MATH. SCAND. 41 (1977), 185–192

ZUR ALGEBRAISCHEN VIELFACHHEIT EINES PRODUKTES VON OPERATORSCHAREN

PAUL SARREITHER

E. I. Sigal hat in [11, Theorem 4] gezeigt, daß sich die algebraische Vielfachheit eines Produktes von holomorphen Operatorscharen (unter gewissen Bedingungen) additiv aus den Vielfachheiten der Faktoren zusammensetzt. Dieses Resultat ist seither mehrfach verfeinert und erweitert worden (siehe etwa [8], [4], [5]). Die bislang allgemeinste Fassung stammt von H. Bart, M. A. Kaashoek und D. C. Lay, die in [3, Theorem 6] eine derartige Additionseigenschaft für die »reduzierte algebraische Vielfachheit« bei einem Produkt von meromorphen Operatorscharen nachgewiesen haben.

Vor kurzem hat nun R. J. Magnus gezeigt, daß auch bei gewissen reellparametrigen C^{∞}-Scharen ein Additionssatz für die algebraische Vielfachheit gilt ([7, Theorem 2.4]). In dieser Arbeit wird ein neues Resultat in der gleichen Richtung vorgestellt: Die Differenzierbarkeitsforderungen sind gegenüber [7] modifiziert, einige der übrigen Voraussetzungen gegenüber allen bisherigen Ergebnissen abgeschwächt. Bemerkenswert scheint dabei die relativ elementare Beweismethode, die mit Untersuchungen über das Transformationsverhalten endlicher Ketten zusammenhängt.

1. Bezeichnungen und Grundbegriffe.

Im Folgenden bezeichnet K stets den Körper R oder C, sowie U eine offene Umgebung des fixierten Punktes $\lambda_0 \in U$. Ist Z ein Banachraum über K, so heißt eine Abbildung $F\colon U \to Z$ *von der Klasse* $D_n(\lambda_0)$ $(1 \leqq n < \infty)$, wenn F stetig, $(n-1)$-mal stetig differenzierbar ist und an der Stelle λ_0 selbst eine n-te Ableitung besitzt; die Entwicklungskoeffizienten von F an der Stelle λ_0 kürzen wir mit F_k $(k=0,\ldots,n)$ ab. Für $K=\mathsf{C}$ und $n>1$ ist F natürlich analytisch; dennoch halten wir auch in diesem Fall an der obigen Notation für F fest, um bei der Formulierung von Voraussetzungen die tatsächlich benötigten Ableitungen anzugeben.

Seien X und Y Banachräume über K, $B(X, Y)$ der Banachraum der stetigen linearen Abbildungen: $X \to Y$, sowie $L\colon U \to B(X, Y)$ von der Klasse $D_n(\lambda_0)$.

Eingegangen am 19. November, 1976.

Wie in [9], [10] nennen wir ein Tupel $u := (u_0, \ldots, u_{r-1}) \in X^r$ eine (L, λ_0)-*Kette der Länge* r, wenn (i) $r \leqq n+1$, und (ii) die folgenden r Gleichungen erfüllt sind:

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{k} L_i u_{k-i} = 0 \qquad (k=0, \ldots, r-1) .$$

Es scheint sinnvoll, solche Tupel hier als Spaltenvektoren aufzufassen; aus schreibtechnischen Gründen werden wir sie als Zeilenvektoren mit Transposition ^{T} notieren. Dann lassen sich nämlich die Gleichungen (1), in Anlehnung an [6], auch schreiben als

$$(2) \qquad \mathfrak{L}_r u = 0 ,$$

wobei $\mathfrak{L}_r \in B(X^r, Y^r)$ durch die folgende Dreiecksmatrix gegeben ist:

$$(3) \qquad \mathfrak{L}_r = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & \cdots & 0 \\ L_1 & L_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ L_{r-1} & \cdots & L_1 & L_0 \end{bmatrix} ;$$

genauso wie bei (1) verzichten wir darauf, die Abhängigkeit von λ_0 explizit anzudeuten.

