MATH. SCAND. 40 (1977), 51–68

REPRODUZIERENDE KERNE, FUNDAMENTALKERNE UND RESOLVENTENKERNE

WERNER STORK

Einleitung.

Sei $G \subseteqq \mathbf{R}^n$ ein Gebiet. Sei A ein linearer, abgeschlossener Operator in $L_2(G)$. Wir untersuchen, welche Eigenschaften des Operators A bereits durch den Definitionsbereich $D(A)$ bestimmt sind. Dazu erklären wir auf $D(A) \times D(A)$ ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle^\sim$ durch

$$\langle f, f \rangle^\sim = \langle Af, Af \rangle + \langle f, f \rangle ,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf $L_2(G) \times L_2(G)$. Unter diesem Skalarprodukt wird $D(A)$ zu einem Hilbertraum $\tilde{D}(A)$. Wenn die Einbettung von $\tilde{D}(A)$ in $L_2(G)$ kompakt ist, dann hat der Operator A einen endlich dimensionalen Nullraum $N(A)$ und für alle $\lambda \in \mathbf{C}$, für die $A - \lambda I$ stetig invertierbar ist, ist die Linksinverse $(A - \lambda I)^{-1}$ eine kompakte Abbildung von $R(A - \lambda I)$ in $L_2(G)$. Dies haben F. E. Browder und K. Maurin am Beispiel elliptischer Differentialoperatoren gezeigt ([5], [12]). Wir untersuchen in dieser Arbeit den Definitionsbereich $\tilde{D}(A)$ mittels der Theorie der reproduzierenden Kerne von N. Aronszajn ([3]).

Wir zeigen: Wenn der Hilbertraum $\tilde{D}(A)$ einen reproduzierenden Kern hat, dann ist der Nullraum $N(A)$ unter dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern und für alle $\lambda \in \mathbf{C}$, für die $A - \lambda I$ stetig invertierbar ist, ist die Linksinverse $(A - \lambda I)^{-1}$ ein Carleman-Operator mit Carleman-Kern.

Wenn der Operator A in $L_2(G)$ außerdem selbstadjungiert ist, dann ist darüberhinaus für jede beschränkte Borelmenge S die aus der Spektralschar $E(t)$ von A konstruierte Projektion $E(S)$ ein Carleman-Operator mit Carleman-Kern.

Die Begriffe Fundamentallösung und Fundamentalkern eines Differentialoperators aus der Theorie der Distributionen verallgemeinern wir auf lineare Operatoren in $L_2(G)$ und zeigen: Wenn der Definitionsbereich $\tilde{D}(A)$ eines linearen, abgeschlossenen Operators A ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern ist und $A - \lambda I$ stetig invertierbar ist, dann gibt es einen linken Fundamentalkern von $A - \lambda I$ und zu jedem $x \in G$ eine linke Fundamentallösung von $A - \lambda I$ in x.

Received December 3, 1975.

Da die Sobolev-Räume $H_m^0(G)$ für Gebiete $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und $m > n/2$ Hilberträume mit reproduzierendem Kern sind, können wir leicht ein Kriterium dafür angeben, daß der Definitionsbereich $\tilde{D}(\bar{A})$ eines abschließbaren Operators A die verlangte Voraussetzung erfüllt:

Wenn $\|f\|_m^2 \leqq C(\|Af\|^2 + \|f\|^2)$ mit $C > 0$ für alle $f \in D(A) \subseteq H_m^0(G)$ und einem $m > n/2$ gilt, dann ist $\tilde{D}(\bar{A})$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern.

Die Theorie der reproduzierenden Kerne wurde bereits von N. Aronszajn und K. T. Smith sowie S. Agmon zur Untersuchung von Operatoren in $L_2(G)$ verwendet. Von S. Agmon wurde gezeigt, daß ein auf $L_2(G)$ definierter, beschränkter, linearer Operator T, dessen Wertebereich $R(T)$ im Sobolev-Raum $H_m(G)$ liegt, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und $m > n/2$, ein Carleman-Operator mit Carleman-Kern ist ([2] Theorem 5.1). N. Aronszajn und K. T. Smith haben halbbeschränkte Operatoren A in $L_2(G)$ untersucht, indem sie auf $D(A) \times D(A)$ das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ mit $\langle f, g \rangle_A = \langle Af, g \rangle$ erklärten. Damit konnten sie hinreichende Bedingungen dafür angeben, daß ein elliptischer Differentialoperator i) eine positive Green'sche Funktion hat, ii) die Green'sche Funktion eine positiv definite Form erzeugt ([4]). Wir untersuchen ii) in den Anwendungen mit den von uns gewonnenen Ergebnissen. Weiter geben wir in den Anwendungen eine hinreichende Bedingung dafür an, daß es für einen selbstadjungierten Operator in $L_2(G)$ eine Eigenfunktionsentwicklung nach F. I. Mautner aus [13] gibt. Auf elliptische Differential- und Pseudodifferentialoperatoren angewendet bringen unsere Ergebnisse, wie wir abschließend zeigen, unter anderem einfache Beweise für bekannte Sätze über solche Operatoren.

Herrn Prof. Dr. J. Weidmann danke ich für mehrere hilfreiche Ratschläge.

1. Definitionen und Bezeichnungen.

Sei G eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Die Äquivalenzklassen auf G definierter, meßbarer, komplexwertiger Funktionen f mit $\int_G |f(x)|^2 \, dx < \infty$ bilden unter dem Skalarprodukt,

$$\langle f, g \rangle = \int_G \overline{f(x)} g(x) \, dx$$

den Hilbertraum $L_2(G)$.

Unter einem Operator A in $L_2(G)$ verstehen wir in dieser Arbeit eine lineare Abbildung A mit Definitionsbereich $D(A) \subseteq L_2(G)$ und Wertebereich $R(A) \subseteq L_2(G)$. Der Nullraum $N(A)$ ist durch

$$N(A) = \{f \in D(A) : \; Af = 0\}$$

erklärt.

Sei $F(G)$ ein linearer Teilraum von $L_2(G)$, sei $F(G)$ darüberhinaus unter einer geeigneten Topologie ein lokalkonvexer Vektorraum, dann bezeichnen wir mit $F(G)'$ den stetigen Dualraum von $F(G)$ und mit $(\cdot, \cdot)$ die Bilinearform auf $F(G)' \times F(G)$. Wenn für $x \in G$ das lineare Funktional $\tilde{x}$ mit $\tilde{x}(f) := f(x)$ auf $F(G)$ einen Sinn hat und stetig ist, dann bezeichnen wir es mit δ_x.

Das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist antilinear in der ersten Variablen. Wir können daraus eine Bilinearform machen, indem wir mit der Konjugation $J: L_2(G) \to L_2(G)$, $(Jf)(x) = \overline{f(x)}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ durch $\langle f, g \rangle_J = \langle Jf, g \rangle$ erklären. Zu einem Operator A in $L_2(G)$, dessen Definitionsbereich $D(A)$ unter einer geeigneten Topologie ein lokalkonvexer Raum ist, soll die Transponierte A^t stets bezüglich der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ gebildet werden.

Definition 1.1. Sei $G \subseteqq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $F(G) \subseteqq L_2(G)$ ein lokalkonvexer Raum, sei $\delta_x \in \mathrm{F(G)}'$ für alle $x \in G$. Sei A ein Operator in $L_2(G)$ mit $D(A) = F(G)$, sei A^t seine Transponierte.

a) Eine Abbildung $k: G \to L_2(G)$ heißt linker Fundamentalkern von A, wenn $\langle k(x), Af \rangle_J = \delta_x(f)$ für alle $x \in G$ und alle $f \in F(G)$ gilt. Das Element $k(x) \in L_2(G)$ heißt linke Fundamentallösung von A im Punkt x.

b) Eine Abbildung $h: G \to D(A^t) \subseteqq L_2(G)$ heißt rechter Fundamentalkern von A^t, wenn $(A^t h(x), f) = \delta_x(f)$ für alle $x \in G$ und alle $f \in F(G)$ gilt. Das Element $h(x) \in L_2(G)$ heißt rechte Fundamentallösung von A^t im Punkt x.

Wir geben eine Bedingung an, unter der ein linker Fundamentalkern eines Operators zugleich rechter Fundamentalkern der Transponierten ist.

Satz 1.1. *Sei $G \subseteqq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $F(G) \subseteqq L_2(G)$ ein lokalkonvexer Raum mit $\delta_x \in F(G)'$ für alle $x \in G$. Sei A ein Operator in $L_2(G)$ mit $D(A) = F(G)$, sei $A: F(G) \to L_2(G)$ schwach stetig, sei k ein linker Fundamentalkern von A, dann ist k auch ein rechter Fundamentalkern von A^t.*

Beweis. Da A als Abbildung von $F(G)$ in $L_2(G)$ schwach stetig ist, ist die Transponierte A^t auf $L_2(G)$ definiert ([14, Kap. II Satz 17]). Aus den Eigenschaften von $(\cdot, \cdot)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ und denen der Abbildung k folgt dann:

$$(A^t k(x), f) = \langle k(x), Af \rangle_J = \delta_x(f)$$

für alle $x \in G$ und alle $f \in F(G)$.

Die hier angegebene Definiton einer Fundamentallösung ist enger als die für Differentialoperatoren übliche, denn es wird verlangt, daß $k(x)$ bzw. $h(x)$ Element von $L_2(G)$ ist. Man kann deshalb eine Distribution $T_{k(x)}$ erzeugen, indem man

$$T_{k(x)}(\varphi) := \int_G k(x,y)\varphi(y)\,dy = \langle k(x), \varphi\rangle_J \qquad \text{für } \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(G)$$

definiert. Da aber über das Verhalten von k_y mit $k_y(x) := (k(x))(y)$ bei festem y nichts vorausgesetzt wird, ist die hier angegebene Definition eines Fundamentalkerns weiter als die für Differentialoperatoren übliche ([6, III-9 Déf. 9-1, Déf. 9-5]).

Wir definieren Hilberträumen mit reproduzierendem Kern ([3, S. 343]).

Definition 1.2. Sei $G \subseteqq \mathbf{R}^n$ offen. Sei $E(G)$ ein Hilbertraum von auf G definierten Funktionen, sei $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ das Skalarprodukt auf $E(G)\times E(G)$. Der Hilbertraum $E(G)$ heißt ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern, wenn es eine Abbildung $e: G \to E(G)$ gibt mit $f(x) = \langle e(x), f\rangle_E$ für alle $f \in E(G)$ und alle $x \in G$.

Wenn ein Hilbertraum einen reproduzierenden Kern hat, dann ist dieser eindeutig bestimmt ([3, (1) S. 343]).

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines reproduzierenden Kerns von $E(G)$, die wir im folgenden Abschnitt häufig verwenden werden, ist: $\delta_x \in E(G)'$ für alle $x \in G$ ([3, (2) S. 343]).

2. Reproduzierende Kerne und Fundamentalkerne.

Sei $G \subseteqq \mathbf{R}^n$ offen. Zu einem abgeschlossenen Operator A in $L_2(G)$ mit Definitionsbereich $D(A)$ erklären wir auf $D(A)\times D(A)$ ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle^\sim$ durch $\langle f,g\rangle^\sim = \langle Af, Ag\rangle + \langle f,g\rangle$. Da A abgeschlossen ist, wird der Definitionsbereich $D(A)$ unter der vom Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle^\sim$ erzeugten Topologie zu einem Hilbertraum, den wir mit $\tilde{D}(A)$ bezeichnen. Für jedes $\lambda \in \mathbf{C}$ ist der auf $D(A)$ durch $(A-\lambda I)f = Af - \lambda f$ erklärte Operator $A - \lambda I$ abgeschlossen. Die Menge der $\lambda \in \mathbf{C}$, die für alle $f \in D(A)$ einer Ungleichung $\|Af - \lambda f\| \geqq \gamma(\lambda)\|f\|$ mit $\gamma(\lambda) > 0$ genügen, nennen wir den Regularitätsbereich $\Gamma(A)$ von A. Für $\lambda \in \Gamma(A)$ ist der Operator $A - \lambda I$ injektiv und $(A-\lambda I)^{-1}$ durch $\gamma(\lambda)^{-1}$ beschränkt.

Satz 2.1. *Sei $G \subset \mathbf{R}^n$ offen. Sei A ein abgeschlossener Operator in $L_2(G)$. Sei $\tilde{D}(A)$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern, dann gilt:*

a) *Für jedes $\lambda \in \mathbf{C}$ ist der Nullraum $N(A-\lambda I)$ unter dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern.*

b) *Zu jedem $\lambda \in \Gamma(A)$ gibt es eine Abbildung $e_\lambda: G \to D(A)$ mit*

$$\langle (A-\lambda I)e_\lambda(x), (A-\lambda I)f\rangle = f(x)$$

für alle $f \in D(A)$ und alle $x \in G$.

c) *Für jedes $\lambda \in \Gamma(A)$ ist die Linksinverse $(A-\lambda I)^{-1}$ ein Integraloperator $\tilde{K}_\lambda$ mit Kern $k_\lambda(x) \in L_2(G)$,*

$$k_\lambda(x) = (A-\lambda I)e_\lambda(x) \quad \textit{und} \quad (\tilde{K}_\lambda g)(x) = \langle k_\lambda(x), g\rangle$$

für alle $x \in G$ und alle $g \in R(A-\lambda I)$.

d) *Für jedes $\lambda \in \Gamma(A)$ ist $J((A-\lambda I)e_\lambda)$ ein linker Fundamentalkern von $A-\lambda I$.*

Beweis. a). Für jedes $\lambda \in \mathbf{C}$ ist der Operator $A-\lambda I$ abgeschlossen; deshalb ist $\tilde{D}(A-\lambda I)$ ein Hilbertraum. Es gilt

$$\|(A-\lambda I)f\|^2 \leqq 2(\|Af\|^2+|\lambda|^2\|f\|^2) \leqq C(\|Af\|^2+\|f\|^2)$$

für alle $f \in D(A)$. Dann ist

$$\|(A-\lambda I)f\|^2+\|f\|^2 \leqq C_1(\|Af\|^2+\|f\|^2)$$

für alle $f \in D(A)$. Damit erzeugt die Norm von $\tilde{D}(A-\lambda I)$ auf $D(A)=D(A-\lambda I)$ dieselbe Topologie wie die Norm von $\tilde{D}(A)$ ([14, VI, § 3, Folgerung 1 zu Satz 21]). Dann ist auch $\tilde{D}(A-\lambda I)$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern. Der Nullraum $N(A-\lambda I)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\tilde{D}(A-\lambda I)$ und hat deshalb einen reproduzierenden Kern $\tilde{e}_\lambda$: $G \to N(A-\lambda I)$ mit

$$\langle (A-\lambda I)\tilde{e}_\lambda(x), (A-\lambda I)f\rangle + \langle \tilde{e}_\lambda(x), f\rangle = f(x)\,.$$

Wegen $(A-\lambda I)f=0$ für $f \in N(A-\lambda I)$ gilt $f(x)=\langle \tilde{e}_\lambda(x), f\rangle$ für alle $x \in G$ und alle $f \in N(A-\lambda I)$. Da $N(A-\lambda I)$ auch ein abgeschlossener Teilraum von $L_2(G)$ ist, folgt insgesamt die Behauptung.

b) Wir zeigen, daß der Definitionsbereich $D(A)$ unter dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_\lambda := \langle (A-\lambda I)f, (A-\lambda I)g\rangle$$

ein Hilbertraum $D(A)_\lambda$ mit reproduzierendem Kern ist. Da $A-\lambda I$ abgeschlossen ist und $\lambda \in \Gamma(A)$ gilt, ist $D(A)_\lambda$ ein Hilbertraum. Aus der ersten Ungleichung im Beweis zu a) folgt, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle_\lambda$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle^\sim$ auf $D(A)= D(A-\lambda I)$ dieselbe Topologie erzeugen. Deshalb hat $D(A)_\lambda$ einen reproduzierenden Kern.

c), d) Wir setzen $k_\lambda(x)=(A-\lambda I)e_\lambda(x)$ für jedes $x \in G$. Aus b) und Definition 1.1. a) folgen dann c) und d).

Von F. E. Browder [5, Theorem 3] und K. Maurin [12, 3. S. 366] wurden folgenden Eigenschaften des Nullraums $N(A-\lambda I)$ und der Linksinversen $(A-\lambda I)^{-1}$ nachgewiesen:

Satz 2.2. *Sei A ein abgeschlossener Operator in $L_2(G)$. Sei die Einbettung $\tilde{J}$: $\tilde{D}(A) \to L_2(G)$ kompakt bzw. nuklear bzw. eine Hilbert–Schmidt-Abbildung, dann gilt:*

a) *Für jedes* $\lambda \in \mathbf{C}$ *ist der Nullraum* $N(A-\lambda I)$ *endlich dimensional.*

b) *Für* $\lambda \in \Gamma(A)$ *ist die Linksinverse* $(A-\lambda I)^{-1}$ *eine kompakte bzw. nukleare bzw. Hilbert–Schmidt-Abbildung von* $R(A-\lambda I)$ *in* $L_2(G)$.

BEWEIS. a) Da nukleare und Hilbert–Schmidt-Abbildungen insbesondere kompakt sind, genügt es, a) im Fall einer kompakten Einbettung $\tilde{J}$ nachzuweisen.

Auf $N(A-\lambda I)$ induzieren $L_2(G)$ und $\tilde{D}(A-\lambda I)$ wegen $\|(A-\lambda I)f\|^2+\|f\|^2 =\|f\|^2$ für $f \in N(A-\lambda I)$ dieselbe Topologie. Sei $\tilde{N}(A-\lambda I)$ der Nullraum $N(A-\lambda I)$ unter der von $\tilde{D}(A-\lambda I)$ induzierten Topologie. Die Einbettung E: $\tilde{N}(A-\lambda I) \to \tilde{D}(A-\lambda I)$ ist stetig, dann ist die Einbettung $\tilde{J}\circ E$: $\tilde{N}(A-\lambda I) \to L_2(G)$ kompakt. Wir betrachten die offene Einheitskugel B_0 von $\tilde{N}(A-\lambda I)$,

$$B_0 = \{f \in N(A-\lambda I): \ \|f\|^2<1\} .$$

Das Bild $\tilde{J}\circ E(B_0)=B_0$ ist eine präkompakte Teilmenge von $L_2(G)$, da B_0 in $\tilde{N}(A-\lambda I)$ beschränkt und $\tilde{J}\circ E$ eine kompakte Abbildung ist. Da $L_2(G)$ und $\tilde{D}(A-\lambda I)$ auf $\tilde{N}(A-\lambda I)$ dieselbe Topologie induzieren, hat damit der normierte Vektorraum $\tilde{N}(A-\lambda I)$ eine präkompakte Nullumgebung. Daraus folgt, daß $N(A-\lambda I)$ endlich dimensional ist ([14, III Satz 7]).

b) Wir beweisen b) im Fall einer kompakten Einbettung $\tilde{J}$. Im Beweis zu Sats 2.1 b) haben wir bereits gezeigt, daß die identische Abbildung I: $D(A)_\lambda \to \tilde{D}(A)$ stetig ist. Daraus folgt, daß die Einbettung $\tilde{J}\circ I$: $D(A)_\lambda \to L_2(G)$ kompakt ist. Der Operator $(A-\lambda I)^{-1}$ ist eine stetige Abbildung von $R(A-\lambda I)$ auf $D(A)_\lambda$. Da $\tilde{J}\circ I$ kompakt ist, folgt daraus, daß $(A-\lambda I)^{-1}$ als Abbildung von $R(A-\lambda I)$ in $L_2(G)$ ebenfalls kompakt ist. Analog beweist man b) im Fall einer nukleraren und einer Hilbert–Schmidt-Einbettung.

Die beiden folgende Sätze sind für Anwendungen der Sätze 2.1 und 2.2 nützlich.

SATZ 2.3. *Seien A und B abgeschlossene Operatoren in* $L_2(G)$, *sei* $D(B)\subseteqq D(A)$.

a) *Wenn* $\tilde{D}(A)$ *ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern ist, dann ist auch* $\tilde{D}(B)$ *ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern. Insbesondere gelten* a), b), c) *und* d) *Satz* 2.1 *für den Operator B.*

b) *Wenn die Einbettung* $\tilde{J}_A: \tilde{D}(A) \to L_2(G)$ *kompakt bzw. nuklear bzw. eine Hilbert–Schmidt-Abbildung ist, dann ist auch* $\tilde{J}_B$: $\tilde{D}(B) \to L_2(G)$ *kompakt bzw. nuklear bzw. eine Hilbert–Schmidt-Abbildung. Insbesondere sind dann die Voraussetzungen von Satz* 2.2 *für den Operator B erfüllt.*

BWEIS. a) Es ist $\tilde{D}(B)$ ein Hilbertraum. Als Abbildung von $\tilde{D}(B)$ in $L_2(G)$ ist A

abgeschlossen. Daraus folgt nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, daß $A: \tilde{D}(B) \to L_2(G)$ stetig ist. Das bedeutet: Es gibt ein $C>0$, so daß

$$\|Af\|^2 \leqq C(\|Bf\|^2 + \|f\|^2)$$

für alle $f \in D(B)$ gilt. Daraus folgt

$$\|Af\|^2 + \|f\|^2 \leqq C_1(\|Bf\|^2 + \|f\|^2)$$

für alle $f \in D(B)$ mit einem $C_1 > 0$ gilt. Damit ist die Einbettung $J_1: \tilde{D}(B) \to \tilde{D}(A)$ stetig. Da $\tilde{D}(A)$ einen reproduzierenden Kern hat, ist $\delta_x \in \tilde{D}(A)'$ für alle $x \in G$. Aus der Stetigkeit von J_1 folgt dann $\delta_x \in \tilde{D}(B)'$ für alle $x \in G$. Damit hat $\tilde{D}(B)$ einen reproduzierenden Kern.

b) Die Einbettung J_1 ist stetig, dann hat die Einbettung $\tilde{J}_B = \tilde{J}_A \circ J_1$ dieselbe Abbildungseigenschaft wie $\tilde{J}_A$.

Satz 2.4. *Sei A ein abgeschlossener Operator in $L_2(G)$, sei B ein Operator in $L_2(G)$ mit $D(B) \supset D(A)$, sei B A-beschränkt mit A-Schranke $\gamma < 1$.*

a) *Wenn $\tilde{D}(A)$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern ist, dann ist auch $\tilde{D}(A+B)$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern. Insbesondere gelten* a), b), c) *und* d) *aus Satz* 2.1 *für den Operator $A+B$.*

b) *Wenn die Einbettung $\tilde{J}_A: \tilde{D}(A) \to L_2(G)$ kompakt bzw. nuklear bzw. eine Hilbert–Schmidt-Abbildung ist, dann ist auch $\tilde{J}_{A+B}: \tilde{D}(A+B) \to L_2(G)$ kompakt bzw. nuklear bzw. eine Hilbert–Schmidt-Abbildung.*

Beweis. Der Operator $A+B$ ist abgeschlossen, da B A-beschränkt mit A-Schranke $\gamma < 1$ ist ([15, Ch. 1 Theorem 2.9]). Wegen $D(A+B) = D(A)$ folgen a) und b) aus Satz 2.3 a) und b).

Die Einbettungssätze von S. L. Sobolev liefern hinreichende Bedingungen dafür, daß der Definitionsbereich $\tilde{D}(A)$ eines abgeschlossenen Operators A in $L_2(G)$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern ist.

Mit $\mathscr{S}(R^n)$ bezeichnen wir den lokalkonvexem Raum der rasch abnehmenden Funktionen auf $\mathbf{R}^n$, mit $\mathscr{D}(G)$ den lokalkonvexen Raum der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompakten Träger in G, mit $H_m^0(G)$ die Vervollständigung des Vektorraums $\mathscr{C}_0^\infty(G)$ der beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in G unter der Sobolev-Norm $\|\cdot\|_m$, mit $H_m(G)$ den Hilbertraum der Funktionen aus $L_2(G)$, deren Distributionsableitungen bis zur Ordnung m einschließlich Elemente von $L_2(G)$ sind, und mit $H_m(\mathbf{R}^n)$ die Vervollständigung vön $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ under der Sobolev-Norm $\|\cdot\|_m$ ([6, Chap. I.7., Chap. IV.2., Chap. V.]).

Satz 2.5. *Sei* $G \subset \mathbf{R}^n$ *offen. Sei* A *ein abschließbarer Operator in* $L_2(G)$ $(L_2(\mathbf{R}^n))$ *mit* $D(A)=\mathcal{D}(G)$ $(D(A)=\mathcal{S}(\mathbf{R}^n))$. *Sei* $\|f\|_m^2 \leqq C\|Af\|^2+\gamma\|f\|^2$ *mit* $C>0$, $\gamma \geqq 0$ *und einem* $m>n/2$ *für alle* $f \in D(A)$ *erfüllt. Sei* A *als Abbildung von* $\mathcal{D}(G)$ *in* $L_2(G)$ *(von* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ *in* $L_2(\mathbf{R}^n)$*) stetig, dann gilt für die Abschließung* $\bar{A}$:

a) *Für jedes* $\lambda \in \mathbf{C}$ *ist der Nullraum* $N(\bar{A}-\lambda I)$ *unter dem Skalarprodukt* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern.*

b) *Für jedes* $\lambda \in \Gamma(\bar{A})$ *gibt es eine Abbildung* e_λ: $G \to D(\bar{A})$ $(e_\lambda: \mathbf{R}^n \to D(\bar{A}))$ *mit*

$$\langle(\bar{A}-\lambda I)e_\lambda(x), (\bar{A}-\lambda I)f\rangle = f(x)$$

für alle $x \in G$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ *und alle* $f \in D(\bar{A})$.

c) *Für jedes* $\lambda \in \Gamma(\bar{A})$ *ist die Linksinverse* $(A-\lambda I)^{-1}$ *ein Integraloperator* $\tilde{K}_\lambda$ *mit Kern* k_λ,

$$k_\lambda(x) = (\bar{A}-\lambda I)e_\lambda(x),$$

$k_\lambda(x) \in L_2(G)$ $(k_\lambda(x) \in L_2(\mathbf{R}^n))$ *für jedes* $x \in G$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ *und*

$$(\tilde{K}_\lambda g)(x) = \langle k_\lambda(x), g\rangle$$

für jedes $x \in G$ $(x \in \mathbf{R}^n)$ *und alle* $g \in \mathbf{R}(\bar{A}-\lambda I)$.

d) *Für jedes* $\lambda \in \Gamma(\bar{A})$ *ist* $Jk_\lambda(x)$ *eine (temperierte) linke Fundamentallösung von* $A-\lambda I$ *im Punkt* x *und eine (temperierte) rechte Fundamentallösung von* $A^t-\lambda I$ *im Punkt* x.

Beweis. Wir beweisen Satz 2.5 für einen abschließbaren Operator A in $L_2(\mathbf{R}^n)$ mit $D(A)=\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, der als Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ in $L_2(\mathbf{R}^n)$ stetig ist.

Es ist $\tilde{D}(\bar{A})$ die Vervollständigung von $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ unter der Norm $\|\cdot\|^\sim$ mit $\|f\|^\sim = (\|Af\|^2+\|f\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Aus

$$\|f\|_m^2 \leqq C\|Af\|^2+\gamma\|f\|^2 \leqq \max(C,\gamma)(\|Af\|^2+\|f\|^2)$$

folgt, daß $\tilde{D}(\bar{A}) \subseteqq H_m(\mathbf{R}^n)$ gilt und die Einbettung E: $\tilde{D}(\bar{A}) \to H_m(\mathbf{R}^n)$ stetig ist. Wegen $m>n/2$ ist $\delta_x \in H_m(\mathbf{R}^n)'$ für jedes $x \in \mathbf{R}^n$ ([6, Chapitre V. Théorème 5-3]). Da E stetig ist, gilt dann auch $\delta_x \in \tilde{D}(\bar{A})'$ für jedes $x \in \mathbf{R}^n$. Daraus folgt, daß $\tilde{D}(\bar{A})$ einen reproduzierenden Kern hat. Aus Satz 2.1 folgen damit a), b) und c). Mit A ist auch $A-\lambda I$ als Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ in $L_2(\mathbf{R}^n)$ stetig. Dann ist $A-\lambda I$ auch schwach stetig ([14, Kap. II Satz 18]). Aus Satz 2.1 c) und Satz 1.1 folgt, daß $k_\lambda(x)$ linke Fundamentallösung von $A-\lambda I$ und rechte Fundamentallösung von $A^t-\lambda I$ im Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ ist. Wegen $L_2(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)'$ und $k_\lambda(x) \in L_2(\mathbf{R}^n)$ ist es eine temperierte Fundamentallösung. Damit ist auch d) gezeigt.

Analog Satz 2.5 beweist man den folgenden Satz, indem man $\delta_x \in H_m(G)'$ beachtet.

SATZ 2.6. *Sei* $G \subseteqq \mathrm{R}^n$ *offen. Sei* A *ein abschließbarer Operator in* $L_2(G)$, *sei* $D(A) \subseteqq H_m(G)$, *sei* $\|f\|_m^2 \leqq C\|Af\|^2 + \gamma\|f\|^2$ *mit* $C>0$, $\gamma \geqq 0$ *und einem* $m>n/2$ *für alle* $f \in D(A)$ *erfüllt, dann gelten* a), b), c) *und* d) *aus Satz* 2.1 *für die Abschließung* $\bar{A}$.

Wir untersuchen die Kerne aus den vorhergehenden Sätzen mit Hilfe der Theorie der Carleman-Operatoren aus [17]. Sei $G \subseteqq \mathrm{R}^n$ offen. Ein Operator A in $L_2(G)$ heißt ein Carleman-Operator, wenn eine auf G definierte, meßbare Funktion k mit Werten in $L_2(G)$ existiert, so daß gilt:

$$\begin{aligned} D(A) &\subseteqq D_k \\ &:= \{f \in L_2(G) : \text{ Es ist } g \text{ mit } g(x) = \langle k(x), f\rangle \text{ ein Element von } L_2(G)\} \end{aligned}$$

und $(Af)(x) = \langle k(x), f\rangle$ für fast alle $x \in G$ und alle $f \in D(A)$ ([17, 2.1 Definiton]). Zu einem solchen Carleman-Operator A gibt es eine auf $G \times G$ definierte, meßbare Funktion K, so daß

$$\int_G |K(x,y)|^2\, dy \leqq \|k(x)\|^2$$

für alle $x \in G$ gilt und der Operator A eine Einschränkung des von K erzeugten Integraloperators ist, d.h.:

$$D(A) \subseteqq \left\{ f \in L_2(G) : \int_G \left| \int_G \overline{K(x,y)} f(y)\, dy \right|^2 dx < \infty \right\}$$

und

$$(Af)(x) = \int_G \overline{K(x,y)} f(y)\, dy$$

für fast alle $x \in G$ und alle $f \in D(A)$. Die Funktion K heißt dann Carleman-Kern von A ([17, 5. S. 21]).

SATZ 2.7. *Sei* A *ein abgeschlossener Operator in* $L_2(G)$, *sei* $\tilde{D}(A)$ *ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern, dann ist für jedes* $\lambda \in \Gamma(A)$ *die Linksinverse* $(A-\lambda I)^{-1}$ *ein Carleman-Operator mit Carleman-Kern.*

BEWEIS. Wenn für jede Nullfolge $(f_n)_n \subset D((A-\lambda I)^{-1}) = R(A-\lambda I)$ gilt:

$$((A-\lambda I)^{-1} f_n)(x) \to 0 \quad \text{für fast alle } x \in G\,,$$

dann ist $(A-\lambda I)^{-1}$ ein Carleman-Operator ([17, 2.12 Satz]).

Sei also $(f_n)_n \subseteqq R(A-\lambda I)$ eine Nullfolge, dann gilt nach Satz 2.2 b) für jedes $x \in G$:

$$|((A-\lambda I)^{-1} f_n)(x)| = |\langle k_\lambda(x), f_n \rangle| \leqq \|k_\lambda(x)\| \, \|f_n\| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty .$$

Also ist $(A-\lambda I)^{-1}$ ein Carleman-Operator. Da $(A-\lambda I)^{-1}$ ein Operator in $L_2(G)$ ist, hat $(A-\lambda I)^{-1}$ einem Carleman-Kern ([17, 5. S. 21]).

Satz 2.8. *Sei A ein dicht definierter, abgeschlossener Operator in $L_2(G)$, sei A^* seine Adjungierte, seien $\tilde{D}(A)$ und $\tilde{D}(A^*)$ Hilberträume mit reproduzierenden Kernen, dann gelten* a), b), c) *und* d) *aus Satz* 2.1 *für die Operatoren A und A^* und darüberhinaus*

e) *Für jedes $\lambda \in \Gamma(A)$ mit $R(A-\lambda I)=L_2(G)$ und $\lambda^* \in \Gamma(A^*)$ ist die Linksinverse $(A^*-\lambda^* I)^{-1}$ ein Carleman-Operator, dessen Carleman-Kern K_{λ^*} der adjungierte Kern K_λ^+ des Carleman-Kerns K_λ von $(A-\lambda I)^{-1}$ ist.*

Beweis. Es ist nur e) zu zeigen. Nach Satz 2.7 ist die Linksinverse $(A^*-\lambda^* I)^{-1}$ ein Carleman-Operator mit Carleman-Kern K_{λ^*} und die Linksinverse $(A-\lambda I)^{-1}$ ein Carleman-Operator mit Carleman-Kern K_λ.

Da $D(A)=D(A-\lambda I)$ dicht, $R(A-\lambda I)=L_2(G)$ und $(A-\lambda I)^{-1}$ beschränkt ist, gilt

$$((A-\lambda I)^{-1})^* = ((A-\lambda I)^*)^{-1}$$

([11, III Theorem 5.30]). Da λI ein beschränkter Operator auf $L_2(G)$ ist, gilt $(A-\lambda I)^* = A^* - \lambda^* I$. Daraus folgt

$$((A-\lambda I)^{-1})^* = (A^*-\lambda^* I)^{-1} .$$

Da $(A^*-\lambda^* I)^{-1}$ ein Carleman-Operator ist, folgt insgesamt $K_{\lambda^*}=K_\lambda^+$ ([17 5.2 Satz]).

3. Reproduzierende Kerne und Resolventenkerne.

Wir wenden die Ergebnisse aus Abschnitt 2 auf selbstadjungierte Operatoren in $L_2(G)$ an.

Mit $\varrho(A)$ bezeichnen wir die Resolventenmenge eines selbstadjungierten Operators A. Dies sind alle $\lambda \in \mathbf{C}$, für die der Operator $(A-\lambda I)^{-1}$ auf $L_2(G)$ definiert und beschränkt ist. Für $\lambda \in \varrho(A)$ nennen wir $(A-\lambda I)^{-1}$ die Resolvente $R(\lambda, A)$ von A im Punkt λ. Mit $E(t)$, $t \in \mathbf{R}$ bezeichnen wir die Spektralschar von A.

Satz 3.1. *Sei A ein selbstadjungierter Operator in $L_2(G)$ sei $\tilde{D}(A)$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern, dann gilt:*

a) *Für jedes* $\lambda \in \mathbf{C}$ *is der Nullraum* $N(A-\lambda I)$ *unter dem Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern.*

b) *Zu jedem* $\lambda \in \varrho(A)$ *gibt es eine Abbildung* $e_\lambda : G \to D(A)$ *mit*

$$\langle (A-\lambda I)e_\lambda(x), (A-\lambda I)f \rangle = f(x)$$

für alle $x \in G$ *und alle* $f \in D(A)$.

c) *Für jedes* $\lambda \in \varrho(A)$ *ist die Resolvente* $R(\lambda, A)$ *ein Carleman-Operator mit Carleman-Kern* K_λ.

d) *Für jedes* $\lambda^* \in \varrho(A)$ *ist der Carleman-Kern* K_{λ^*} *von* $R(\lambda^*, A)$ *der adjungierte Kern* K_λ^+ *des Carleman-Kerns* K_λ *von* $R(\lambda, A)$.

e) *Für jedes* $\lambda \in \varrho(A)$ *ist* Jk_λ *mit* $k_\lambda(x) = (A-\lambda I)e_\lambda(x)$ *ein linker Fundamentalkern von* $A - \lambda I$.

f) *Für* $\lambda, \mu \in \varrho(A)$ *ist* $K_\mu(x) = (A-\lambda^* I)R(\mu^*, A)K_\lambda(x)$ *für fast alle* x.

g) *Für jede beschränkte Borelmenge* $S \subset R$ *ist die Projektion* $E(S)$ *ein Carleman-Operator mit Carleman-Kern* K_S,

$$K_S(x) = (A-\lambda^* I)E(S)K_\lambda(x)$$

für fast alle $x \in G$, $\lambda \in \varrho(A)$.

Beweis. Wegen $\varrho(A) \subseteq \Gamma(A)$ folgen a), b) und e) aus Satz 2.1 und c) und d) aus Satz 2.7 und Satz 2.8. Es bleiben f) und g) zu zeigen.

f) Wegen $\int_G |K_\lambda(x,y)|^2 \, dy \leqq \|k_\lambda(x)\|^2 < \infty$ für alle $x \in G$ ist

$$K_\lambda(x) \in L_2(G) = R(A-\lambda I) \qquad \text{für alle } x \in G\,.$$

Es ist $D(A^2) := \{f \in D(A) : Af \in D(A)\}$ dicht in $L_2(G)$, da A selbstadjungiert ist. Für alle $\lambda \in \varrho(A)$ und alle $g \in L_2(G)$ gilt $\langle K_\lambda(x), g \rangle = \langle k_\lambda(x), g \rangle$ für fast alle $x \in G$. Sei $f \in D(A^2)$, dann folgt daraus:

$$\begin{aligned}
&\langle (A-\lambda^* I)(A-\mu^* I)^{-1} K_\lambda(x), (A-\mu I)f \rangle \\
&\quad = \langle (A-\lambda^* I)(A-\mu^* I)^{-1} k_\lambda(x), (A-\mu I)f \rangle \\
&\quad = \langle (A-\mu^* I)^{-1} k_\lambda(x), (A-\mu I)(A-\lambda I)f \rangle \\
&\quad = \langle k_\lambda(x), (A-\lambda I)f \rangle = f(x) = \langle k_\mu(x), (A-\mu I)f \rangle \\
&\quad = \langle K_\mu(x), (A-\mu I)f \rangle
\end{aligned}$$

für fast alle $x \in G$.

Sei nun $f \in D(A)$. Sei $S_n = (-n, n] \subseteq \mathbf{R}$, dann konvergiert die Folge $(f_n)_n$ mit $f_n := E(S_n)f$ im Hilbertraum $D(A)_\lambda$ gegen f. Außerdem ist $f_n \in D(A^2)$ für jedes n. Da $D(A)_\lambda$, wie im Beweis von Satz 2.1 gezeigt wurde, ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern ist, folgt dann, daß $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in G$ gilt ([3, (5) S. 344]). Aus

$$\langle (A-\lambda^* I)(A-\mu^* I)^{-1} k_\lambda(x), (A-\mu I) f_n\rangle = f_n(x) = \langle k_\mu(x), (A-\mu I) f_n\rangle$$

folgt dann zunächst

$$\langle (A-\lambda^* I)(A-\mu^* I)^{-1} k_\lambda(x), (A-\mu I) f\rangle = \langle k_\mu(x), (A-\mu I) f\rangle$$

für alle $x \in G$ und dann

$$\langle K_\mu(x), (A-\mu I) f\rangle = \langle (A-\lambda^* I)(A-\mu^* I)^{-1} K_\lambda(x), (A-\mu I) f\rangle$$

für fast alle $x \in G$. Da $R(A-\mu I)=L_2(G)$ ist, folgt daraus die Behauptung.

g) Für jedes $g \in L_2(G)$ ist $E(S)g \in D(A)$, da die Borelmenge S beschränkt ist. Dann gilt insbesondere $E(S)k_\lambda(x) \in D(A)$ und $E(S)K_\lambda(x) \in D(A)$ für alle $x \in G$ und alle $\lambda \in \varrho(A)$. Da die Spektralschar $E(t)$ mit A vertauschbar und $E(S)$ selbstadjungiert ist, folgt daraus

$$\begin{aligned}(E(S)f)(x) &= \langle k_\lambda(x), (A-\lambda I)E(S)f\rangle \\ &= \langle E(S)k_\lambda(x), (A-\lambda I)f\rangle = \langle (A-\lambda^* I)E(S)k_\lambda(x), f\rangle\end{aligned}$$

für alle $f \in D(A)$, alle $x \in G$ und alle $\lambda \in \varrho(\mathrm{A})$.

Wir zeigen nun, daß diese Gleichung für alle $g \in L_2(G)$ und fast alle $x \in G$ gilt.

Da $D(A)$ dicht in $L_2(G)$ ist, gibt es zu $g \in L_2(G)$ eine Folge $(f_n)_n \subset D(A)$, die in $L_2(G)$ gegen g konvergiert. Dann konvergiert $E(S)f_n$ in $L_2(G)$ gegen $E(S)g$. Daraus folgt einerseits, daß es eine Teilfolge $(f_{\tilde{n}})_n$ von $(f_n)_n$ gibt, so daß für fast alle $x \in G$

$$(E(S)f_{\tilde{n}})(x) \to (E(S)g)(x)$$

gilt ([8, Proof of Theorem 3.11]), andererseits, daß

$$\langle (A-\lambda^* I)E(S)k_\lambda(x), f_n\rangle \to \langle (A-\lambda^* I)E(S)k_\lambda(x), g\rangle$$

für alle $x \in G$ gilt. Wegen

$$\langle (A-\lambda^* I)E(S)k_\lambda(x), f_{\tilde{n}}\rangle \to \langle (A-\lambda^* I)E(S)k_\lambda(x), g\rangle$$

folgt dann insgesamt:

$$(E(S)g)(x) = \langle (A-\lambda^* I)E(S)k_\lambda(x), g\rangle$$

für jedes $g \in L_2(G)$ und fast alle $x \in G$. Daraus folgt

$$(E(S)g)(x) = \langle (A-\lambda^* I)E(S)K_\lambda(x), g\rangle$$

für jedes $g \in L_2(G)$ und fast alle $x \in G$. Für eine Nullfolge $(g_n)_n$ in $L_2(G)$ gilt nach dem bisher gezeigten $(E(S)g_n)(x) \to 0$ für fast alle $x \in G$. Damit ist $E(S)$ ein Carlemanoperator ([17, 2.12 Satz]), für dessen Carleman-Kern K_S gilt:

$$K_S(x) = (A-\lambda^* I)E(S)K_\lambda(x) \quad \text{für fast alle } x\,.$$

Aus Satz 2.3 und Satz 3.1 folgt

SATZ 3.2. *Sei A ein symmetrischer Operator in $L_2(G)$, der eine selbstadjungierte Fortsetzung zuläßt. Sei $\tilde{D}(A^*)$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern, dann gelten für jede selbstadjungierte Fortsetzung A' von A die Aussagen* a)–g) *aus Satz* 3.1.

4. Anwendungen.

Indem wir unsere bisherigen Ergebnisse auf das in der Einleitung angeführte Problem von N. Aronszajn und K. T. Smith aus [4] anwenden, erhalten wir

SATZ 4.1. *Sei A ein abgeschlossener Operator in $L_2(G)$ mit $\langle Af, f\rangle \geqq \gamma \|f\|^2$ für alle $f \in D(A)$ und $\gamma > 0$, sei $\tilde{D}(A)$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern, dann ist die Linksinverse A^{-1} ein Carleman-Operator mit positiv definitem Carleman-Kern K_0.*

BEWEIS. Aus $\langle Af, f\rangle \geqq \gamma\|f\|^2$ folgt $\|Af\| \geqq \gamma\|f\|$. Also gilt $0 \in \Gamma(A)$. Nach Satz 2.7 ist dann die Linksinverse A^{-1} ein Carleman-Operator mit Carleman-Kern K_0. Sei $g \in R(A)$, $g = Af$. Dann ist

$$\begin{aligned}\iint_{G\times G} K_0(x,y)\overline{g(y)}\,g(x)\,dy\,dx &= \int_G \langle K_0(x), g\rangle^* g(x)\,dx \\ &= \langle A^{-1}g, g\rangle = \langle f, Af\rangle \geqq \gamma\|f\|^2 > 0\,.\end{aligned}$$

Damit ist der Carleman-Kern K_0 positiv definit.

Von F. I. Mautner wurde in [13] eine Entwicklung nach verallgemeinerten Eigenfunktionen angegeben. Zur präzisen Formulierung des Problems sei auf die Originalarbeit verwiesen; wir werden im folgenden eine solche Entwicklung als Eigenfunktionsentwicklung nach Mautner bezeichnen. Wenn A ein selbstadjungierter Operator in $L_2(G)$ ist und $(A-\lambda I)^{-1}$ für ein $\lambda \in \varrho(A)$ ein Carleman-Operator mit Carleman-Kern ist, dann gibt es eine Eigenfunktionsentwicklung nach Mautner ([13, S. 51]). Aus dieser hinreichenden Bedingung und Satz 3.1 folgt

SATZ 4.2. *Sei A ein selbstadjungierter Operator in $L_2(G)$, sei $\tilde{D}(A)$ ein Hilbertraum mit reproduzierendem Kern, dann gibt es eine Eigenfunktionsentwicklung nach Mautner.*

Wir untersuchen partielle Differentialoperatoren mit Hilfe der Ergebnisse aus den Abschnitten 2 und 3.

Wir verwenden die übliche Multiindexnotation, wie sie z. B. in [15, Chapter 3] angegeben ist. Zur Definition der in den Voraussetzungen angeführten Begriffe sei im folgenden jeweils auf die im Beweis zitierten Arbeiten verwiesen.

SATZ 4.3. *Sei* $p(D)=\sum_{|\mu|\leqq m} a_\mu D^\mu$ *ein elliptischer Differentialausdruck mit konstanten Koeffizienten* a_μ. *Sei* $\mu=(\mu_1,\dots\mu_n)$ *mit* $n/2<m$. *Sei der Operator* P_0 *in* $L_2(\mathsf{R}^n)$ *definiert durch* $D(P_0)=\mathscr{S}(\mathsf{R}^n)$ *und* $P_0f=p(D)f$ *für* $f\in\mathscr{S}(\mathsf{R}^n)$.

Dann sind für den Operator P_0 *die Voraussetzungen von Satz* 2.5 *und für die Abschließung* $\overline{P_0}$ *die Voraussetzungen von Satz* 2.8 *erfüllt.*

BEWEIS. Da $p(D)$ konstante Koeffizienten hat, ist der adjungierte Operator P_0^* eine Fortsetzung des dicht definierten Operators Q_0 mit $D(Q_0)=\mathscr{S}(\mathsf{R}^n)$ und $Q_0f=q(D)f$ für $f\in\mathscr{S}(\mathsf{R}^n)$, $q(D)=\sum_{|\mu|\leqq m}\overline{a_\mu}D^\mu$ ([15, Chapter 3 (28)]). Daraus folgt, daß der Operator P_0 abschließbar ist.

Da $p(D)$ elliptisch ist, gilt $\|f\|_m^2\leqq C(\|P_0f\|^2+\|f\|^2)$ für $f\in S(\mathsf{R}^n)$ ([15, Chapter 3 Theorem 3.1]).

Die Topologie des lokalkonvexen Raums $\mathscr{S}(\mathsf{R}^n)$ wird durch die Halbnormen $p_{l,k}$, $l,k\in\mathsf{N}_0$ erzeugt; $p_{l,k}(f)=\|M_lf\|_k$ mit einem Polynomgewicht M_l und $p_{0,k}(f)=\|f\|_k$, $\|\cdot\|_k$ die Sobolev-Norm in $H_k(\mathsf{R}^n)$ ([18, § 14, 3. S. 65]). Wegen $\|P_0f\|^2\leqq C_1\|f\|_m^2$ für $f\in\mathscr{S}(\mathsf{R}^n)$ folgt daraus, daß P_0 als Abbildung von $\mathscr{S}(\mathsf{R}^n)$ in $L_2(\mathsf{R}^n)$ stetig ist.

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.5 für den Operator P_0 erfüllt.

Die Abschließung $\overline{P_0}$ ist ein normaler Operator in $L_2(\mathsf{R}^n)$ ([15, Chapter 4 Corollary 2.3]). Daraus folgt, daß für $\overline{P_0}$ die Voraussetzungen von Satz 2.8 erfüllt sind.

KOROLLAR. *Sei* $p(D)=\sum_{|\mu|\leqq m}a_\mu D^\mu$ *ein elliptischer Differentialausdruck mit konstanten, reellen Koeffizienten* a_μ. *Seien die Voraussetzungen von Satz* 4.3 *erfüllt, dann gelten für den Operator* $\overline{P_0}$ *die Aussagen* a)–g) *aus Satz* 3.1 *und es gibt eine Eigenfunktionsentwicklung nach Mautner.*

BEWEIS. Da die Koeffizienten a_μ reell sind, ist der Operator $\overline{P_0}$ selbstadjungiert ([15, Chapter 4 Corollary 2.3]). Aus Satz 4.3 folgt, daß für $\overline{P_0}$ die Voraussetzungen von Satz 3.1 und Satz 4.2 erfüllt sind.

SATZ 4.4. *Sei* $G\subset R^n$, $n>2$, *G offen und beschränkt.*

Sei $p(x,D)=\sum_{|\mu|\leqq m}a_\mu D^\mu$ *ein in* $\bar{G}$ *elliptischer Differentialausdruck mit Koeffizienten* $a_\mu\in C^{|\mu|}(\bar{G})$ *und* $m>n/2$. *Sei der Operator* P_0 *in* $L_2(G)$ *durch* $D(P_0)=\mathscr{D}(G)$ *und* $P_0f=p(x,D)f$ *für* $f\in\mathscr{D}(G)$ *erklärt.*

Dann sind für den Operator P_0 die Voraussetzungen von Satz 2.5 und für den Operator $\overline{P_0}$ die von Satz 2.7 und die von Satz 2.2 mit Hilbert–Schmidt-Einbettung $\tilde{J}$ erfüllt.

Beweis. Wir weisen zuerst nach, daß die Voraussetzungen von Satz 2.5 erfüllt sind.

Da $p(x,D)$ elliptisch ist, gilt $\|f\|_m^2 \leqq C(\|P_0 f\|^2 + \|f\|^2)$ für alle $f \in D(P_0)$ mit $m > n/2$ ([16, Theorem 1]).

Da die Koeffizienten a_μ Elemente von $\mathscr{C}^{|\mu|}(\bar{G})$ sind, ist die Adjungierte P_0^* eine Fortsezung des dicht definierten Operators Q_0 mit $D(Q_0) = \mathscr{D}(G)$ und $Q_0 f = q(x,D)f$ für $f \in D(Q_0)$ und $q(x,D) = \sum_{|\mu| \leqq m} D^\mu a_\mu^*$. Daraus folgt, daß der Operator P_0 abschließbar ist.

Der Raum $\mathscr{D}(G)$ ist als induktiver Limes $(\mathscr{D}(K_n);\, F_n^{n+k})$ darstellbar, dabei ist $\{K_n\}_n$ eine G ausschöpfende Folge kompakter Teilmengen von G mit $K_n \subset K_{n+1}$ und F_n^{n+k} die Einbettung von $\mathscr{D}(K_n)$ in $\mathscr{D}(K_{n+k})$ ([18, § 12, 5. S. 60]). Dann ist A als Abbildung von $\mathscr{D}(G)$ in $L_2(G)$ genau dann stetig, wenn A als Abbildung von $\mathscr{D}(K_n)$ in $L_2(G)$ für jedes n stetig ist ([14, Kapitel V Satz 5]). Jeder Raum $\mathscr{D}(K_n)$ ist als projektiver Limes $(H_m^0(K_n);\, E_{m+k}^m)$ darstellbar, E_{m+k}^m die Einbettung von $H_{m+k}^0(K_n)$ in $H_m^0(K_n)$ ([18, § 12, 3. S. 59]). Da die Koeffizienten a_μ auf $\bar{G}$ beschränkt sind, gilt für alle $f \in \mathscr{D}(K_n)$ $\|P_0 f\|^2 \leqq C_n \|f\|_{m,n}^2$, dabei ist $\|\cdot\|_{m,n}$ die Sobolev-Norm in $H_m^0(K_n)$ und $C_n > 0$. Daraus folgt, daß A als Abbildung von $\mathscr{D}(K_n)$ in $L_2(G)$ für jedes n stetig ist. Damit ist A als Abbildung von $\mathscr{D}(G)$ in $L_2(G)$ stetig. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.5 für den Operator P_0 erfüllt. Nach Satz 2.5 b) sind die Voraussetzungen von Satz 2.7 erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt sind.

Wie im Beweis zu Satz 2.5 zeigt man, daß $\tilde{D}(\overline{P_0}) \subseteqq H_m^0(G)$ gilt und die Einbettung $E\colon \tilde{D}(\overline{P_0}) \to H_m^0(G)$ stetig ist. Wegen $m > n/2$ ist die Einbettung $E_m^0\colon H_m^0(G) \to L_2(G)$ eine Hilbert–Schmidt-Abbildung ([12, Satz 4]). Dann ist $\tilde{J} = E_m^0 \circ E$ ebenfalls eine Hilbert–Schmidt-Abbildung. Damit ist Satz 4.4 bewiesen.

Satz 4.5. *Sei $G \subset \mathbf{R}^n$, G offen und beschränkt, sei G außerdem $2m$-regulär. Sei $p(x,D)$ ein elliptischer Differentialausdruck der Ordnung $2m$. Sei $(p(x,D), \{b_j(x,D)\colon j=1,\ldots,m\}, G)$ ein reguläres, elliptisches Randwertproblem, sei $2m > n/2$. Sei der Operator P_0 in $L_2(G)$ durch $D(P_0) = H_{2m}(G,\{b_j\})$ mit $H_{2m}(G,\{b_j\})$ die Vervollständigung von*

$$\{f \in \mathscr{C}^{2m}(\bar{G}) \;:\; b_j(x,D)f = 0 \text{ auf } \partial G \text{ für } j=1,\ldots,m\}$$

unter der Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{2m}$, und $P_0 f = p(x,D)f$ für $f \in D(P_0)$ erklärt, dann *sind für den Operator P_0 die Voraussetzungen von Satz* 2.6, *die von Satz* 2.7 *und die von Satz* 2.2 *mit kompakter Einbettung* $\tilde{J}: \tilde{D}(P_0) \to L_2(G)$ *erfüllt.*

BEWEIS. Es gilt $\|f\|_{2m} \leqq C(\|P_0 f\| + \|f\|)$ für alle $f \in D(P_0)$ mit $C > 0$ ([1, Theorem 1.1]), dann gilt

$$\|f\|_{2m}^2 \leqq C_1(\|P_0 f\|^2 + \|f\|^2)$$

für alle $f \in D(P_0)$ mit $2m > n/2$.

Der Operator P_0 ist abgeschlossen ([1, 2. S. 122]). Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.6 und deshalb auch die von Satz 2.8 für den Operator P_0 erfüllt. Wie im Beweis von Satz 2.5 zeigt man, daß $\tilde{D}(P_0) \subset H_{2m}(G)$ gilt und die Einbettung $E: \tilde{D}(P_0) \to H_{2m}(G)$ stetig ist. Die Einbettung $E_{2m}^0: H_{2m}(G) \to L_2(G)$ ist kompakt, da G $2m$-regulär ist ([18 § 4 Satz 4]). Dann ist die Einbettung $\tilde{J} = E_{2m}^0 \circ E: \tilde{D}(P_0) \to L_2(G)$ kompakt. Damit sind für den Operator P_0 auch die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt.

Wenn der in Satz 4.5 definierte Operator P_0 symmetrisch ist, dann ist er auch selbstadjungiert ([1, 4. S. 133]). Daraus folgt

SATZ 4.6. *Seien die Voraussetzungen von Satz* 4.5 *erfüllt. Sei der Operator P_0 symmetrisch, dann gelten* a)–g) *aus Satz* 3.1 *für den Operator P_0.*

Wir betrachten Pseudodifferentialoperatoren in $L_2(G)$. Mit $\mathfrak{F}$ bezeichnen wir die Fourier–Plancherel-Transformation in $L_2(\mathbf{R}^n)$.

SATZ 4.7. *Sei $G \subseteq \mathbf{R}^n$ offen, sei $p \in \mathscr{C}^\infty(G \times \mathbf{R}^n)$ ein elliptisches Symbol der Ordnung $m > n/2$. Sei G_0 offen, $\overline{G_0}$ kompakt und $\overline{G_0} \subset G$. Sei der Operator P_0 in $L_2(G_0)$ erklärt durch $D(P_0) = \mathscr{D}(G_0)$ und $P_0 f$ mit*

$$(P_0 f)(x) = \mathfrak{F}(p(x)(\mathfrak{F}^{-1} f)) \quad \textit{für } x \in G_0 \textit{ und } f \in D(P_0),$$

dann sind für den Operator P_0 die Voraussetzungen von Satz 2.5 *und für den Operator $\overline{P_0}$ die von Satz* 2.7 *und die von Satz* 2.2 *mit Hilbert–Schmidt-Einbettung $\tilde{J}$ erfüllt.*

BEWEIS. Da p elliptisch von der Ordnung m ist, gilt $\|f\|_m \leqq C(\|P_0 f\| + \|f\|)$ ([10, (1.0.2.)]), dann gilt auch

$$\|f\|_m^2 \leqq C_1(\|P_0 f\|^2 + \|f\|^2) \quad \text{für alle } f \in D(P_0).$$

Der Pseudodifferentialoperator P_0 hat eine eindeutig bestimmte, dicht definierte Adjungierte ([9, Theorem 4.4]) und ist deshalb abschließbar.

Es gilt die Abschätzung $\|P_0 f\|^2 \leqq C_2 \|f\|^2$ für alle $f \in D(P_0)$ ([10, (1.0.1.)]). Damit zeigt man wie im Beweis von Satz 4.4, daß P_0 als Abbildung von $\mathscr{D}(G_0)$ *in* $L_2(G_0)$ stetig ist. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 2.5 für den Operator P_0 nachgewiesen.

Wie im Beweis zu Satz 4.4 zeigt man, daß für den Operator $\overline{P_0}$ die Voraussetzungen von Satz 2.2 mit Hilbert–Schmidt-Einbettung $\tilde{J}$ und die von Satz 2.7 erfüllt sind.

Von L. Hörmander wurden in [10] subelliptische Symbole definiert und untersucht. Mit einem subelliptischen Symbol $p \in \mathscr{C}^\infty(G \times \mathbf{R}^n)$ der Ordnung m kann man einen Pseudodifferentialoperator P_0 in $L_2(G_0)$ erzeugen, der der Abschätzung

$$\|f\|_{m-\delta} \leqq C(\|P_0 f\| + \|f\|)$$

für alle $f \in \mathscr{D}(G_0)$ und festem δ, $0 \leqq \delta < 1$, genügt ([7, S. 1056], [10, (1.0.4)]). Damit kann man dann den folgenden Satz 4.8 analog Satz 4.7 beweisen.

Hinreichende und notwendige Bedingungen an ein Symbol $p \in \mathscr{C}^\infty(G \times \mathbf{R}^n)$ dafür, daß es subelliptisch ist und die o.a. Abschätzung mit $\delta = k/(k+1)$ erfüllt ist, hat Ju. V. Egorov in [7] angegeben.

SATZ 4.8. *Sei* $G \subseteqq \mathbf{R}^n$ *offen. Sei* $p \in \mathscr{C}^\infty(G \times \mathbf{R}^n)$ *ein subelliptisches Symbol der Ordnung* m, *sei* $m - 1 > n/2$. *Sei* G_0 *offen,* G_0 *kompakt und* $\overline{G_0} \subset G$. *Sei der Operator* P_0 *in* $L_2(G_0)$ *erklärt durch* $D(P_0) = \mathscr{D}(G_0)$ *und* $P_0 f$ *mit* $(P_0 f)(x) = \mathfrak{F}(p(x)(\mathfrak{F}^{-1} f))$ *für* $x \in G_0$ *und* $f \in D(P_0)$, *dann sind für den Operator* P_0 *die Voraussetzungen von Satz* 2.5 *und für den Operator* $\overline{P_0}$ *die von Satz* 2.7 *und die von Satz* 2.2 *mit Hilbert–Schmidt-Einbettung* $\tilde{J}$ *erfüllt.*

LITERATURVERZEICHNIS

1. S. Agmon, *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. 15 (1962), 119–147.
2. S. Agmon, *On kernels, eigenvalues, and eigenfunctions of operators related to elliptic problems*, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), 627–663.
3. N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1959), 337–404.
4. N. Aronszajn and K. T. Smith, *Characterization of positive reproducing kernels*, Applications to Green's functions, Amer. J. Math. 79 (1957), 611–622.
5. F. E. Browder, *Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 45 (1959), 365–372.
6. Y. Choquet-Bruhat, *Distributions. Théorie et problèmes*, Masson et Cie, Paris, 1973.
7. Ju. V. Egorov, *On subelliptic pseudodifferential operators*, Soviet Math. Doklady 10 (1969), 1056–1059.

8. E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1965.
9. L. Hörmander, *Pseudo-differential Operators*, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), 501–517.
10. L. Hörmander, *Pseudo-differential Operators*, Ann. of Math. 83 (1966), 129–209.
11. T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, (Grundlehren Math. Wissensch. 132), Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1966.
12. K. Maurin, *Abbildungen vom Hilbert–Schmidtschen Typus und ihre Anwendungen*, Math. Scand. 9 (1961), 359–371.
13. F. I. Mautner, *On Eigenfunction Expansions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39 (1953), 49–53.
14. A. P. Robertson and W. Robertson, *Topologische Vektorraüme*, B·I-Hochschultaschenbücher 164/164a, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.
15. M. Schechter, *Spectra of Partial Differential Operators*, North-Holland Publishing Co. Amsterdam · London, 1971.
16. M. Schechter, *On estimating elliptic partial differential operators in the L_2 norm*, Amer. J. Math. 79, (1957), 431–443.
17. J. Weidmann, *Carlemanoperatoren*, Manuscripta Math. 2 (1970), 1–38.
18. J. Wloka, *Grundräume und verallgemeinerte Funktionen* (Lecture Notes in Mathematics 82), Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1969.

WERNER STORK
UNIVERSITÄT KONSTANZ
FACHBEREICH MATHEMATIK
POSTFACH 7733
D-7750 KONSTANZ
BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND