MATH. SCAND. 40 (1977), 143–150

GANZE FUNKTIONEN MIT NEGATIVEN NULLSTELLEN

LUTZ VOLKMANN

Herrn Professor Dr. Rolf Nevanlinna zum 80. Geburtstag in Verehrung gewidmet.

1. Einleitung

Es sei $f(z)$ eine ganze Funktion, $M(r,f)=M(r)$ der Maximalbetrag, $n(r,0,f)=n(r,0)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ im Kreis $|z|\leqq r$ und $N(r,0,f)=N(r,0)$ die Anzahlfunktion. Mit

$$\lambda(f) = \lambda = \limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r}, \qquad \mu(f) = \mu = \liminf_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r},$$

$$\lambda_1(f) = \lambda_1 = \limsup_{r\to\infty}\frac{\log N(r,0)}{\log r}, \qquad \mu_1(f) = \mu_1 = \liminf_{r\to\infty}\frac{\log N(r,0)}{\log r}$$

werden die Ordnung, untere Ordnung, Nullstellenordnung und untere Nullstellenordnung von $f(z)$ bezeichnet.

In dieser Arbeit werden folgende Sätze bewiesen.

Satz 1. *Ist $f(z)$ eine ganze Funktion mit negativen Nullstellen der nicht ganzzahligen Ordnung λ, dem Geschlecht $q=[\lambda]$ un der unteren Ordnung μ, so gilt für alle ϱ, mit $\mu\leqq\varrho\leqq\lambda$*

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{n(r,0)}{\log M(r)} \leqq \frac{|\sin\pi\varrho|}{\pi} \quad \textit{für } q\neq 1, \tag{1.1}$$

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{n(r,0)}{\log M(r)} \leqq \frac{\sin\pi\varrho}{\pi\cos\alpha\varrho} \quad \textit{für } q=1 \textit{ und } \frac{\pi}{2}\leqq|\alpha|\leqq\frac{3}{4}\pi. \tag{1.2}$$

Satz 2. *Ist $f(z)$ eine ganze Funktion mit negativen Nullstellen der nicht ganzzahligen Ordnung λ, dem Geschlecht $q=[\lambda]$ und der unteren Ordnung μ, so gilt für alle ϱ, mit $\mu\leqq\varrho\leqq\lambda$*

Eingegangen am 15. Januar, 1976.

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{N(r,0)}{\log M(r)} \leqq \frac{|\sin \pi\varrho|}{\pi\varrho} \quad \textit{für } q \neq 1\,, \tag{1.3}$$

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{N(r,0)}{\log M(r)} \leqq \frac{2\sin\frac{1}{2}\pi\varrho}{\pi\varrho} \quad \textit{für } q = 1\,. \tag{1.4}$$

Ostrovskii [5] hat für ganze Funktionen nicht ganzzahliger Ordnung mit negativen Nullstellen die beiden Ungleichungen

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{n(r,0)}{\log M(r)} \leqq \frac{|\sin \pi\lambda|}{\pi}, \qquad \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r,0)}{\log M(r)} \leqq \frac{|\sin \pi\lambda|}{\pi\lambda} \tag{1.5}$$

bewiesen und Williamson [8] hat folgende Verbesserung der zweiten Ungleichung von (1.5) gegeben. Für alle ϱ, mit $\mu \leqq \varrho \leqq \lambda$ gilt

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{N(r,0)}{\log M(r)} \leqq \frac{|\sin \pi\varrho|}{\pi\varrho}\,. \tag{1.6}$$

Im Fall $q \neq 1$ sind also die Sätze 1 und 2 Verbesserungen von (1.5) und Satz 2 gerade Ungleichung (1.6).

Gilt für eine beliebige ganze Funktion $\mu_1 < \mu$, so erkennt man durch eine elementare Rechnung, daß sogar

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{n(r,0)}{\log M(r)} = \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r,0)}{\log M(r)} = 0 \tag{1.7}$$

ist. Daher kann man beim Beweis von Satz 2 (vgl. Abschnitt 5.) $\mu_1 = \mu$ voraussetzen, da im Fall $\mu_1 < \mu$ die schärfere Aussage (1.7) gilt.

Bei den Beweisen der Sätze 1 und 2 werden wir von folgendem Satz von Edrei und Fuchs [3] (S. 308) gebrauch machen.

Satz A. *Ist $f(z)$ ein kanonisches Produkt mit negativen Nullstellen vom Geschlecht q, so gilt*

$$q \leqq \mu\,. \tag{1.8}$$

Zunächst soll dieser Satz mit einer einfacheren Methode neu bewiesen werden.

2. Beweis von Satz A.

Es kann $q \geqq 1$ vorausgesetzt werden, da im Fall $q = 0$ nichts zu beweisen ist. Nun gilt bekanntlich (vgl. Valiron [7, S. 238]) für $-\pi < \arg z < \pi$

$$\log f(z) = (-1)^q \int_0^\infty \frac{n(t,0)z^{q+1}}{t^{q+1}(t+z)}\,dt\,.$$

Betrachtet man auf beiden Seiten die Realteile und setzt $z=re^{i\alpha}$, so erhält man daraus für $|\alpha|<\pi$

$$\log|f(re^{i\alpha})| = (-1)^q r^{q+1} \int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q+1}} \frac{t\cos(q+1)\alpha + r\cos q\alpha}{t^2+r^2+2tr\cos\alpha}\,dt\,. \tag{2.1}$$

Ist q gerade, so erhält man aus (2.1) für $\alpha=0$

$$\log M(r) \geqq \log|f(r)| = r^{q+1} \int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q+1}(t+r)}\,dt\,. \tag{2.2}$$

Ist q ungerade, so erhält man aus (2.1) für $\alpha=4\pi/3(q+1)$

$$\log M(r) \geqq \log|f(re^{i\frac{4\pi}{3(q+1)}})| \geqq \frac{1}{2}r^{q+1} \int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q+1}(t+r)}\,dt\,. \tag{2.3}$$

Damit ergibt sich aus (2.2) und (2.3) für alle $q\geqq 1$

$$\begin{aligned} \log M(r) &\geqq \frac{1}{2}r^{q+1} \int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q+1}(t+r)}\,dt \\ &\geqq \frac{1}{2}r^{q+1} \int_0^r \frac{n(t,0)}{2rt^{q+1}}\,dt = \frac{1}{4}r^q \int_0^r \frac{n(t,0)}{t^{q+1}}\,dt\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Nun ist aber (vgl. Nevanlinna [4, S. 226])

$$\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q+1}}\,dt$$

divergent und daher folgt aus (2.4)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^q}{\log M(r)} = 0\,, \tag{2.5}$$

womit Satz A bewiesen ist.

3. Ein Hilfssatz.

Der folgende Hilfssatz, der von Shea [6] bewiesen wurde, spielt bei den Beweisen der beiden Sätze eine zentrale Rolle.

HILFSSATZ. *Ist $G(t)$ für $t\geqq t_0>0$ eine reellwertige, stetige, positive, monotone und unbeschränktt wachsende Funktion und bezeichnet man mit*

$$\lambda = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log G(t)}{\log t} \quad bzw. \quad \mu = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log G(t)}{\log t}$$

die Ordnung bzw. die untere Ordnung von $G(t)$, so existieren zu jedem endlichen ϱ, mit $\mu \leqq \varrho \leqq \lambda$, eine Folge (r_n) (eine Folge von Pólya peaks zweiter Art der Ordnung ϱ) und zwei Folgen (a_n) und (A_n), mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{r_n} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{r_n} = 0,$$

so daß die Ungleichung

$$G(t) \geqq (1+o(1))\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\varrho} G(r_n) \quad (n \to \infty, a_n \leqq t \leqq A_n)$$

gilt.

4. Beweis von Satz 1.

Die ganze Funktion $f(z)$ besitzt eine Darstellung der Form (vgl. Nevanlinna [4, S. 233])

$$f(z) = z^n e^{P(z)} Q(z), \tag{4.1}$$

wobei $n \geqq 0$, $P(z)$ ein Polynom vom Grad $p \leqq q$ und $Q(z)$ ein kanonisches Produkt mit negativen Nullstellen der Ordnung λ und dem Geschlecht $q = [\lambda]$ ist. Aus (4.1) folgt nun durch leichte Abschätzung mit Hilfe von (2.5)

$$\log M(r, f) \sim \log M(r, Q).$$

Daraus folgt aber

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{n(r, 0, f)}{\log M(r, f)} = \liminf_{r\to\infty} \frac{n(r, 0, Q)}{\log M(r, Q)}$$

und mit Satz A $\mu(f) = \mu(Q) \geqq q$.

Daher genügt es Satz 1 für ein kanonisches Produkt mit negativen Nullstellen zu beweisen.

Es sei also im folgenden $f(z)$ ein kanonisches Produkt mit negativen Nullstellen und man setze

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{n(r, 0)}{\log M(r)} = B, \tag{4.2}$$

wobei $B \neq 0$ vorausgesetzt werden kann, da im Fall $B = 0$ nichts mehr zu beweisen ist. Außerdem ist B endlich, da (vgl. Boas [1, S. 17]) $B \leqq \mu_1 \leqq \lambda$ gilt.

Nun wähle man $\varepsilon > 0$, mit $B-\varepsilon > 0$ und es folgt aus (4.2), daß ein r_1 existiert, so daß für alle $r \geqq r_1$

$$n(r,0) \geqq (B-\varepsilon)\log M(r) \tag{4.3}$$

gilt.

Betrachtet man zunächst gerade q, so folgt aus (2.2) und (4.3) für $r \geqq r_1$

$$\log M(r) \geqq r^{q+1}\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(t,0)}{t^{q+1}(t+r)}dt \geqq (B-\varepsilon)r^{q+1}\int_{r_1}^{\infty}\frac{\log M(t)}{t^{q+1}(t+r)}dt\,. \tag{4.4}$$

Wendet man nun den Hilfssatz auf die Funktion $G(t)=\log M(t)$ für $a_n \geqq r_1$, $\mu \leqq \varrho \leqq \lambda$ und $r=r_n$ an, so folgt aus (4.4)

$$\log M(r_n) \geqq (1+o(1))(B-\varepsilon)\log M(r_n)\int_{a_n}^{A_n}\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\varrho}\left(\frac{r_n}{t}\right)^{q+1}\frac{dt}{t+r_n}\,.$$

Mit der Substitution $t=sr_n$ und $n \to \infty$ erhält man daraus für $\mu \leqq \varrho \leqq \lambda$

$$1 \geqq (B-\varepsilon)\int_0^{\infty}\frac{s^{\varrho-q-1}}{s+1}ds\,.$$

Da nun für $q<\varrho<q+1$ (vgl. Dinghas [2, S. 179])

$$\int_0^{\infty}\frac{s^{\varrho-q-1}}{s+1}ds = \Gamma(\varrho-q)\Gamma(q+1-\varrho) = \frac{\pi}{\sin(\varrho-q)\pi} \tag{4.5}$$

gilt, folgt für $\mu \leqq \varrho \leqq \lambda$ und $q<\varrho<q+1$, mit $\varepsilon \to 0$

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{n(r,0)}{\log M(r)} \leqq \frac{\sin \pi\varrho}{\pi}$$

und damit (1.1) für den Fall, daß q gerade ist.

Nun sei q ungerade und man wähle α so, daß

$$|\alpha| < \pi,\ \cos q\alpha \leqq 0 \text{ und } \cos(q+1)\alpha \leqq 0 \tag{4.6}$$

gilt, dann folgt aus (2.1) und (4.3) für alle $r \geqq r_1$

$$\log M(r) \geqq (B-\varepsilon)r^{q+1}\int_{r_1}^{\infty}\frac{\log M(t)}{t^{q+1}}\,\frac{-t\cos(q+1)\alpha - r\cos q\alpha}{t^2+r^2+2tr\cos\alpha}\mathrm{dt}\,.$$

Da der Integrand des letzten Integrals positiv ist, kann man darauf den Hilftssatz wie im obigen Fall anwenden und man erhält für $\mu \leqq \varrho \leqq \lambda$

$$1 \geqq (B-\varepsilon)\int_0^{\infty}s^{\varrho-q-1}\frac{-s\cos(q+1)d-\cos q\alpha}{s^2+1+2s\cos\alpha}dt\,, \tag{4.7}$$

wobei α der Bedingung (4.6) genügen muß. Der Residuensatz liefert nun für $p^2<1$ und $|\beta|<\pi$

$$(4.8)\qquad \int_0^\infty \frac{s^p}{s^2+1+2s\cos\beta}\,ds = \frac{\pi\sin p\beta}{\sin p\pi\sin\beta}\,.$$

Mit Hilfe von (4.8) folgt aus (4.7) nach einer elementaren Rechnung für $\mu \leqq \varrho \leqq \lambda$ und $q<\varrho<q+1$, mit $\varepsilon \to 0$

$$(4.9)\qquad \liminf_{r\to\infty} \frac{n(r,0)}{\log M(r)} \leqq \frac{1}{\pi}\frac{\sin\pi\varrho}{\cos\alpha\varrho}\,,$$

wobei α der Bedingung (4.6) genügen muß. Damit ist im Fall $q=1$ die Ungleichung (1.2) bewiesen. Ist nun $q \geqq 3$, so erfüllt $\alpha=\pi/\varrho$ die Bedingung (4.6) und (1.1) folgt mit diesem α aus (4.9). Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

5. Beweis von Satz 2.

Geht man wieder von der Darstellung (4.1) aus, so erkennt man, daß auch

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{N(r,0,f)}{\log M(r,f)} = \liminf_{r\to\infty} \frac{N(r,0,Q)}{\log M(r,Q)}$$

gilt. Da $\mu_1(f)=\mu_1(Q)$ ist und da bekanntlich $\lambda_1(f)=\lambda_1(Q)=\lambda(f)=\lambda(Q)$ gilt (vgl. Nevanlinna [4, S. 227]) genügt es wieder Satz 2 für kanonische Produkte mit negativen Nullstellen zu beweisen.

Somit sei also im folgenden $f(z)$ ein solches kanonisches Produkt.

Ist zunächst q wieder gerade, so folgt aus (2.2)

$$(5.1)\qquad \begin{aligned}\log M(r) &\geqq r^{q+1}\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q+1}(t+r)}\,dt\\ &= r^{q+1}\int_0^\infty \frac{N(t,0)}{t^{q+1}}\,\frac{q(t+r)+t}{(t+r)^2}\,dt\,.\end{aligned}$$

Wendet man nun den Hilfssatz auf die Funktion $G(t)=N(t,0)$ an, so folgt für $r=r_n$ und $\mu_1 \leqq \varrho \leqq \lambda_1 = \lambda$ aus (5.1)

$$\log M(r_n) \geqq (1+o(1))N(r_n,0)\int_{a_n}^{A_n}\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\varrho-q-1}\frac{q(t+r_n)+t}{(t+r_n)^2}\,dt\,.$$

Die Substitution $t=sr_n$ und $n\to\infty$ liefert dann für $\mu_1 \leqq \varrho \leqq \lambda$

$$(5.2)\qquad \begin{aligned}\limsup_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{N(r,0)} &\geqq \int_0^\infty s^{\varrho-q-1}\frac{q(s+1)+s}{(s+1)^2}\,ds\\ &= q\int_0^\infty \frac{s^{\varrho-q-1}}{s+1}\,ds+\int_0^\infty \frac{s^{\varrho-q}}{(s+1)^2}\,ds\,.\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Residuensatzes erhält man für $q<\varrho<q+1$

$$(5.3)\qquad \int_0^\infty \frac{s^{\varrho-q}}{(s+1)^2}\,ds = \frac{\pi(\varrho-q)}{\sin\pi(\varrho-q)}\,.$$

Aus (4.5), (5.2) und (5.3) folgt für $\mu_1\leqq\varrho\leqq\lambda$ und $q<\varrho<q+1$

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{N(r,0)} \geqq \frac{\pi\varrho}{\sin\pi\varrho}$$

und damit (1.3) für gerade q.

Ist q ungerade, so folgt aus (2.1) für $|\alpha|<\pi$

$$\begin{aligned}(5.4)\quad \log M(r) &\geqq -r^{q+1}\int_0^\infty \frac{n(t,0)}{t^{q+1}}\frac{t\cos(q+1)\alpha+r\cos q\alpha}{t^2+r^2+2tr\cos\alpha}\,dt\\
&= -r^{q+1}\int_0^\infty N'(t,0)K(t,r,q,\alpha)\,dt\\
&= r^{q+1}\int_0^\infty \frac{N(t,0)}{t^{q+1}}\left\{-\frac{qr\cos q\alpha+(q-1)t\cos(q+1)\alpha}{t^2+r^2+2tr\cos\alpha}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{(t^2\cos(q+1)\alpha+tr\cos q\alpha)(2t+2r\cos\alpha)}{(t^2+r^2+2tr\cos\alpha)^2}\right\}dt\\
&= r^{q+1}\int_0^\infty N(t,0)K'(t,r,q,\alpha)\,dt\,.\end{aligned}$$

Um den Hilfssatz wieder anzuwenden, muß $K'(t,r,q,\alpha)\geqq 0$ gelten, was sicher dann der Fall ist, wenn

$$(5.5)\qquad \cos q\alpha\leqq 0,\ \cos(q+1)\alpha\leqq 0 \text{ und } \cos\alpha\geqq 0$$

gilt. Wenn also α der Bedingung (5.5) genügt, folgt aus (5.4) und dem Hilfssatz für $r=r_n$ und $\mu_1\leqq\varrho\leqq\lambda$

$$\log M(r_n) \geqq (1+o(1))N(r_n,0)r_n^{q+1}\int_{a_n}^{A_n}\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\varrho}K'(t,r_n,q,\alpha)\,dt\,,$$

woraus durch partielle Integration

$$\frac{\log M(r_n)}{N(r_n,0)} \geqq (1+o(1))\left\{o(1)-\varrho r_n^q\int_{a_n}^{A_n}\left(\frac{t}{r_n}\right)^{\varrho-1}K(t,r_n,q,\alpha)\,dt\right\}$$

folgt. Die Substitution $t=sr_n$ und $n\to\infty$ liefern dann

$$(5.6)\qquad \limsup_{r\to\infty}\frac{\log M(r)}{N(r,0)} \geqq -\varrho\int_0^\infty s^{\varrho-1-q}\frac{s\cos(q+1)\alpha+\cos q\alpha}{s^2+1+2s\cos\alpha}\,ds\,.$$

Aus (4.8) und (5.7) folgt wie beim Beweis von Satz 1 für $\mu_1 \leqq \varrho \leqq \lambda$, $q < \varrho < q+1$ und $|\alpha| < \pi$

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{N(r,0)} \geqq \pi\varrho \frac{\cos \alpha\varrho}{\sin \pi\varrho} . \tag{5.7}$$

wobei α die Bedingung (5.5) erfüllen muß. Im Fall $q=1$ folgt aus $|\alpha| < \pi$ und Bedingung (5.5) notwendigerweise $\alpha = \pm\pi/2$ und damit (1.4) aus (5.7). Im Fall $q \geqq 3$ erfüllt $\alpha = \pi/\varrho$ die Bedingung (5.5) und $|\alpha| < \pi$ und damit folgt (1.3) aus (5.7). Damit ist auch Satz 2 vollständig bewiesen.

LITERATUR

1. R. P. Boas Jr., *Entire functions* (Pure and Applied Mathematics 5), Academic Press Inc. New York, 1954.
2. A. Dinghas, *Vorlesungen über Funktionentheorie* (Grundlehren Math. Wissensch. 110), Springer-Verlag Berlin · Göttingen · Heidelberg, 1961.
3. A. Edrei und W. H. J. Fuchs, *On the growth of meromorphic functions with several deficient values*, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 292–328.
4. R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen* (Grundlehren Math. Wissensch. 46), Reprint der 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York, 1974.
5. I. V. Ostrovskii, *Some asymptotic properties of entire functions with negative zeros*, Zap. Math. Otd. Fiz.-Mat. Khaṙkov Mat. Obsc. 28 (4) (1961), 23–32.
6. D. F. Shea, *On the Valiron deficiencies of meromorphic functions of finite order*, Trans. Amer. Math. Soc. 124 (1966), 201–227.
7. G. Valiron, *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse 5 (3) (1913), 117–257.
8. J. Williamson, *Remarks on the maximum modulus of an entire function with negative zeros*, Quart. J. Math. (Oxford) 21 (1970), 497–512.

I. MATHEMATISCHES INSTITUT
FREIE UNIVERSITÄT BERLIN
HÜTTENWEG 9
D-1000 BERLIN 33