Demnach ist $u \in X^r$ eine (L, λ_0)-Kette der Länge r genau dann, wenn $u \in X^r$ im Nullraum $N(\mathfrak{L}_r)$ liegt. Die Dimension $\operatorname{DIM}(L, \lambda_0, r)$ des von den (L, λ_0)-Ketten der Länge r erzeugten linearen Teilraumes von X^r stimmt mit $\dim N(\mathfrak{L}_r)$ überein.

Diejenigen (L, λ_0)-Ketten, deren Anfangsglied $u_0 \neq 0$ ist, werden *wesentlich* genannt. Wenn es keine wesentlichen (L, λ_0)-Ketten der Länge $(n+1)$ gibt, dann ist die *maximale Länge wesentlicher* (L, λ_0)-*Ketten* definiert; diese maximale Länge, hier mit $a(L, \lambda_0)$ bezeichnet (»ascent«), läßt sich auch charakterisieren als

$$a(L, \lambda_0) = \inf \{ k=0, \ldots, n \mid \forall u \in N(L_{k+1}) \colon u_0 = 0 \} .$$

Ist $a(L, \lambda_0)$ definiert, so stagnieren die Dimensionszahlen $\operatorname{DIM}(L, \lambda_0, r)$ für $a(L, \lambda_0) \leqq r \leqq n+1$. Die *algebraische Vielfachheit* $m(L, \lambda_0)$ wird dann durch

$$m(L, \lambda_0) := \operatorname{DIM}(L, \lambda_0, a(L, \lambda_0)) = \sup \{ \operatorname{DIM}(L, \lambda_0, r) \mid 1 \leqq r \leqq n+1 \}$$

definiert; sie ist endlich, wenn $\dim N(L_0) < \infty$.

Bei einer analytischen Operatorschar L fallen die hier gegebenen Definitionen für Ketten, maximale Kettenlänge und algebraische Vielfachheit mit den sonst gebräuchlichen zusammen — es kann allerdings vorkommen, daß $a(L, \lambda_0)$ und $m(L, \lambda_0)$ überhaupt nicht definiert sind; dies ist genau dann der Fall, wenn wesentliche (L, λ_0)-Ketten beliebiger Länge existieren (vergleiche hierzu [1], [6, Abschnitt 2], [9]–[11]).

2. Eine Variante des Additionstheorems.

Seien X, Y, Z Banachräume über K, sowie $A\colon U \to B(Y,Z)$ und $B\colon U \to B(X,Y)$ von der Klasse $D_n(\lambda_0)$. Dann ist die Produktschar $C := AB\colon U \to B(X,Z)$, die definiert wird durch $C(\lambda) := A(\lambda)B(\lambda)$, ebenfalls von der Klasse $D_n(\lambda_0)$. Mit $\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{B}_r$, $\mathfrak{C}_r$ werden die nach (3) gebildeten Matrixoperatoren zu A, B, C bezeichnet. Wir beginnen mit zwei elementaren Hilfssätzen:

Lemma 1. *Für* $1 \leqq r \leqq n+1$ *gilt (im Sinn der Matrizenmultiplikation)*

$$\mathfrak{C}_r = \mathfrak{A}_r \cdot \mathfrak{B}_r .$$

Beweis. Man benutzt, daß sich die Entwicklungskoeffizienten von C aus

$$C_k = \sum_{i=0}^{k} A_i B_{k-i} \qquad (k=0,\ldots,n)$$

bestimmen, und verifiziert die Behauptung elementweise direkt.

Lemma 2. *Sei* B_0 *Fredholmoperator mit dem Index* $i(B_0)$. *Dann ist für* $1 \leqq r \leqq n+1$ *auch* $\mathfrak{B}_r$ *Fredholmoperator, und zwar mit dem Index* $r \cdot i(B_0)$.

Beweis. Es ist leicht einzusehen, daß für alle $\varepsilon \in K\backslash\{0\}$ eine Zerlegung $\mathfrak{B}_r = \mathfrak{I}_r(\varepsilon)\cdot\mathfrak{B}_r(\varepsilon)\cdot\mathfrak{J}_r(\varepsilon)$ besteht, wobei

$$\mathfrak{J}_r(\varepsilon) = \operatorname{diag}(I_X, \varepsilon I_X, \ldots, \varepsilon^{r-1} I_X) \in B(X^r, X^r) ,$$

$$\mathfrak{I}_r(\varepsilon) = \operatorname{diag}(I_Y, \varepsilon^{-1} I_Y, \ldots, \varepsilon^{-r+1} I_Y) \in B(Y^r, Y^r) ,$$

sowie

$$\mathfrak{B}_r(\varepsilon) = \begin{bmatrix} B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon B_1 & B_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \varepsilon^{r-1} B_{r-1} & \cdots & \varepsilon B_1 & B_0 \end{bmatrix} \in B(X^r, Y^r) .$$

Der Diagonaloperator $\mathfrak{B}_r(0)$ ist Fredholmoperator mit dem Index $r \cdot i(B_0)$; außerdem sind $\mathfrak{I}_r(\varepsilon)$ und $\mathfrak{J}_r(\varepsilon)$ für $\varepsilon \neq 0$ bijektiv. Daraus folgt nach bekannten Sätzen über Fredholmoperatoren die Behauptung.

Ferner benötigen wir noch eine Aussage über die maximale Länge wesentlicher Ketten bei einem Produkt von Operatorscharen. Für unsere Zwecke ist das folgende Lemma ausreichend:

Lemma 3. *Seien* $a(A,\lambda_0)$ *und* $a(B,\lambda_0)$ *definiert; es gelte sogar* $a(A,\lambda_0) + a(B,\lambda_0) \leqq n$. *Dann ist auch* $a(AB,\lambda_0)$ *definiert und genügt den Ungleichungen*

(4) $$a(B,\lambda_0) \leqq a(AB,\lambda_0) \leqq a(A,\lambda_0)+a(B,\lambda_0)\ .$$

Beweis. Setze

$$p := a(A,\lambda_0), \qquad q := a(B,\lambda_0), \qquad s := p+q+1\ .$$

Nach Lemma 1 impliziert $\mathfrak{C}_s x=0$, daß $y:=\mathfrak{B}_s x \in N(\mathfrak{A}_s)\subset Y^s$; wegen $s>p$ ist daher $y_0=\ldots=y_q=0$. Partitioniert man nun $x=(x',x'')^T$, wobei $x' \in X^{q+1}$ und $x'' \in X^p$, so bilden die $(q+1)$ ersten Zeilen von $\mathfrak{B}_s x=y$ gerade $\mathfrak{B}_{q+1}x'=0$; nach Definition von q heißt das $(x')_0=x_0=0$. Also folgt aus $\mathfrak{C}_s x=0$ stets $x_0=0$, und damit die rechte Seite von (4).

Die Abschätzung von $a(AB,\lambda_0)$ nach unten ergibt sich wieder über Lemma 1 aus der für alle r mit $1\leqq r\leqq n+1$ gültigen Implikation $N(\mathfrak{B}_r)\subset N(\mathfrak{C}_r)$.

Die Ungleichungen in (4) können strikt ausfallen; das gilt insbesondere für die Abschätzung nach oben, wie das folgende elementare Beispiel zeigt, das die entsprechende Behauptung aus [7, Theorem 2.4] wiederlegt:

Beispiel 1. Seien $X=Y=Z=K^2$; ferner

$$A(\lambda) := \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad B(\lambda) := \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

also

$$C(\lambda) := \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Dann ist $a(A,0)=a(B,0)=1$, aber $a(C,0)=1<2$!

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu dem angekündigten Additionssatz. Die Grundvoraussetzungen über A und B vom Beginn dieses Abschnitts 2 bleiben weiterhin bestehen.

Theorem. *Seien $a(A,\lambda_0)$ und $a(B,\lambda_0)$ definiert, und es gelte $a(A,\lambda_0)+a(B,\lambda_0)\leqq n$. Außerdem sei B_0 Fredholmoperator mit dem Index* 0. *Dann ist*

$$m(AB,\lambda_0) = m(A,\lambda_0)+m(B,\lambda_0)\ .$$

Beweis. Nach Lemma 3 ist $a(AB,\lambda_0)\leqq n$; daher genügt es, die Lösungsvielfalt von $\mathfrak{C}_n x=0$, bzw. wegen Lemma 1 diejenige von $\mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n x \doteq 0$ zu untersuchen. Wir zeigen, daß $\mathfrak{B}_n x=y$ für jedes $y\in N(\mathfrak{A}_n)$ lösbar ist, und die Lösungsmannigfaltigkeit also die Dimension $\dim N(\mathfrak{A}_n)+\dim N(\mathfrak{B}_n)$ besitzt.

Zur Abkürzung sei wieder $p:=a(A,\lambda_0)$, $q:=a(B,\lambda_0)$ gesetzt. Nach Lemma 2 ist $\mathfrak{B}_k$ für $1\leqq k\leqq n+1$ Fredholmoperator mit dem Index 0. Wegen $\dim N(\mathfrak{B}_q)$

$=\dim N(\mathfrak{B}_{q+1})$ ist also auch $\dim N((\mathfrak{B}_q)^*)=\dim N((\mathfrak{B}_{q+1})^*)$. An der speziellen Gestalt der adjungierten Matrixoperatoren $(\mathfrak{B}_k)^*$ ist leicht abzulesen, daß mit $\varphi \in N((\mathfrak{B}_k)^*)$ stets $(\varphi, 0)^T \in N((\mathfrak{B}_{k+1})^*)$, und für jedes

$$\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1})^T \in N((\mathfrak{B}_n)^*)$$

daher $\varphi_q = \ldots = \varphi_{n-1} = 0$ gilt.

Andererseits impliziert $y \in N(\mathfrak{A}_n)$ stets $y_0 = \ldots = y_{n-p-1} = 0$. Damit läßt sich die Lösbarkeit von $\mathfrak{B}_n x = y$ direkt verifizieren; denn für jedes $y \in N(\mathfrak{A}_n)$ und jedes $\varphi \in N((\mathfrak{B}_n)^*)$ gilt

$$\langle y, \varphi \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \langle y_i, \varphi_i \rangle = \sum_{i=n-p}^{n-1} \langle y_i, \varphi_i \rangle = 0 .$$

In diesem Theorem ist B_0 als Fredholmoperator mit dem Index 0 vorausgesetzt; die Bedingung $a(B, \lambda_0) < \infty$ impliziert dann, daß λ_0 ein in K isolierter Punkt des Spektrums von B ist — im Fall analytischer Parameterabhängigkeit ist sie sogar damit gleichwertig (siehe [9, Satz 1 und 2]). Die Voraussetzungen über die Operatorschar A sind demgegenüber erheblich schwächer. Daher umfaßt das soeben bewiesene Additionstheorem das Theorem 4 aus [11]. Dagegen überschneidet es sich mit Theorem 2.4 aus [7]; denn dort ist A_0 als Fredholmoperator mit dem Index 0 und B als C^∞-Schar vorausgesetzt, andererseits wird jedoch nicht $A \in D_n(\lambda_0)$ gefordert, und der am Ende von Abschnitt 1 erwähnte Sonderfall ist zugelassen.

Etwas schwieriger ist ein Vergleich mit Theorem 6 aus [3] anzustellen. Er ist naturgemäß nur für solche Operatorscharen möglich, die bei λ_0 holomorph sind, und die außerdem wesentliche Ketten nur bis zu einer gewissen Maximallänge besitzen. In diesem Fall beinhalten die Voraussetzungen des Theorems 6 aus [3], daß λ_0 eine Polstelle von B^{-1}, und B_0 Fredholmoperator mit dem Index 0 ist — man kann dies etwa mit Hilfe von [2, Proposition 1.8] und [1, Theorem 2.3 und 3.1] folgern. Gleichzeitig ist dabei die Operatorschar A als »diagonable operator function« vorausgesetzt; das heißt insbesondere, daß A_0 einen abgeschlossenen Bildbereich besitzt (siehe dazu [2, S. 224 ff.] und [3, S. 14 ff.]). Bezüglich A sind die Anforderungen also schärfer als bei dem hier bewiesenen Additionstheorem, während sie bezüglich B wiederum gleichwertig sind.

Die relativ starken Voraussetzungen über B, die bei allen Varianten dieses Satzes auftreten, scheinen prinzipiell bedingt zu sein. Einen Anhalt dafür bietet schon das von E. I. Sigal in [11, Abschnitt 4] gegebene Beispiel. Aber auch ein Tausch der asymmetrischen Bedingungen für A und B im obigen Theorem ist nicht möglich, wenn die Additionseigenschaft erhalten bleiben soll; dies belegt das folgende elementare

Beispiel 2. Seien $X=K$, $Y=Z=K^2$; ferner

$$A(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad B(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$C(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man verifiziert leicht, daß $a(A,0)=2$, $a(B,0)=a(C,0)=1$, sowie $m(A,0)=2$, $m(B,0)=1$ und $m(C,0)=1<3$!

3. Einige Ergänzungen.

Wir wollen die bisherigen Resultate noch kurz in einen anderen Zusammenhang stellen. Seien A, B und $C=AB$ wieder wie zu Beginn von Abschnitt 2 definiert, jeweils Operatorscharen der Klasse $D_n(\lambda_0)$. Falls A_0 oder B_0 stetig invertierbar ist, lassen sich sämtlichen (AB,λ_0)-Ketten direkt mit Hilfe der (A,λ_0)-Ketten und der (B,λ_0)-Ketten angeben (siehe etwa [9, Abschnitt 2]). Im allgemeinen kann man jedoch keine solch einfachen Beziehungen zwischen den Ketten von A, B und C herstellen. Dagegen hat man für die Dimensionszahlen nach Lemma 1 wenigstens die Ungleichungen

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{DIM}\,(B,\lambda_0,r) \leqq \mathrm{DIM}\,(AB,\lambda_0,r) \leqq \mathrm{DIM}\,(A,\lambda_0,r)+\mathrm{DIM}\,(B,\lambda_0,r)$$

für $1\leqq r\leqq n+1$ zur Verfügung. Außerdem bestehen, wie generell bei Dimensionszahlen einer Operatorschar, die Monotoniebedingungen

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{DIM}\,(C,\lambda_0,k) \leqq \mathrm{DIM}\,(C,\lambda_0,k+1) \leqq \mathrm{DIM}\,(C,\lambda_0,k)+\dim N(C_0)$$

für $1\leqq k\leqq n$. Weiter Einschränkungen ergeben sich, wenn $a(A,\lambda_0)$ und $a(B,\lambda_0)$ definiert sind, und daher untere wie obere Schranken in (5) ab einem gewissen Index r_0 stagnieren. Daraus erhalten wir eine ergänzende Aussage über die algebraische Vielfachheit, nämlich das folgende

Lemma 4. *Seien $a(A,\lambda_0)$ und $a(B,\lambda_0)$ definiert; außerdem sei $a(A,\lambda_0)+a(B,\lambda_0)\leqq n$. Dann gilt*

$$\text{(7)} \qquad m(B,\lambda_0) \leqq m(AB,\lambda_0) \leqq m(A,\lambda_0)+m(B,\lambda_0)\,.$$

Beweis. Nach Lemma 3 ist $a(AB,\lambda_0)$ definiert. Wählt man nun $r_0:=a(A,\lambda_0)+a(B,\lambda_0)$, dann ist

$$r_0 \geqq \max\{a(A,\lambda_0), a(B,\lambda_0), a(C,\lambda_0)\}\,,$$

und die Behauptung folgt unmittelbar aus (5).

Die algebraische Vielfachheit verhält sich also bei einem Produkt von Operatorscharen im allgemeinen subadditiv. Unter gewissen zusätzlichen Bedingungen (wie etwa bei dem Theorem aus Abschnitt 2) tritt volle Additivität ein; andererseits kann auch eine echte Ungleichung vorliegen und sogar die untere Schranke in (7) erreicht werden, wie das Beispiel 2 (am Ende des Abschnitts 2) zeigt.

Übrigens ist unter Umständen eine Verbesserung der unteren Schranken in (5) und auch in (7) möglich. Falls nämlich B_0 Fredholmoperator mit dem Index $i(B_0)$ ist, so folgt aus Lemma 1 und 2 leicht die Abschätzung

$$\mathrm{DIM}\,(AB,\lambda_0,r) \geqq \mathrm{DIM}\,(A,\lambda_0,r)+r\cdot i(B_0) \tag{8}$$

für $1 \leqq r \leqq n+1$. Auf weitere Details soll hier aber nicht eingegangen werden.

Schließlich wollen wir im Rahmen dieser Überlegungen noch eine Variante zu Lemma 3 angeben, welche die Abschätzung von $a(AB,\lambda_0)$ nach unten betrifft. Sie ist etwa von Interesse, falls λ_0 Polstelle von A^{-1} und von B^{-1} ist, und man die Ordnung des Poles von C^{-1} vernünftig eingrenzen möchte; gerade eine Aussage über eine gewisse Mindestordnung ist durchaus nicht trivial.

LEMMA 5. *Seien $a(A,\lambda_0)$ und $a(B,\lambda_0)$ definiert, und sogar $a(A,\lambda_0)+a(B,\lambda_0) \leqq n$. Außerdem sei B_0 Fredholmoperator mit dem Index 0. Dann gilt*

$$a(AB,\lambda_0) \geqq \max\{a(A,\lambda_0), a(B,\lambda_0)\} .$$

BEWEIS. Wir setzen wieder $p:=a(A,\lambda_0)$, $q:=a(B,\lambda_0)$, $s:=a(AB,\lambda_0)$, Wegen Lemma 3 genügt es, $s \geqq p$ zu zeigen. Wäre also $s \leqq p$, so hätten wir nach (5)

$$\begin{aligned} m(AB,\lambda_0) &= \mathrm{DIM}\,(AB,\lambda_0,s) \leqq \mathrm{DIM}\,(A,\lambda_0,s)+\mathrm{DIM}\,(B,\lambda_0,s) \\ &< \mathrm{DIM}\,(A,\lambda_0,p)+\mathrm{DIM}\,(B,\lambda_0,q) = m(A,\lambda_0)+m(B,\lambda_0) \end{aligned}$$

im Widerspruch zu dem Theorem aus Abschnitt 2!

Beispiel 2 zeigt, daß die Voraussetzung $i(B_0)=0$ für die Verschärfung gegenüber Lemma 3 wesentlich ist.

LITERATUR

1. H. Bart, *Poles of the resolvent of an operator function*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A, 74 (1974), 169–184.
2. H. Bart, M. A. Kaashoek, and D. C. Lay, *Stability properties of finite meromorphic operator functions* (I, II, III), Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 77 (1974), 217–259.
3. H. Bart, M. A. Kaashoek, and D. C. Lay, *Reduced algebraic multiplicity of operator functions*, University of Maryland, Technical Report TR 74–56 (1974).

4. I. C. Gohberg and E. I. Sigal, *An operator generalization of the logarithmic subtraction and the theorem of Rouché*, Math. USSR-Sb. 13 (1971), 603–625.
5. I. C. Gohberg und E. I. Sigal, *Über die Null-Vielfachheit eines Produktes von meromorphen Operatorfunktionen* [Russisch], Mat. Issled. 6 (1971), 2(20), 33–50.
6. H. Jeggle and W. Wendland, *On the discrete approximation of eigenvalue problems with holomorphic parameter dependance*, Technische Hochschule Darmstadt, (1976). [Überarbeitete englische Fassung des Preprint Nr. 220 (1975)].
7. R. J. Magnus, *A generalization of multiplicity and the problem of bifurcation*, Proc. London Math. Soc. (3), 32 (1976), 251–278.
8. A. S. Markus und E. I. Sigal, *Über die Vielfachheit eines charakteristischen Wertes einer analytischen Operatorfunktion* [Russisch], Mat. Issled. 5 (1970), 3(17), 129–147.
9. P. Sarreither, *Über das Wachstum von Resolventen in der Nähe einer isolierten Singularität*, Manuscripta Math. 11 (1974), 261–272.
10. P. Sarreither, *Transformationseigenschaften endlicher Ketten und allgemeine Verzweigungsaussagen*, Math. Scand. 35 (1974), 115–128.
11. E. I. Sigal, *Über die Vielfachheit eines charakteristischen Wertes eines Produktes von operatorwertigen Funktionen* [Russisch], Mat. Issled. 5 (1970), 1(15), 118–127.
12. E. I. Sigal, *Faktor-Vielfachheit eines charakteristischen Wertes einer meromorphen Operatorfunktion* [Russisch], Mat. Issled. 5 (1970), 4(18), 136–152.

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE
MATHEMATIK UND STATISTIK
AM HUBLAND
D-8700 WÜRZBURG
BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND