MATH. SCAND. 39 (1976), 83–90

CONTINUITE DES HOMOMORPHISMES D'UNE ALGEBRE METRISABLE ET COMPLETE SUR CERTAINES ALGEBRES DE BANACH

JEAN ESTERLE

1. Introduction, notations.

Il est bien connu (voir [6]) que tout homomorphisme d'une algèbre de Banach sur une algèbre de Banach semi-simple est continu. Sinclair et Jewell ont récemment étendu ce résultat (voir [12]) aux homomorphismes d'une algèbre de Banach sur certaines algèbre de Banach radicales, comme l'algèbre de convolution $L^1[0,1]$.

On se propose ici, grâce à une extension du lemme 2-1 de [11], d'étendre le résultat de Sinclair et Jewell aux homomorphismes d'une algèbre métrisable et complète arbitraire sur certaines algèbres de Banach semi simples ou radicales. On montrera d'autre part que la structure d'algèbre topologique métrisable et complète d'une algèbre de Banach semi-simple est unique. La méthode utilisée ici ne permet malheureusement pas d'étudier la continuité des caractères d'une algèbre de Fréchet arbitraire, problème posé par Michael dans [9] et toujours ouvert actuellement.

Les résultats obtenus sont différents de ceux obtenus par Carpenter dans [3] et par l'auteur dans [4]: Carpenter a montré dans [3] que la structure d'algèbre de Fréchet d'une algèbre commutative semi-simple est unique et j'ai montré dans [4] que la structure de Q-algèbre métrisable et complète d'une Q-algèbre de Fréchet est unique. Ici on se limite aux algèbres de Banach mais on prouve l'unicité de la structure d'algèbre métrisable et complète sans aucune hypothèse de convexité et sans aucune hypothèse topologique sur l'ensemble des éléments inversibles.

Soient X et Y deux espaces vectoriels topologiques métrisables et complets et soit S une application linéaire de X dans Y. On pose:

$$\Delta(S) = \{y \in Y : \ \inf_{x \in X} d_2(y, S(x)) + d_1(x,0) = 0\}$$

d_1 et d_2 désignant respectivement deux distances invariantes par translation définissant les topologies de X et Y. Soit Q une application continue de Y dans un espace vectoriel topologique métrisable et complet Z. Pour

Received December 23, 1975; in revised from March 16, 1976.

que QS soit continue il faut et il suffit que l'on ait: $Q[\Delta(S)]=\{0\}$. C'est bien connu pour les espaces de Banach (voir [7]) et la généralisation aux espaces vectoriels métrisables et complets est immédiate. D'autre part si T et R désignent respectivement des endomorphismes continus de X et Y vérifiant: $ST=RS$ on a: $R[\Delta(S)] \subseteq \Delta(S)$.

Enfin soit Q une application linéaire d'un espace vectoriel métrisable X dans un espace normé Y et soit d une distance invariante par translation définissant la topologie de X. Pour que Q soit continue, il faut et il suffit qui'il existe un réel positif α vérifiant:

$$\sup_{d(x,0)<\alpha}\|Q(x)\| < +\infty$$

En effet si α n'existe pas il est clair que Q est discontinue. Réciproquement si α existe soit (x_n) une suite convergeant vers 0 dans X. Pour tout entier p, la suite (px_n) converge également vers 0 dans X et on peut construire une suite strictement croissante (n_p) d'entiers telle que (px_{n_p}) converge vers 0 dans X et on a:

$$\sup_{p\in\mathbf{N}}\|Q(px_{n_p})\| < +\infty$$

d'où:

$$\lim_{p\to\infty}\|Q(x_{n_p})\| = 0 .$$

On en déduit facilement que Q transforme les suites convergeant vers 0 dans X en suites convergeant vers 0 dans Y ce qui prouve que Q est continue.

2. Continuité des homomorphismes d'une algèbre métrisable et complète arbitraire sur certaines algèbres de Banach.

Le lemme suivant généralise le lemme 2-1 de [11] (dans l'énoncé de [11]. les deux espaces considérés sont des espaces de Banach; le lemme 2-1 de [11] a été étendu dans une autre direction par K. B. Laursen dans [8]).

