_{j=1}^n A_j = \emptyset$.

3.

Voici une caractérisation de la séparation forte de n convexes qui se révélera intéressante, de même qu'un corollaire qui en découle.

THEOREME 3. *Dans un espace vectoriel* (respectivement *un espace localement convexe*) E, *si* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ *sont des convexes vrais, les quatre propositions suivantes sont équivalentes*:

(i) *les ensembles* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont fortement séparés*;

(ii) *il existe un convexe absorbant* (respectivement *un voisinage de l'origine*) U *tel que* $\bigcap_{j=1}^n (A_j + U) = \emptyset$;

(iii) *il existe un convexe absorbant* (respectivement *un voisinage de l'origine*) U *tel que* $A_1 \cap \bigcap_{j=2}^n (A_j + U) = \emptyset$;

(iv) *il existe des formes linéaires* (respectivement *des formes linéaires continues*) $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *non toutes nulles et des réels* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *tels que* $\sum_{j=1}^n f_j = 0$, $\sum_{j=0}^n \lambda_j = 0$ *et* $\sup f_j(A_j) < \lambda_j$ *pour* $j = 1, 2, \ldots, n$.

PREUVE. Nous allons encore une fois nous contenter de considérer le cas d'un espace vectoriel, car le cas d'un espace localement convexe peut être traité de façon semblable.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si un ensemble A est fortement contenu dans un demi-espace fermé Σ, il existe un convexe absorbant V tel que $A + V \subset {}^i\Sigma$. En effet, on peut écrire Σ sous la forme $\{x \in E : f(x) \leqq \alpha\}$, où $f \in E^* \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$; comme A est fortement contenu dans Σ, il existe un réel α' tel que $\sup f(A) \leqq \alpha' < \alpha$; il suffit alors de prendre pour V l'ensemble

$$f^{-1}(]\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha), \tfrac{1}{2}(\alpha - \alpha')[) \,.$$

Si les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont fortement séparés, il existe donc des demi-espaces fermés $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ et des ensembles convexes absorbants $U_1, U_2, \ldots, U_n$ tels que $A_j + U_j \subset {}^i\Sigma_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ et $\bigcap_{j=1}^n {}^i\Sigma_j = \emptyset$. Si U désigne l'ensemble convexe et absorbant $\bigcap_{j=1}^n U_j$, on a bien $\bigcap_{j=1}^n (A_j + U) = \emptyset$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Cela résulte de la conjonction du théorème 3 de [2; p. 17] et du lemme 1.4 de [3; p. 282].

(iv) $\Rightarrow$ (i) Nous pouvons supposer sans restriction que les formes linéaires $f_1, f_2, \ldots, f_r$ $(r \leqq n)$ ne sont pas nulles, qu contraire de $f_{r+1}, \ldots, f_n$. Pour tout indice k de $\{1, 2, \ldots, r\}$, le raisonnement formulé dans la première partie de cette preuve garantit l'existence d'un ensemble convexe absorbant, que l'on peut supposer sans restriction proprement ouvert, U_k tel que $\sup f_k(A_k + U_k) < \lambda_k$; pour l'ensemble convexe proprement ouvert et absorbant $U = \bigcap_{k=1}^r U_k$ [6; I.8.1., p. 28], l'ensemble vrai et proprement ouvert $A_j + U$ est inclus dans $\{x \in E : f_j(x) < \lambda_j\}$ pour tout indice j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, d'où $\bigcap_{j=1}^n (A_j + U) = \emptyset$ grâce au lemme 3.2 de [3; p. 286]. Le théorème 2 livre des demi-espaces fermés $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ tels que $A_j + U \subset {}^i\Sigma_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ et $\bigcap_{j=1}^n {}^i\Sigma_j = \emptyset$. Il reste à vérifier que si A est un ensemble non vide et U un ensemble absorbant tels que la somme $A + U$ soit contenue dans un demi-espace ouvert $\{x \in E : f(x) < \alpha\}$, l'ensemble A est fortement contenu dans le demi-espace fermé $\{x \in E : f(x) \leqq \alpha\}$. Le caractère absorbant de U exige que $f(U)$ lui-même absorbant, soit un voisinage de 0 dans l'espace R (muni de la topologie habituelle); en d'autres termes, il existe un réel positif ε tel que $\sup f(U) \geqq \varepsilon$; dans ces conditions, $\sup f(A) \leqq \alpha - \varepsilon$ et A est inclus dans le demi-espace fermé

$$\Sigma' = \{x \in E : f(x) \leqq \alpha - \varepsilon\},$$

lui-même strictement inclus dans Σ.

Corollaire 1. *Dans un espace de Banach E de dimension supérieure ou égale à $n-1$, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des convexes fortement séparés, ils sont séparés au sens de Klee.*

Preuve. Comme l'espace E est localement convexe, le théorème précédent nous garantit l'existence d'un ensemble convexe ouvert U contenant l'origine, tel que $\bigcap_{j=1}^n (A_j + U) = \emptyset$. Il suffit alors d'appliquer un résultat de Lindenstrauss [11; p. 489]: il existe un sous-espace fermé de codimension $n-1$ dont aucun translaté ne rencontre tous les $(A_j + U)$, donc a fortiori, tous les A_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Remarque. Le théorème 3 permet d'obtenir à peu de frais des critères de séparation forte de n ensembles, puisqu'il suffit de traduire les résultats de l'article [2]. Notons que la première partie du théorème 4 ainsi obtenu généralise, dans le cas d'une famille finie, un théorème de Gale selon lequel, dans R^d, des ensembles vrais $A_1, A_2, \ldots, A_n$ d'intersection vide peuvent être fortement séparés lorsque tous les A_j sont compacts [9]; par ailleurs, tous ces résultats livrent des cas particuliers de séparation au sens de Klee.

Theoreme 4. *Dans un espace localement convexe et séparé E, soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ des convexes vrais et fermés; si $\bigcap_{j=1}^n A_j = \emptyset$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ peuvent être fortement séparés pour autant qu'une des conditions suivantes soit satisfaite:*

(i) *un des ensembles A_j au moins est compact;*
(ii) *$n-1$ des ensembles A_j sont localement compacts et $\bigcap_{j=1}^n C_{A_j} = \{0\}$;*
(iii) *$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ sont localement compacts, A_n est parabolique et $\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j \neq \emptyset$;*
(iv) *$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ sont localement compacts, A_n est parabolique et l'un des ensembles A_j ne rencontre pas A_n.*

4.

Voici un énoncé qui devient très simple lorsqu'un des ensembles considéré est algébriquement borné; la portée de ce résultat est mise en évidence par le fait qu'il est aisé de construire des ensembles convexes fermés, non bornés mais algébriquement bornés.

Theoreme 5. *Dans un espace localement convexe E, soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles convexes, vrais, fermés, dont l'intersection est vide; si l'un de ces ensembles est localement compact et s'il existe un indice j de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel qu'aucune demi-droite de A_j ne soit translatée d'une demi-droite contenue dans un A_k autre que A_j, alors $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont fortement séparés.*

Preuve. Nous pouvons supposer sans restriction que l'indice j de l'énoncé coïncide avec 1 et que l'un des deux ensembles A_1, A_n est localement compact. Les hypothèses s'opposent d'ailleurs à ce que $n = 1$.

Le théorème est valable pour $n = 2$; on peut en effet appliquer un résultat de Dieudonné [8; p. 2], après avoir vérifié qu'il est valable même si l'espace E n'est pas séparé et que la séparation dont il est question est forte.

Supposons désormais $n>2$. Il existe un demi-espace fermé Σ_2 contenant fortement A_2 et disjoint de l'ensemble $B_2 = A_1 \cap \bigcap_{k=3}^n A_k$. En effet, si B_2 est vide, le résultat est immédiat; si B_2 n'est pas vide, aucune demi-droite de A_2 n'est la translatée d'une demi-droite contenue dans B_2: comme B_2 est localement compact, on peut appliquer le résultat de Dieudonné déjà cité. Par le même raisonnement, on détermine un demi-espace fermé Σ_3 contenant fortement A_3 et disjoint de

$$B_3 = A_1 \cap \Sigma_2 \cap \bigcap_{k=4}^n A_k ,$$

et ainsi de suite....

On obtient de la sorte des demi-espaces fermés $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_n$ contenant fortement $A_2, A_3, \ldots, A_n$ respectivement, tels que A_1 soit disjoint de $\bigcap_{k=2}^n \Sigma_k$; il existe un demi-espace fermé Σ_k' contenant A_k et un voisinage convexe U de l'origine tels que $\Sigma_k' + U \subset \Sigma_k$. Comme

$$A_1 \cap \bigcap_{k=2}^n (\Sigma_k' + U) = \emptyset ,$$

les ensembles $A_1, \Sigma_2', \ldots, \Sigma_n'$, donc a fortiori les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$, peuvent être fortement séparés grâce au théorème 3.

Corollaire 2. *Dans un espace localement convexe E, soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ des ensembles convexes, vrais et fermés, dont l'un au moins est localement compact et dont l'intersection est vide; si, de plus, l'un de ces ensembles A_j est algébriquement borné, les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ peuvent être fortement séparés.*

5.

En vue d'obtenir un dernier critère de séparation forte pour n ensembles, ce qui permet en corollaire d'obtenir une généralisation d'un théorème de Gale–Klee [10; 2.8, pp. 388–389], nous avons besoin de deux lemmes: le premier généralise sensiblement un exercice de Bourbaki [7; exercice 14, p. 139] et rappelle le théorème 2.9 de Klee [15; p. 259], le second est à rapprocher du résultat 1.5 de Gale–Klee [10; p. 383].

Lemme 1. *Dans un espace localement convexe E, soient A et B deux ensembles convexes, non vides, fermés, disjoints, dont l'un au moins est localement compact. Si A est de plus parabolique, A et B peuvent être fortement séparés par un hyperplan fermé.*

Preuve. Aucune demi-droite contenue dans A n'est translatée d'une demi-droite contenue dans B, sinon il existerait une demi-droite d'origine 0 telle que, pour un point arbitraire b de B,

$$D' = b + D \subset B \setminus A \quad \text{et} \quad D' \subset b + C_A ,$$

ce qui serait incompatible avec le caractère parabolique de A. Nous pouvons dès lors appliquer le résultat de Dieudonné exploité dans la preuve précédente [8; p. 2], c'est-à-dire le cas particulier du théoreme 5 pour $n=2$.

LEMME 2. *Dans un espace localement convexe E, toute intersection non vide d'un nombre fini d'ensembles paraboliques est parabolique.*

PREUVE. Considérons uniquement le cas de deux ensembles paraboliques A_1, A_2.

Supposons que $A_1 \cap A_2$ ne soit ni vide, ni parabolique. Il existe alors un point z n'appartenant pas à $A_1 \cap A_2$ et une demi-droite D d'origine 0 telle que sa translatée $z+D$ soit contenue dans $z+C_{A_1 \cap A_2}$ et ne rencontre pas $A_1 \cap A_2$; bien entendu,

$$z+D \subset z+(C_{A_1 \cap A_2}) \subset (z+C_{A_1}) \cap (z+C_{A_2}) .$$

Le point z n'appartient pas, par exemple, à A_1; $z+D$ doit donc rencentrer A_1 en un point u (distinct de z) : la demi-droite $u+D$ est incluse dans A_1 ; mais u n'appartient pas à A_2 et, même plus, $u+D$ est disjoint de A_2 puisque $z+D$ ne rencontre pas $A_1 \cap A_2$: ceci contredit le caractère parabolique de A_2.

THEOREME 6. *Dans un espace localement convexe E, soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des ensembles convexe, vrais, fermés, dont l'intersection est vide ; ces ensembles sont fortement séparés pour autant que $n-1$ d'entre eux soient paraboliques et que l'un de ces ensembles paraboliques soit localement compact.*

PREUVE. Nous pouvons supposer sans restriction que $A_2, A_3, \ldots, A_n$ sont paraboliques et que A_n est localement compact ; n peut être pris supérieur à 2 si l'on ne veut pas se retrouver sous la coupe du lemme 1.

Il existe un demi-espace fermé Σ_1 qui, contenant fortement A_1, est disjoint de $B_1 = \bigcap_{j=2}^n A_j$. En effet, c'est évident lorsque B_1 est vide ; par contre, si B_1 n'est pas vide, il est parabolique (lemme 2), localement compact et disjoint de A_1; il est donc séparé fortement de A_1 par un hyperplan fermé (lemme 1), d'où l'existence du demi-espace Σ_1 annoncé.

Désignons à présent par B_2 l'ensemble $\Sigma_1 \cap \bigcap_{j=3}^n A_j$. Si B_2 est vide, il existe évidemment un demi-espace fermé Σ_2 contenant fortement A_2 et disjoint de B_2. Si B_2 n'est pas vide, il peut être fortement séparé de A_2 par un hyperplan fermé (lemme 1), puisque A_2 est parabolique et B_2

localement compact ; ceci entraîne encore l'existence d'un demi-espace fermé Σ_2 contenant fortement A_2 et tel que

$$\bigcap_{j=1}^{2} \Sigma_j \cap \bigcap_{j=3}^{n} A_j = \emptyset .$$

En répétant cette opération pour les indices $3, 4, \ldots, n$, on aboutit au résultat escompté.

COROLLAIRE 3. *Dans* R^d, *soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *des ensembles convexes, vrais et fermés, dont l'intersection est vide* ; $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont fortement séparés pour autant que* $n-1$ *de ces ensembles soient continus.*

PREUVE. Il suffit en effet de remarquer que, dans R^d, les notions d'ensembles continu et parabolique coïncident [1; 6.2, p. 437].

6. Conclusion.

En rassemblant un résultat de Klee [13; 7, p. 361] et notre corollaire 3, on obtient l'énoncé suivant:

THEOREME 7. *Dans* R^d, *soient* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ *des ensembles convexes vrais dont l'intersection est vide* ; *chacune des deux conditions suivantes entraîne que* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sont fortement séparés*:

(a) $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ *sont continus et* A_n *est fermé* ;
(b) *aucun des* A_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ *n'admet une asymptote.*

Si n vaut deux, l'énoncé précédent ne redonne rien d'autre que le théorème 2 de Klee [14; p. 136] ; en ce sens, on peut donc affirmer que les deux conditions décrites ci-dessus représentent des théorèmes « maximaux » de séparation pour n ensembles, ce qui éclaire quelque peu la première partie du problème posé par Klee. Par ailleurs, grâce à notre corollaire 1, nos théorèmes de séparation forte donnent des cas particuliers de séparation au sens de Klee ; notamment, notre théorème 5 et notre corollaire 2 livrent des améliorations du lemme 6 de Lindenstrauss [11; p. 497], ce qui apporte par la même occasion un élément de réponse à la seconde partie du problème de Klee.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Bair, *Cônes asymptotes et cônes caractéristiques*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 40 (1971), 428–437.
2. J. Bair, *Séparation forte d'une famille finie d'ensembles convexes*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 41 (1972), 14–19.

3. J.Bair, *Sur la séparation de familles finies d'ensembles convexes*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 41 (1972), 281–291.
4. J. Bair, *About the polarity in a real linear space*, en voie de publication dans Math. Nachr.
5. J. Bair, *Séparation géométrique de familles finies d'ensembles*, en voie de publication dans J. Geometry.
6. J. Bair, et R. Fourneau, *Etude géométrique des espaces vectoriels : une introduction*, Lecture Notes in Mathematics 489, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
7. N. Bourbaki, *Eléments de mathématique, Espaces vectoriels topologiques*, Livre V, chapitres I et II, (Act. Sci. Ind. 1187), Paris, Hermann, 1966.
8. J. Dieudonné, *Sur la séparation des ensembles convexes*, Math. Ann. 163 (1966), 1–3.
9. D. Gale, *Separation theorems for families of convex sets*, Abstr. Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1956), 556.
10. D. Gale et V. Klee, *Continuous convex sets*, Math. Scand., 7 (1959), 379–391.
11. J. Lindenstrauss, *On the extension of operators with finite-dimensional range*, Illinois J. Math. 8 (1964), 488–499.
12. V. Klee, *On certain intersection properties of convex sets*, Canad. J. Math. 3 (1951), 272–275.
13. V. Klee, *Asymptotes and projections of convex sets*, Math. Scand. 8 (1960), 356–362.
14. V. Klee, *Maximal separation theorems for convex sets*, Trans. Amer. Math. Soc., 134 (1968), 133–147.
15. V. Klee, *Separation and support properties of convex sets : a survey*, in Balakrishnan, Control theory and the calculus of variations, Academic Press, New York, 1969.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE, UNIVERSITÉ DE LIÈGE, BELGIQUE