Lemme 1. *Soit X un espace vectoriel topologique métrisable et complet soit Y un espace de Banach, soit S une application linéaire de X dans Y et soient respectivement (T_n) et (R_n) deux suites d'endomorphismes continus de X et Y vérifiant pour tout n: $R_nS=ST_n$. Il existe un entier positif N_1 tel que pour $n>N_1$ on ait:*

$$(R_1\dots R_n[\Delta(S)])^- = (R_1\dots R_{N_1}[\Delta(S)])^-.$$

Demonstration. On a pour tout n: $R_n[\Delta(S)]\subseteq\Delta(S)$ d'où:

$$(R_1\dots R_n[\Delta(S)])^- \subseteq (R_1\dots R_{n-1}[\Delta(S)])^- .$$

Si N_1 n'existe pas on peut supposer, quitte à remplacer certaines familles finies de termes consécutifs de la suite (R_n) par leur produit, que l'inclusion ci-dessus est stricte pour tout $n \geqq 2$. Soit Q_n l'application canonique de Y sur $Y/(R_1 \dots R_n[\Delta(S)])^-$. On a:

$$Q_n R_1 \dots R_n[\Delta(S)] = \{0\} \quad \text{et} \quad Q_n R_1 \dots R_{n-1}[\Delta(S)] \neq 0$$

ce qui montre que $Q_n R_1 \dots R_n S$ est continue et $Q_n R_1 \dots R_{n-1} S$ est discontinue pour tout n.

Soit d une distance invariante par translation définissant la topologie de X et soit $n \geqq 2$. Il existe un réel positif α_n tel que l'on ait:

$$\sup_{d(x,o)<\alpha_n} \|Q_n R_1 \dots R_n S(x)\| < +\infty .$$

Posons:

$$\beta_n = \sup_{d(x,o)<\alpha_n} \|Q_n R_1 \dots R_n S(x)\| \qquad \gamma_n = [\inf_{2 \leqq i \leqq n} \alpha_i]/2^n ;$$

il existe un réel positif $\delta_n \leqq \gamma_n$ vérifiant:

$$\sup_{d(x,o)<\delta_n} [\max_{1 \leqq i \leqq n-1} d[T_i \dots T_{n-1}(x), o]] < \gamma_n .$$

On a d'autre part:

$$\sup_{d(x,o)<\delta_n} \|Q_n R_1 \dots R_{n-1} S(x)\| = +\infty$$

et on peut construire par récurrence une suite $(x_n), n \geqq 2$, d'éléments de X vérifiant: $d(x_n, o) < \delta_n (n \geqq 2)$ et:

$$\|Q_n R_1 \dots R_{n-1} S(x_n)\| \geqq n + \beta_n + \|Q_n S(\textstyle\sum_{j=2}^{n-1} T_1 \dots T_{j-1}(x_j))\| \quad (n \geqq 3) .$$

On a pour tout n et tout $j > n+1$:

$$d[T_{n+1} \dots T_{j-1}(x_j), o] < \alpha_n / 2^j$$

et par conséquent la série $\sum_{j=n+2}^{\infty} T_{n+1} \dots T_{j-1}(x_j)$ converge dans X et on a:

$$d[\textstyle\sum_{j=n+2}^{\infty} T_{n+1} \dots T_{j-1}(x_j), o] < \sum_{j=n+2}^{\infty} \gamma_j < \alpha_n / 2^{n+1}$$

d'où:

$$d[x_{n+1} + \textstyle\sum_{j=n+2}^{\infty} T_{n+1} \dots T_{j-1}(x_j), o] < \alpha_n/2^{n+1} + \alpha_n/2^{n+1} < \alpha_n .$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \|Q_n S[\textstyle\sum_{j=n+1}^{\infty} T_1 \dots T_{j-1}(x_j)]\| &= \\ &= \|Q_n S T_1 \dots T_n[x_{n+1} + \textstyle\sum_{j=n+2}^{\infty} T_{n+1} \dots T_{j-1}(x_j)]\| = \\ &= \|Q_n R_1 \dots R_n S[x_{n+1} + \textstyle\sum_{j=n+2}^{\infty} T_{n+1} \dots T_{j-1}(x_j)]\| < \beta_n . \end{aligned}$$

On voit de même que la série $\sum_{j=2}^{\infty} T_1 \dots T_{j-1}(x_j)$ converge dans X vers un élément z et on a pour $n \geqq 3$:

$$\begin{aligned}\|S(z)\| &\geqq \|Q_nS(z)\| \\ &\geqq \|Q_nST_1\ldots T_{n-1}(x_n)\| - \|\textstyle\sum_{j=2}^{n-1} Q_nST_1\ldots T_{j-1}(x_j)\| \\ &\quad - \|Q_nS[\textstyle\sum_{j=n+1}^{\infty} T_1\ldots T_{j-1}(x_j)]\| \\ &\geqq \|Q_nR_1\ldots R_{n-1}S(x_n)\| - \|\textstyle\sum_{j=2}^{n-1} Q_nST_1\ldots T_{j-1}(x_j)\| - \beta_n .\end{aligned}$$

Il vient pour $n \geqq 3$: $\|S(z)\| \geqq n$ et le lemme est démontré.

On va en déduire le:

COROLLAIRE 1. *Les hypothèses et notations étant celles du lemme* 1 *on a*:

$$(\textstyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} R_1\ldots R_n[\Delta(S)])^- = (R_1\ldots R_{N_1}[\Delta(S)])^- .$$

DEMONSTRATION. Il résulte du lemme 1 que l'on peut construire par récurrence une suite strictement croissante (N_p) d'entiers telle que, en posant:

$$U_1 = R_1\ldots R_{N_1} \text{ et pour } p>1: \; U_p = R_{N_{p-1}}\ldots R_{N_p}$$

on ait:

$$(U_p[\Delta(S)])^- = (U_p\cdot U_{p+1}[\Delta(S)])^- \quad (p \geqq 1) .$$

Quitte à multiplier les éléments de la suite (U_p) par des scalaires non nuls convenables, on peut supposer en outre que l'on a:

$$\|U_p(y)\| \leqq \|y\| \quad (p \in \mathbf{N}, y \in Y) .$$

Soit $t \in R_1\ldots R_{N_1}[\Delta(S)]$ et soit $\varepsilon>0$. On peut construire par récurrence une suite (v_p) d'éléments de $\Delta(S)$ vérifiant: $\|t-U_1\cdot U_2(v_1)\|<\varepsilon/2$ et pour $p>1$:

$$\|U_p(v_{p-1})-U_p\cdot U_{p+1}(v_p)\| < \varepsilon/2^p .$$

On a alors pour $p \geqq k+1$:

$$\|U_k\ldots U_p(v_{p-1})-U_k\ldots U_{p+1}(v_p)\| < \varepsilon/2^p .$$

Posons, pour $k \geqq 1$:

$$\omega_k = \lim_{p\to\infty} U_k\ldots U_p(v_{p-1}) .$$

On a: $\omega_k \in \Delta(S)$ et $\omega_1 = U_1\ldots U_k\omega_{k+1}$, d'où:

$$\omega_1 \in (\textstyle\bigcap_{k\in\mathbf{N}} U_1\ldots U_k[\Delta(S)])^- = (\textstyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} R_1\ldots R_n[\Delta(S)])^-$$

En outre on a: $\|t-\omega_1\|<\varepsilon$, ce qui établit le corollaire.

On a alors le théorème suivant:

THEOREME 1. *Soit A une algèbre de Banach. Si pour tout idéal bilatère fermé I de A de dimension infinie il existe une suite (b_n) d'éléments de A telle que la suite $(b_1 \dots b_n I)^-$ soit strictement décroissante, et si A ne possède aucun idéal bilatère de dimension finie non réduit à $\{0\}$, tout homomorphisme d'une algèbre métrisable et complète sur A est continu.*

DEMONSTRATION. En effet soit B une algèbre métrisable et complète et soit φ un homomorphisme de B sur A. L'ensemble $\Delta(\varphi)$ est un idéal bilatère fermé de A. Si φ était discontinu $\Delta(\varphi)$ ne serait pas réduit à $\{0\}$ et serait donc de dimension infinie. Soit (b_n) la suite introduite au théorème 1. Il existe une suite (a_n) vérifiant: $\varphi(a_n) = b_n$. On aurait alors d'après le lemme 1: $(b_1 \dots b_n \Delta(S))^- = (b_1 \dots b_{N_1} \Delta(S))^-$ pour tout n supérieur à un entier N_1 convenable ce qui est impossible.

Sinclair et Jewell montrent dans (12) que l'algèbre de convolution $L^1[0,1)$ vérifie les hypothèses du théorème 1. On a alors une généralisation du corollaire 4 de [12]:

COROLLAIRE 2. *Tout homomorphisme d'une algèbre métrisable et complète sur $L^1[0,1)$ est continu.*

Rappelons (voir [10, Chapter II, § 1]) que le socle d'une algèbre A où $\{0\}$ est le seul idéal à gauche ou à droite de carré nul est la somme des idéaux minimaux à gauche ou à droite de A si ceux ci existent.

On a le:

COROLLAIRE 3. *Soit A une algèbre de Banach semi-simple. Si A est sans socle, ou si A ne possède aucun idéal bilatère fermé de codimension finie, tout homomorphisme d'une algèbre métrisable et complète sur A est continu.*

Soit A une algèbre de Banach semi-simple et soit φ un homomorphisme d'une algèbre métrisable et complète B sur A. Sinclair et Jewell ont montré dans [12] que pour tout idéal bilatère I fermé de dimension infinie il existe une suite (b_n) d'éléments de A telle que la suite $(b_1 \dots b_n I)^-$ soit strictement décroissante. Par conséquent $\Delta(\varphi)$ est de dimension finie. Si φ est discontinue $\Delta(\varphi)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et on a:

$$\mathrm{Rad}[\Delta(\varphi)] = \mathrm{Rad} A \cap \Delta(\varphi) = \{0\}$$

(voir [5, théorème 1, p. 10]). $\Delta(\varphi)$ est donc semi-simple et il résulte du théorème de structure de Wedderburn (voir [5, p. 40]) que $\Delta(\varphi)$ possède un élément unité e qui commute avec tous les éléments de A. Posons:

$$H = \{a \in A : ae = o\}.$$

H est un idéal bilatère fermé de A et puisque e est élément unité de $\Delta(\varphi)$ on a: $H \cap \Delta(\varphi) = \{0\}$. D'autre part tout élément b de A s'écrit: $b = (b - be) + be$ et on a:

$$(b - be)e = be - be = o$$

d'où: $A = H \oplus \Delta(\varphi)$ et H est de codimension finie. En outre puisque $\Delta(\varphi)$ est de dimension finie il contient des idéaux minimaux à gauche de A et comme A ne possède aucun idéal nilpotent le socle de A est défini (voir [10, lemme 2-1-12]) ce qui achève la démonstration du corollaire.

L'algèbre des endomorphismes compacts d'un espace de Banach E possédant la propriété d'approximation a un socle partout dense, mais elle ne possède aucun idéal bilatère fermé autre que $\{0\}$ et elle même, et par conséquent elle vérifie les hypothèses du corollaire 3. On voit également que le corollaire 3 s'applique à $\mathscr{C}[0,1]$ et plus généralement à toutes les algèbres de Banach commutatives semi simples ne possédant aucun idempotent minimal. Par contre le corollaire 3 ne s'applique pas à R et C, ce qui laisse entier le problème de Michael (voir [9, Problème 1, p. 50]).

3. Unicité de la structure d'algèbre métrisable et complète de certaines algèbres de Banach.

On déduit immédiatement du corollaire 2 que la structure d'algèbre métrisable et complète de $L^1[0,1]$ est unique. On peut d'autre part obtenir dans ce domaine un résultat plus général que le corollaire 3 grâce à la remarque suivante:

Remarque 1. Soit A une algèbre de Banach, soit B l'algèbre obtenue en munissant l'algèbre sous jacente à A d'une deuxième topologie d'algèbre métrisable et complète, soit φ l'application canonique de B sur A et soit I un idéal à gauche (resp. à droite) de A. Si I est de dimension finie, on a:

$$\Delta(\varphi)\cdot I = \{0\} \quad (\text{resp. } I\cdot\Delta(\varphi) = \{0\}).$$

Supposons par exemple que I est un idéal à gauche de dimension finie de A. Soit α un élément de I, soit β un élément de $\Delta(\varphi)$ et soit d une distance invariante par translation définissant la topologie de B. Il existe une suite (β_n) d'éléments de A vérifiant:

$$\lim_{n\to\infty} d(\beta_n, o) = 0\,; \quad \lim_{n\to\infty} \|\beta - \beta_n\| = 0\,.$$

On a alors:

$$\lim_{n\to\infty} d(\alpha\beta_n, o) = 0; \quad \lim_{n\to\infty} \|\alpha\beta - \alpha\beta_n\| = 0 .$$

Comme $\alpha\beta$ et $\alpha\beta_n$ appartiennent à I et que d induit la même topologie que A sur I on a: $\alpha\beta = 0$ soit: $\Delta(\varphi)I = \{0\}$.

On a alors le:

THEOREME 2. *Soit A une algèbre de Banach semi simple. Toute topologie d'algèbre métrisable et complète définie sur A coincide avec la topologie donnée.*

DEMONSTRATION. Les notations étant les mêmes que pour la remarque 1, on voit en reprenant l'argument utilisé au corollaire 3 que $\Delta(\varphi)$ est de dimension finie. On a alors: $[\Delta(\varphi)]^2 = \{0\}$ d'où:

$$\Delta(\varphi) \subseteqq \mathrm{Rad}[\Delta(\varphi)] = \mathrm{Rad}(A) \cap \Delta(\varphi) = \{0\}$$

et le théorème 2 résulte alors du théorème du graphe fermé.

J'ignore s'il existe des algèbres de Banach commutatives topologiquement simples de dimension infinie (de telles algèbres seraient évidemment radicales). Si la réponse à ce problème, soulevé par Bonsall et Duncan dans [1], était négative, on pourrait étendre le théorème 2 à une classe assez vaste d'algebres de Banach commutatives. En effet soit A une algèbre de Banach commutative et intègre. Si l'algèbre sous jacente à A possède une deuxième topologie d'algèbre métrisable et complète distincte de la topologie donnée, on a, les notations étant les mêmes que plus haut: $\Delta(\varphi) \neq \{0\}$. D'après la remarque 1, tout idéal non nul de A est alors de dimension infinie.

Soit I un idéal fermé de A non réduit à $\{0\}$. Si A ne possédait aucun idéal fermé topologiquement simple de dimension infinie il existerait un élément non nul b de I vérifiant: $\overline{bI} \neq I$ et $\overline{bI}$ serait de dimension infinie. On pourrait alors construire par récurrence une suite (b_n) d'éléments non nuls de I vérifiant pour tout n:

$$(b_n \cdot (b_{n-1} \ldots b_1 I)^-)^- \neq (b_{n-1} \ldots b_1 I)^-$$

d'où:

$$(b_n \ldots b_1 I)^- \neq (b_{n-1} \ldots b_1 I)^- .$$

Mais ceci est impossible d'après le théorème 1 et on a donc le:

THEOREME 3. *Soit A une algèbre de Banach commutative et intègre. S'il existe sur A une topologie d'algèbre métrisable et complète distincte de la topologie donnée, A possède un idéal fermé topologiquement simple de dimension infinie.*

Je dois remercier le referee de m'avoir indiqué une erreur dans l'énoncé du Corollaire 1.

REFERENCES

1. F. F. Bonsall et J. Ducan, *Complete normed algebras* Ergebnisse Math. 80 (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973).
2. N. Bourbaki, *Topologie générale,* Chapitre 2 (Act. Sci. Ind. 1142), Hermann, Paris, 1960.
3. R. L. Carpenter, *Uniqueness of topology for commutative semi-simple* F-*algebras,* Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 113–117.
4. J. Esterle, *Unicité de certaines structures topologiques sur les algèbres semi-simples,* (à paraître).
5. N. Jacobson, *Structure of rings* (Amer. Math. Soc. Colloquium Publication 37) Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1956.
6. B. E. Johnson, *The uniqueness of the (complete) norm topology,* Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 537–539.
7. B. E. Johnson, *Continuity of homomorphisms of algebras of operators* II, J. London Math. Soc. 1 (1969), 81–84.
8. K. B. Laursen, *Some remarks about automatic continuity,* (preprint).
9. E. A. Michael, *Locally multiplicatively convex topological algebras,* Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).
10. C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras,* Van Nostrand, New-York, 1960.
11. A. M. Sinclair, *Homomorphisms from $C_0(R)$,* J. London Math. Soc. (2) 11 (1975), 165–174.
12. A. M. Sinclair et N. P. Jewell, *Epimorphisms and derivations from $L^1[0,1]$ are continuous* (preprint).

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE
LABORATOIRE ASSOCIÉ AU C.N.R.S.
351 COURS DE LA LIBÉRATION
33405 TALENCE, FRANCE