MATH. SCAND. 41 (1977), 249–264

VERVOLLSTÄNDIGUNG STRENG AUSGEGLICHENER LIMESVEKTORRÄUME I

STEN BJON[1]

0. Einleitung.

Es werden in dieser Arbeit Vervollständigungen separierter, streng ausgeglichener Limesvektorräume[2] [4] im folgenden Sinne konstruiert: a) Der betrachtete Limesvektorraum E ist in der Vervollständigung $\tilde{E}$ als dichter limitierter Untervektorraum enthalten; b) $\tilde{E}$ ist ein separierter, streng ausgeglichener Limesvektorraum; c) $\tilde{E}$ braucht nur in dem Sinne »vollständig« zu sein, dass jeder quasi-beschränkte (vgl. [6]) Cauchy-Filter konvergiert (wir nennen einen solchen Raum qb-vollständig); d) für jede stetige, lineare Abbildung $f\colon E \to F$ in einen separierten, streng ausgeglichenen, qb-vollständigen Raum F gibt es eine stetige, lineare Abbildung $\tilde{f}$ derart, dass das Diagramm

(A)
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & F \\ \tilde{E} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Fordert man von $\tilde{E}$ Vollständigkeit, so kann die Bedingung a) i.a. nicht erfüllt werden. Es gibt aber in diesem Fall eine stetige, lineare Abbildung $E \to \tilde{E}$, die die Rolle der Einbettung in (A) spielt. Echt vollständige Vervollständigung sind kürzlich in [7] von S. Gähler, W. Gähler und G. Kneis konstruiert worden.

Für topologische Vektorräume und eine weite Klasse von Limesvektorräumen, u.a. die Klasse aller projektiven Limiten von Marinescu-Räumen [10], sind die Begriffe Vollständigkeit und qb-Vollständigkeit äquivalent. Die Vervollständigung eines topologischen Vektorraumes ist aber gleich der klassischen Vervollständigung nur in dem Fall, dass $\tilde{E}/E$ endlichdimensional ist. Es sei hier erwähnt, dass in einer Arbeit, die in

Eingegangen am 27. Oktober, 1976.

[1] Diese Arbeit ist während meines Forschungsaufenthaltes in Mannheim als Stipendiat der *Alexander von Humboldt-Stiftung* entstanden.

[2] In [4] stark ausgeglichene Limesvektorräume genannt.

Vorbereitung ist, Vervollständigungen in einer kleineren Kategorie von Limesvektorräumen behandlet werden und dass jene Theorie eine echte Erweiterung der klassischen Theorie ist.

Wie in der Theorie der lokalkonvexen, topologischen Vektorräume gilt für separierte, ausgeglichene, absolutkonvexe E und F, die einer Abzählbarkeitsbedingung genügen: Jedes Element u in der Vervollständigung $E\tilde{\otimes}F$ des projektiven absolutkonvexen Tensorprodukts (siehe [3]) kann als absolutsummierbare Summe

$$u = \sum_{n\in\mathrm{N}} \lambda_n x_n \otimes y_n$$

dargestellt werden, wobei $\sum|\lambda_n| < \infty$ und die Folgen (x_n) und (y_n) in E bzw. F gegen Null konvergieren.

Die Bezeichnungsweise in dieser Arbeit ist gleich derjenigen in den Arbeiten [2, 3, 4].

An dieser Stelle möchte ich den Herren Prof. Dr. E. Binz und Dr. B. Müller an der Universität Mannheim für zahlreiche wertvolle Diskussionen über das Thema der Arbeit herzlich danken.

1. Vervollständigung separierter, streng ausgeglichener Limesvektorräume.

Es sei $\mathscr{V}\mathscr{L}$ die Kategorie der separierten Limesvektorräume (abgekürz LVR) über dem Körper K der reellen oder komplexen Zahlen und $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}$ die volle Unterkategorie der streng ausgeglichenen LVR. Morphismen in $\mathscr{V}\mathscr{L}$ und $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}$ seien die stetigen linearen Abbildungen. Eine Cauchy-Filter (abgekürzt C-Filter) in einem Raum (E,Λ) in der Objektklasse $|\mathscr{V}\mathscr{L}|$ is bekanntlich ein Filter $\mathscr{C}$ mit $\mathscr{C}-\mathscr{C} \in \Lambda 0$ (siehe [5]). Ein C-Filter $\mathscr{C}$ in (E,Λ) heisst nach [6] *quasi-beschränkt*, falls $V\cdot\mathscr{C} \in \Lambda 0$ ist, wobei V den Nullumgebungsfilter im Skalarkörper K bezeichnet. Es gilt (vgl: [4, Satz 12]):

SATZ 1. *Es sei $\mathscr{C}$ ein C-Filter in $(E,\Lambda) \in |\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}|$. Es gibt dann und nur dann eine Einbettung j: $E \to F$ von (E,Λ) in einen Raum (F,Λ') so dass der Bildfilter $j(\mathscr{C})$ in (F,Λ') konvergiert, wenn $\mathscr{C}$ quasi-beschränkt ist.*

BEWEIS. Wenn eine Einbettung existiert, ist $j(V\mathscr{C}) = Vj(\mathscr{C}) \in \Lambda'0$ und somit $V\mathscr{C} \in \Lambda 0$, d.h. $\mathscr{C}$ ist quasi-beschränkt. Ist umgekehrt $\mathscr{C}$ quasi-beschränkt, so gibt es nach Satz 2 (dessen Beweis sich nicht aus Satz 1 stützt) eine Einbettung j: $E \to \tilde{E}$ in einen Raum $\tilde{E}$, in dem jeder quasi-beschränkte C-Filter konvergiert.

Wir wünschen, dass die Vervollständigung eines Raumes E den Raum E als Unterraum enthält. Auf Grund von Satz 1 führen wir folgenden Definitionen ein:

Definition. Ein Raum $(E, \Lambda) \in |\mathscr{V}\mathscr{L}|$ heisse qb-*vollständig*, wenn alle quasi-beschränkte C-Filter in (E, Λ) konvergieren.

Es seien $\mathscr{K}$ eine Kategorie von separierten LVR, $\mathscr{K}^*$ die volle Unterkategorie der qb-vollständigen Objekte in $\mathscr{K}$, $\mathrm{In}_{\mathscr{K}}: \mathscr{K}^* \to \mathscr{K}$ die Inklusion und $1_{\mathscr{K}}$ der identische Funktor auf $\mathscr{K}$.

Definition. Eine *Vervollständigung* in $\mathscr{K}$ ist ein Funktor $C: \mathscr{K} \to \mathscr{K}^*$ zusammen mit einer natürlichen Transformation $j = (j_E)_{E \in |\mathscr{K}|}: 1_{\mathscr{K}} \to \mathrm{In}_{\mathscr{K}} \circ C$ derart, dass für jedes $E \in |\mathscr{K}|$, $j_E: E \to C(E)$ eine Einbettung ist und $j_E(E)$ dicht in $C(E)$ liegt. Der Raum $C(E)$ wird die Vervollständigung von E genannt.

Im folgenden verwenden wir statt $C(E)$ auch die Bezeichnung $\tilde{E}$ für die Vervollständigung von E.

Wir konstruieren jetzt ein Beispiel eines absolutkonvexen, ausgeglichenen, regulären LVR (E, Λ), in dem nicht alle C-Filter quasi-beschränkt sind. *Absolutkonvex* [2] heisst dabei, dass jeder Filter in $\Lambda 0$ Oberfilter eines Filters in $\Lambda 0$ mit einer Filterbasis aus absolutkonvexen Mengen ist; *ausgeglichen* [6, 2] heisst, dass jeder Filter in $\Lambda 0$ Oberfilter eines Filters $\mathscr{F} \in \Lambda 0$ mit $V \cdot \mathscr{F} = \mathscr{F}$ ist; *regulär* [5] heisst schliesslich, dass mit einem Filter $\mathscr{F}$ auch der von den Adhärenzen $\bar{F}$ der Mengen $F \in \mathscr{F}$ erzeugte Filter $\bar{\mathscr{F}}$ in $\Lambda 0$ liegt.

Beispiel. Wir betrachten einen Hilbertraum H mit einer abzählbaren Hilbertbasis $\{e_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Es seien $\mathbf{N}_*$ die Menge der endlichen Teilmengen der Menge $\mathbf{N} = \{0, 1, \ldots\}$ und

$$B_\varepsilon = \{x \in H \mid \|x\| = (x \mid x) \leqq \varepsilon\} .$$

Für jedes $J \in \mathbf{N}_*$ sei $H_J \subset H$ der von $\{e_n \mid n \in \mathbf{N} \backslash J\}$ erzeugte, abgeschlossene, lineare Unterraum. Wir definieren durch

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_I &= [\{B_\varepsilon \cap H_J \cap E \mid \varepsilon > 0,\ J \in \mathbf{N}_* \text{ und } I \cap J = \varnothing\}] , \\ \Lambda 0 &= [\{\mathscr{F}_I \mid I \in \mathbf{N}_*\}] , \\ \Lambda x &= x + \Lambda 0, \qquad x \in E , \end{aligned}$$

eine Vektorraumlimitierung Λ auf der linearen Hülle E der Hilbertbasis. Sie ist absolutkonvex und ausgeglichen. Die Mengen der Form $B_\varepsilon \cap H_J$ sind abgeschlossen in der Hilbert-Topologie und folglich sind die Mengen $B_\varepsilon \cap H_J \cap E$ abgeschlossen in (E, Λ), weil Λ nach der Konstruktion feiner als die von der Hilbert-Topologie auf E induzierte Topologie ist. Der LVR (E, Λ) ist also regulär. Wir betrachten die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$,

$$x_n = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} e_\nu$$

in (E, Λ). Es sei x der Limes der Folge in der Hilbert-Topologie und $r_n = x - x_n$. Für festes $I \in \mathsf{N}_*$ und jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $J \in \mathsf{N}_*$ mit $I \cap J = \emptyset$ kann ein $n_0 \in \mathsf{N}$ so gewählt werden, dass $J \subset [0, n_0]$ und $x_m - x_n \in B_\varepsilon$ für jedes $m, n \geqq n_0$. Dann ist $x_m - x_n = r_n - r_m \in H_J \cap B_\varepsilon$ für alle $m, n \geqq n_0$, d.h. für den von der Folge (x_n) definierten Elementarfilter $\mathscr{E}$ gilt: $\mathscr{E} - \mathscr{E} \geq \mathscr{F}_I$. Er ist somit ein C-Filter in (E, Λ).

Wäre der Filter $\mathscr{E}$ quasi-beschränkt, so gäbe es ein $I \in \mathsf{N}_*$ mit $V \cdot \mathscr{E} \geq \mathscr{F}_I$. Für jedes $J \in \mathsf{N}_*$ mit $J \cap I = \emptyset$ gäbe es also ein n_0, so dass $x_n \in H_J \cap E$ für alle $n \geqq n_0$ wäre. Da jedes H_J abgeschlossen ist, gälte nun

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1} e_\nu = \lim x_n \in \bigcap \{H_J \cap E \mid J \in \mathsf{N}_* \text{ und } J \cap I = \emptyset\} ,$$

d.h. x wäre in der linearen Hülle der Menge $\{e_\nu \mid \nu \in I\}$, was offenbar nicht wahr ist. Der C-Filter $\mathscr{E}$ ist demnach nicht quasi-beschränkt in (E, Λ).

Es sei $(E, \Lambda) \in |\mathscr{V}\mathscr{E}|$ und Ω die Menge der quasi-beschränkten C-Filter in (E, Λ). Zwei C-Filter $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ in Ω heissen äquivalent ($\mathscr{C} \sim \mathscr{D}$), wenn $\mathscr{C} - \mathscr{D} \in \Lambda 0$ ist. Da die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist (vgl. [5]), können wir die Quotientenmenge $\tilde{E} = \Omega / \sim$ bilden. In dieser können wir auch lineare Operationen einführen: Sind c and d die Äquivalenzklassen des C-Filters $\mathscr{C}$ bzw. $\mathscr{D}$ in Ω, wird ihre Summe $c + d$ als die Äquivalenzklasse von $\mathscr{C} + \mathscr{D}$ und für beliebiges $\lambda \in \mathsf{K}$ das Produkt λc als die Äquivalenzklasse von $\lambda \mathscr{C}$ definiert. Man verifiziert leicht, dass die hierdurch erklärten Operationen wohldefiniert sind und dass $\tilde{E}$, versehen mit diesen Operationen, ein Vektorraum über K ist.

Für jedes $x \in E$ sei $j(x)$ die Äquivalenzklasse des C-Filters $\dot{x} = [\{\{x\}\}]$. Die hierdurch definierte Abbildung $j \colon E \to \tilde{E}$ ist offensichtlich linear und — weil (E, Λ) separiert ist — auch injektiv.

Es seien jetzt L ein Komplementärraum von $j(E)$ in $\tilde{E}$ und B eine Vektorraumbasis von L. Für jedes A in der Menge B_* der endlichen Teilmengen von B sei E_A der von $j(E) \cup A$ erzeugte lineare Unterraum von $\tilde{E}$. Weiter werde für jedes $A \in B_*$ eine Abbildung $\bar{\gamma}_A \colon \tilde{E} \to \mathsf{F}(E)$ durch

$$\bar{\gamma}_A(z) = \dot{x} + \sum_{a \in A} \lambda_a \mathscr{H}_a, \quad \text{falls } z = j(x) + \sum_{a \in A} \lambda_a a \in E_A \text{ ist},$$

$$\bar{\gamma}_A(z) = [\{E\}], \quad \text{falls } z \in \tilde{E} \setminus E_A \text{ ist},$$

definiert. Dabei ist $(\mathscr{H}_a)_{a \in B}$ eine beliebig gewählte, aber feste Familie von C-Filtern mit $\mathscr{H}_a \in a$ für jedes $a \in B$. Jede Abbildung $\bar{\gamma}_A \colon E \to \mathsf{F}(E)$ definiert durch (vgl. [1])

$$\bar{k}_A(X) = \{z \in \tilde{E} \mid X \in \bar{\gamma}_A(z)\}, \qquad X \in \mathscr{P}(E),$$

eine Abbildung $\bar{k}_A: \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(\tilde{E})$ zwischen den Potenzmengen $\mathscr{P}(E)$ und $\mathscr{P}(\tilde{E})$. Für beliebige X und Y in $\mathscr{P}(E)$ gilt: $\bar{k}_A(X \cap Y) = \bar{k}_A(X) \cap \bar{k}_A(Y)$. Ausserdem gilt: Sind P und R in B_* und ist $P \subset R$, dann ist $\bar{k}_P(X) \subset \bar{k}_R(X)$ für $X \in \mathscr{P}(E)$, weil $\bar{\gamma}_P(z) \leq \bar{\gamma}_R(z)$ für jedes $z \in \tilde{E}$ ist. Durch (vgl. [14, S. 86])

$$\tilde{\Lambda}z = z + \tilde{\Lambda}0, \qquad z \in \tilde{E},$$

$$\tilde{\Lambda}0 = \{\mathscr{F} \in \mathsf{F}(\tilde{E}) \mid \exists\, \mathscr{G} \in \Lambda 0 \text{ und } \exists\, A \in B_* \text{ mit } \mathscr{F} \geq [\bar{k}_A(\mathscr{G})]\}$$

wird eine Limitierung $\tilde{\Lambda}: \tilde{\mathrm{E}} \to \mathscr{P}(\mathsf{F}(\tilde{E}))$ auf $\tilde{E}$ definiert. $\tilde{\Lambda}$ ist tatsächlich eine Limitierung. Für jedes P und R in B_* und beliebige Filter $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ in $\Lambda 0$ ist nämlich

$$[\bar{k}_P(\mathscr{F})] \cap [\bar{k}_R(\mathscr{G})] \geq [\bar{k}_{P \cup R}(\mathscr{F} \cap \mathscr{G})].$$

Der Durchschnitt zweier Filter in $\tilde{\Lambda}z$, $z \in \tilde{E}$, ist also in $\tilde{\Lambda}z$. Die übrigen Axiomen einer Limitierung sind ebenfalls erfüllt: Jeder Oberfilter eines Filters in $\tilde{\Lambda}z$ ist in $\tilde{\Lambda}z$ und der triviale Ultrafilter $\dot{z}$ ist in $\tilde{\Lambda}z$.

Der Limesraum $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ ist, was ja aus der Konstruktion folgt, induktiver Limes in der Kategorie der Limesräume [10] der Unterräume (E_A, Λ_A):

(1) $$(\tilde{E}, \tilde{\Lambda}) = \operatorname*{ind}_{A \in B_*} (E_A, \Lambda_A).$$

Für jedes $A \in B_*$ ist

$$\Lambda_A 0 = \{\mathscr{F} \in \mathsf{F}(E_A) \mid \exists\, \mathscr{G} \in \Lambda 0 \text{ mit } \mathscr{F} \geq [\bar{k}_A(\mathscr{G})]\},$$

wo $k_A: \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E_A)$ die von der Restriktion γ_A von $\bar{\gamma}_A$ auf E_A definierte Abbildung ist. Für jedes $X \in \mathscr{P}(E)$ ist also $k_A(X) = \{z \in E_A \mid X \in \gamma_A(z)\}$. Die Abbildung γ_A $(A \in B_*)$ hat die Eigenschaften:

(2) $$\gamma_A(x) + \gamma_A(y) \leq \gamma_A(x+y), \qquad x \in E_A,\ y \in E_A,$$

(3) $$\gamma_A(\lambda x) = \lambda \gamma_A(x),\ x \in E_A, \qquad \lambda \in \mathsf{K}.$$

Aus (2) und (3) folgt:

(4) $$k_A(X) + k_A(Y) \subset k_A(X+Y), \qquad X \in \mathscr{P}(E),\ Y \in \mathscr{P}(E),$$

(5) $$k_A(\lambda X) = \lambda k_A(X), \qquad X \in \mathscr{P}(E),\ \lambda \in \mathsf{K}.$$

Wir beweisen z.B. (4). Der Beweis von (5) erfolgt mit Hilfe von (3) auf ähnlicher Weise. Ist $z = x + y \in k_A(X) + k_A(Y)$ mit $x \in k_A(X)$ und $y \in k_A(Y)$, dann ist $X + Y \in \gamma_A(x+y) = \gamma_A(z)$ nach (2) und folglich $z \in k_A(X+Y)$.

Das Ziel unserer Bestrebungen ist der

Satz 2. *Es gibt eine* (bis auf Isomorphie eindeutige) *Vervollständigung in der Kategorie* $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}$.

Wir beweisen den Satz schrittweise durch Lemma 1 bis 3 um den Vorgang übersichtlicher zu machen.

Lemma 1. *Der Raum* $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ *in* (1) *ist ein separierter streng ausgeglichener* LVR *und die lineare Abbildung* $j\colon (E, \Lambda) \to (\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ *ist eine Einbettung.* $j(E)$ *ist ein dichter Unterraum von* $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$.

Im folgenden schreiben wir statt $[k_A(\mathscr{F})]$ kurz $k_A(\mathscr{F})$.

Beweis. Der Raum $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ ist ein LVR, falls jedes (E_A, Λ_A), $A \in B_*$, ein LVR ist. Es sei $A \in B_*$ beliebig. Für jedes $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ in $\Lambda 0$ ist nach (4)

$$k_A(\mathscr{F}) + k_A(\mathscr{G}) \geq k_A(\mathscr{F} + \mathscr{G}) .$$

Die Summe zweier Filter in $\Lambda_A 0$ ist demnach auch in $\Lambda_A 0$. Ist $\mathscr{F} + \mathscr{F} = \mathscr{F}$ und $\mathscr{F} \leq \dot{0}$, so gilt speziell: $k_A(\mathscr{F}) + k_A(\mathscr{F}) = k_A(\mathscr{F})$. Nach (5) ist $\lambda k_A(\mathscr{F}) = k_A(\lambda\mathscr{F})$ für jedes $\lambda \in \mathsf{K}$ und $\mathscr{F} \in \Lambda 0$, d.h. mit einem Filter $\mathscr{F}$ ist auch $\lambda\mathscr{F}$ in $\Lambda_A 0$ für jedes $\lambda \in \mathsf{K}$. Es sei für $\varepsilon > 0$ K_ε der Kreis $\{\lambda \in \mathsf{K} \mid |\lambda| \leqq \varepsilon\}$ und $F \in \mathscr{F} \in \Lambda 0$ kreisförmig. Dann ist nach (5)

$$K_1 k_A(F) = \bigcup_{|\lambda|=1} \lambda k_A(F) = \bigcup_{|\lambda|=1} k_A(\lambda F) = k_A(F) .$$

Die Menge $k_A(F)$ ist also kreisförmig und für jedes $\varepsilon > 0$ ist folglich $K_\varepsilon k_A(F) = k_A(K_\varepsilon F)$. Hat $\mathscr{F}$ eine Basis aus kreisförmigen Mengen, so ist $V k_A(\mathscr{F}) = k_A(\mathscr{F})$.

Es sei $z \in E_A$. Für jedes $G \in \gamma_A(z)$ ist $z \in k_A(G)$, d.h. es gilt $\dot{z} \geq k_A(\gamma_A(z))$. Da $\gamma_A(z)$ ein C-Filter ist, gibt es ein $\mathscr{F} \in \Lambda 0$ mit $\gamma_A(z) - \gamma_A(z) \geq \mathscr{F}$. Nach (4) und (5) ist nun

$$k_A(\gamma_A(z)) - \dot{z} \geq k_A(\gamma_A(z)) - k_A(\gamma_A(z)) \geq k_A(\mathscr{F}) .$$

Weil $k_A(X) \cap j(E) = j(X)$ für jede Teilmenge $X \subset E$ ist, so gilt:

$$j(\gamma_A(z)) \geq \dot{z} + k_A(\mathscr{F}) . \tag{6}$$

Man erhält auch die Relation $\dot{z} \geq k_A(\mathscr{F}) - j(\gamma_A(z))$ und daraus $Vz \geq k_A(V\mathscr{F}) - j(V\gamma_A(z))$. Da $k_A(X) \cap j(E) = j(X)$ für $X \subset E$ ist, so sind die Filter in $\Lambda 0$ genau die inversen Bilder unter j von den Filtern $k_A(\mathscr{F})$, $\mathscr{F} \in \Lambda 0$, in $\Lambda_A 0$. Die Abbildung $j\colon (E, \Lambda) \to (E_A, \Lambda_A)$ ist also eine Einbettung. Da $\gamma_A(z)$ quasibeschränkt ist, so ist folglich $Vz \in \Lambda_A 0$. Die Limitierung Λ_A hat somit alle Eigenschaften einer streng ausgeglichenen Vektorraumlimitierung. Sie ist auch separiert. Nach [15, Satz II.1] ist Λ_A separiert, falls aus $\dot{z} \in \Lambda_A 0$ folgt $z=0$: Ist $\dot{z} \geq k_A(\mathscr{F})$, $z \in E_A$, $\mathscr{F} \in \Lambda 0$, so ist $\mathscr{F} \leq \gamma_A(z)$, und da (E,Λ) separiert ist und $\gamma_A(z)$ für $z \notin j(E)$ nicht konvergiert, muss $z=0$ sein. Da jedes (E_A, Λ_A) separiert ist, so ist der induktive Limes (E,Λ) separiert. Weil jedes (E_A, Λ_A), $A \in B_*$, ein Unterraum von $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ ist, so ist j: $(E,\Lambda) \to (\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ eine Einbettung. Nach (6) ist der Bildraum $j(E)$ dicht in jedem (E_A, Λ_A), $A \in B_*$. Er ist folglich auch dicht in (E, Λ).

LEMMA 2. *Der* LVR $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ *ist* qb-*vollständig.*

BEWEIS. Es sei $\mathscr{C}$ ein C-Filter in $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$. Dann gibt es ein $A \in B_*$ und ein $\mathscr{F} \in \Lambda 0$, so dass für $F \in \mathscr{F}$ ein $C \in \mathscr{C}$ mit $C - C \subset k_A(F)$ existiert. Für ein festes $c \in C$ sei $P \in B_*$ so gewählt, dass $c \in E_P$ und $P \supset A$ ist. Man erhält:

$$C \subset c + k_A(F) \subset E_P .$$

Der Filter $\mathscr{C}$ hat also eine Spur $\mathscr{D}$ auf E_P. Nach dieser Überlegung genügt es, um die qb-Vollständigkeit von $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ festzustellen, zu zeigen, dass jeder quasi-beschränkte C-Filter $\mathscr{D}$ in einem (beliebigen) Raum (E_A, Λ_A), $A \in B_*$, dem Bildfilter $j(\mathscr{E})$ eines quasi-beschränkten C-Filters $\mathscr{E}$ in (E, Λ) äquivalent ist. Weil $j(\mathscr{E})$ nach (6) in einem Raum (E_R, Λ_R), $R \supset A$, konvergiert, so ist nach [6, S. 295] der von $\mathscr{D}$ in (E_R, Λ_R) erzeugte C-Filter konvergent und $\mathscr{C}$ in $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ konvergent.

Es sei jetzt $\mathscr{D}$ ein quasi-beschränkter C-Filter in (E_A, Λ_A). Es gibt ein $\mathscr{F} \in \Lambda 0$ mit $\mathscr{F} + \mathscr{F} = \mathscr{F}$, so dass $\mathscr{H}_a - \mathscr{H}_a \geq \mathscr{F}$ für jedes $a \in A$ ist. Für jedes $z \in E_A$ ist nun $\gamma_A(z) - \gamma_A(z) \geq \mathscr{F}$. Weil damit die Beziehung (6) für jedes $z \in E_A$ gilt, so ist

$$(z + k_A(F)) \cap j(E) \neq \varnothing \qquad \text{für jedes } z \in E_A \text{ und jedes } F \in \mathscr{F} .$$

Der Filter $\mathscr{D} + k_A(\mathscr{F})$ hat somit eine Spur auf $j(E)$. Das inverse Bild $\mathscr{E}$ unter j von $\mathscr{D} + k_A(\mathscr{F})$ ist dann ein quasi-beschränkter C-Filter in (E, Λ) und $j(\mathscr{E})$ und $\mathscr{D}$ sind äquivalente C-Filter in (E_A, Λ_A). Lemma 2 ist damit bewiesen.

LEMMA 3. *Für jede stetige, lineare Abbildung* f: $(E, \Lambda) \to (F, \Lambda')$ *in einen* qb-*vollständigen Raum* $(F, \Lambda') \in |\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}|$ *gibt es eine stetige, lineare Abbildung* $\tilde{f}$: $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda}) \to (F, \Lambda')$, *so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{E} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & F \end{tikzcd}$$

kommutiert.

BEWEIS. Da $(\tilde{E},\tilde{\Lambda})$ der induktive Limes der Unterräume (E_A,Λ_A) ist, so genügt es zu zeigen, dass es für jedes $A \in B_*$ eine stetige, lineare Abbildung $f_A\colon (E_A,\Lambda_A) \to (F,\Lambda')$ gibt, so dass $f=f_A\circ j$ und $f_{A'}\circ i_{A'A}=f_A$ für jedes $A, A' \in B_*$ mit $A\subset A'$ ist. Für jedes $A \in B_*$ sei $f_A(z)$, $z \in E_A$, als Limes des quasibeschränkten C-Filters $f(\gamma_A(z))$ definiert. Man erkennt sofort, dass f_A ausser der Stetigkeit alle die oben genannten Eigenschaften hat. Die Stetigkeit fordert eine Begründung. Wir wollen beweisen, dass für $\mathscr{F} \in \Lambda 0$ der Filter $f_A(k_A(\mathscr{F}))$ in $\Lambda'0$ ist. Zu diesem Zweck sei ein Filter $\mathscr{G} \in \Lambda'0$ mit $\mathscr{G}+\mathscr{G}=\mathscr{G}$ und $V\mathscr{G}=\mathscr{G}$ so gewählt, dass $f(\mathscr{H}_a)-f_A(a)\geq \mathscr{G}$ für jedes $a \in A$ ist. Aus $z \in k_A(F)$ folgt: $f(F) \in f(\gamma_A(z))$. Weil $f(\gamma_A(z))\geq f_A(z)+\mathscr{G}$ für jedes $z \in E_A$ ist, gilt:

$$f_A(z) \in f(F)-G \qquad \text{für alle } G \in \mathscr{G}\,.$$

Es ist somit $f_A(k_A(F))\subset f(F)-G$ für jedes $F \in \mathscr{F}$ und jedes $G \in \mathscr{G}$, d.h. es ist

$$f_A(k_A(\mathscr{F})) \geq f(\mathscr{F})-\mathscr{G} \in \Lambda'0\,.$$

Die Abbildung f_A ist demnach stetig.

Die Abbildung $\tilde{f}$ ist die einzige stetige lineare Abbildung mit der Eigenschaft in Lemma 3, weil j den Raum (E,Λ) dicht in $(\tilde{E},\tilde{\Lambda})$ einbettet.

BEWEIS VON SATZ 2. Für jedes $E \in |\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}|$ sei $j_E\colon E \to \tilde{E}$ die injektive, stetige, lineare Abbildung, die wir oben betrachtet haben. Ein Funktor $C\colon \mathscr{V}\bar{\mathscr{E}} \to \mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}^*$ wird folgendermassen definiert: Für jedes $(E,\Lambda) \in |\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}|$ sei $C(E,\Lambda) = (\tilde{E},\tilde{\Lambda})$, und für jede stetige lineare Abbildung $f\colon (E,\Lambda) \to (F,\Lambda')$ zwischen Objekten in $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}$ sei $C(f)=(j_F\circ f)^{\sim}$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j_E"] \arrow[d, "f"'] & C(E) \arrow[d, "C(f)"] \\ F \arrow[r, "j_F"] & C(F) \end{tikzcd}$$

ist für alle $E,F \in |\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}|$ und jedes stetige lineare $f\colon E \to F$ kommutativ, d.h. $j=(j)\colon 1_{\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}} \to \mathrm{In}_{\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}}\circ C$ ist eine natürliche Transformation. Der Funktor zusammen mit j ist somit eine Vervollständigung in $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}$.

2. Die Vervollständigung spezieller Objekte in $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}$.

Der Begriff des absolutkonvexen LVR sowie der Begriff des ausgeglichenen LVR wurden im vorigen Abschnitt erklärt. Es sei (E,Λ) ein ausgeglichener, absolutkonvexer LVR. Ist $\mathscr{G} \in \Lambda 0$ ein Filter mit $V\mathscr{G}=\mathscr{G}$, so gilt $V\mathscr{F}=\mathscr{F}$ und $\mathscr{F} \in \Lambda 0$ für den von den absolutkonvexen Mengen in $\mathscr{G}$ erzeugten Filter $\mathscr{F}$.

Weil $F+F=2F$ für jede absolutkonvexe Menge $F \subset E$ ist, so ist $\mathscr{F}+\mathscr{F}=\mathscr{F}$. Jeder ausgeglichene, absolutkonvexe LVR ist somit streng ausgeglichen.

SATZ 3. *Die Vervollständigung $(\tilde{E},\tilde{\Lambda})$ in $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}$ eines separierten, ausgeglichenen, absolutkonvexen* LVR *(E,Λ) ist ausgeglichen und absolutkonvex.*

BEWEIS. Wir verwenden die Bezeichnungen des vorigen Abschnitts. Es genügt zu zeigen, dass jeder Raum (E_A,Λ_A), $A \in B_*$, ausgeglichen und absolutkonvex ist, wenn dies für den Raum (E,Λ) gilt. Es sei $D \subset E$ eine absolutkonvexe Menge. Für alle $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathsf{K}$ mit $|\lambda_1|+|\lambda_2|=1$ ist dann nach (4) und (5)

$$k_A(D) = k_A(\lambda_1 D+\lambda_2 D) \supset \lambda_1 k_A(D)+\lambda_2 k_A(D)\,,$$

d.h. $k_A(D)$ ist absolutkonvex. Der Filter $k_A(\mathscr{F})$ hat also eine Basis aus absolutkonvexen Mengen, wenn $\mathscr{F} \in \mathsf{F}(E)$ eine solche Basis hat. In dem Beweis von Lemma 1 wurde gezeigt, dass $Vk_A(\mathscr{F})=k_A(V\mathscr{F})$ ist, falls $\mathscr{F} \in \mathsf{F}(E)$ eine Basis aus kreisförmigen Mengen besitzt. Die Vervollständigung $(\tilde{E},\tilde{\Lambda})$ ist folglich ausgeglichen und absolutkonvex.

Eine *pseudotopologische Vereinigung* [10, 13] ist ein induktiver Limes (in der Kategorie $\mathscr{V}\mathscr{L}$) von topologischen Vektorräumen. Es ist klar, dass jede pseudotopologische Vereinigung streng ausgeglichen ist. Nach [12, S. 114] gilt sogar: Ein LVR (E,Λ) ist genau dann eine pseudotopologische Vereinigung, wenn jeder Filter in $\Lambda 0$ Oberfilter eines Filters $\mathscr{F} \in \Lambda 0$ mit $\mathscr{F}+\mathscr{F}=\mathscr{F}$, $V\mathscr{F}=\mathscr{F}$ und

$$\bigcap_{F\in\mathscr{F}} \mathsf{K}F \in \mathscr{F} \tag{7}$$

ist.

SATZ 4. *Die Vervollständigung in $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}$ einer separierten pseudotopologischen Vereinigung ist eine pseudotopologische Vereinigung.*

BEWEIS. Es seinen (E,Λ) eine pseudotopologische Vereinigung, $A \in B_*$ beliebig, $\mathscr{F} \in \Lambda 0$, $\mathscr{F} \le \dot{0}$, ein Filter, für den $\gamma_A(z)-\gamma_A(z) \ge \mathscr{F}$ für jedes $z \in E_A$ ist und für den die Relationen $\mathscr{F}+\mathscr{F}=\mathscr{F}$, $V\mathscr{F}=\mathscr{F}$ und (7) gelten. Wie aus dem Beweis von Lemma 1 hervorgeht, ist

$$k_A(\mathscr{F})+k_A(\mathscr{F}) = k_A(\mathscr{F}) \quad \text{und} \quad Vk_A(\mathscr{F}) = k_A(\mathscr{F})\,.$$

Für jedes kreisförmige $F \in \mathscr{F}$ ist $k_A(\mathsf{K}F) \subset \mathsf{K}k_A(F)$. Ist nämlich $z \in k_A(\mathsf{K}F)$, so gibt es ein $W \in \gamma_A(z)$ mit $W \subset \mathsf{K}F$ und $W-W \subset F$. Für beliebiges $w=\lambda x \in W$, $x \in F$ is dann $F \in \gamma_A(z-\lambda x)$, d.h. es ist

$$z \in \lambda x + k_A(F) \subset \mathsf{K} k_A(F)\,.$$

Der Durchschnitt der Mengen $\mathsf{K}\cdot k_A(F)$, $F \in \mathscr{F}$, enthält die Menge $k_A(F_0)$, wobei F_0 den Durchschnitt in (7) bezeichnet, und ist somit eine Menge in $k_A(\mathscr{F})$. Die Vervollständigung ist eine pseudotopologische Vereinigung nach [12, S. 114].

Ein *Marinescu-Raum* [10] ist eine pseudotopologische Vereinigung lokalkonvexer, topologischer Vektorräume.

KOROLLAR 4.1. *Die Vervollständigung in $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}$ eines separierten Marinescu-Raumes ist ein Marinescu-Raum.*

Jede Vektorraumlimitierung Λ auf einem Vektorraum E über K definiert eine *Vektorraumbornologie* auf E [8], nämlich die Bornologie

$$\mathscr{B}_\Lambda = \{X \subset E \mid VX \in \Lambda 0\}$$

der beschränkten Mengen in (E, Λ) (siehe [9]).

DEFINITION. Ein LVR (E, Λ) in einer Kategorie $\mathscr{K}$ von LVR heisse *$\mathscr{K}$-bornologisch* (*bornologisch in $\mathscr{K}$*), falls Λ die feinste unter allen Vektorraumlimitierungen Λ' ist, für die $(E, \Lambda') \in |\mathscr{K}|$ ist und alle $X \in \mathscr{B}_\Lambda$ in (E, Λ') beschränkt sind.

Jede Vektorraumbornologie $\mathscr{B}$ auf einem Vektorraum E definiert eine Vektorraumlimitierung $\Lambda_{\mathscr{B}}$ auf E. Das Ideal $\Lambda_{\mathscr{B}}0$ ist dabei als die Menge $\{\mathscr{F} \in \mathsf{F}(E) \mid \exists\, X \in \mathscr{B} \text{ mit } \mathscr{F} \geq VX\}$ derjeniger Filter auf E definiert, die bezüglich $\mathscr{B}$ gegen Null Mackey-konvergieren [8, 9]. Diese Limitierung ist offensichtlich die feinste Vektorraumlimitierung auf E, für die alle $X \in \mathscr{B}$ beschränkt sind.

Es sei jetzt der Raum (E, Λ) bornologisch in der Kategorie der absolutkonvexen LVR. Weiter seien χ eine Basis der Bornologie $\mathscr{B}_\Lambda$, die nur absolutkonvexe Mengen enthält und $E_X \subset E$ für jedes $X \in \chi$ der linearen Unterraum $\mathsf{K}X$. Dann ist VX Nullumgebungsfilter in bezug auf eine seminormierte Vektorraumtopologie τ_X auf E_X. Der induktive Limes (in der Kategorie der LVR der Räume (E_X, τ_X) nach den Inklusionen $E_X \to E_Y$, $X \subset Y$, ist absolutkonvex (und ausgeglichen) und somit gleich (E, Λ).

SATZ 5. *Die Vervollständigung in $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}$ eines separierten Raumes (E, Λ), der bornologisch in der Kategorie der absolutkonvexen* LVR *ist, ist bornologisch in derselben Kategorie.*

BEWEIS. Das Ideal $\Lambda 0$ besteht genau aus den Oberfiltern von Filtern VX, wobei X die Menge χ der absolutkonvexen beschränkten Teilmengen von E durchläuft. Mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnitts ist für beliebiges $A \in B_*$, $k_A(VX) = Vk_A(X)$. Die Limitierung Λ_A auf E_A wird also von der Bornologiebasis $\{k_A(X) \mid X \in \chi\}$ definiert. Der induktive Limes der Räume (E_A, Λ_A) — d.h. die Vervollständigung — ist folglich gleich $(\tilde{E}, \Lambda_{\mathscr{B}})$, wo $\mathscr{B}$ die Bornologie

$$\{Z \subset \tilde{E} \mid \exists X \in \chi, \exists A \in B_* \text{ mit } Z \supset k_A(X)\}$$

bezeichnet. Im Beweis von Satz 3 wurde gezeigt, dass $k_A(X)$, $X \in \chi$, absolutkonvex ist.

Die Vervollständigung in Satz 4, Korollar 4.1 und Satz 5 sind nach Satz 6 (a) nicht nur qb-vollständig sondern vollständig.

SATZ 6. (a) *Es sei (E, Λ) der induktive Limes eines induktiven Spektrums $((E_\iota, \Lambda_\iota), i_{\varkappa\iota})_{\iota \in I}$ in der Kategorie der* LVR. *Falls die Abbildungen $i_{\varkappa\iota}$ injektiv sind, so ist jeder* C-*Filter in (E, Λ) quasi-beschränkt, wenn dies in jedem (E_ι, Λ_ι), $\iota \in I$, gilt.*

(b) *Es sei (E, Λ) der projektive Limes eines projektiven Spektrums $((E_\iota, \Lambda_\iota), p_{\iota\varkappa})_{\iota \in I}$ in der Kategorie der* LVR. *Jeder* C-*Filter in (E, Λ) ist quasi-beschränkt, wenn dies in jedem (E_ι, Λ_ι), $\iota \in I$ gilt.*

BEWEIS. (a) Es sei für jedes $\iota \in I$, i_ι: $E_\iota \to E$ die kanonische Abbildung und $\mathscr{C}$ ein C-Filter in (E, Λ). Es gibt dann ein $\iota \in I$ und ein $\mathscr{F} \in \Lambda_\iota 0$ mit $\mathscr{C} - \mathscr{C} \geq i_\iota(\mathscr{F})$. Für beliebiges $F \in \mathscr{F}$ gibt es ein $C \in \mathscr{C}$, so dass für beliebiges $c \in C$, $C \subset c + i_\iota(F)$ ist. Wählen wir nun $\varkappa \in I$, $\varkappa \geq \iota$, so dass $c \in i_\varkappa(E_\varkappa)$ ist, so gilt: $C \subset i_\varkappa(E_\varkappa)$. Der Filter $i_\varkappa^{-1}(\mathscr{C})$ ist ein C-Filter in $(E_\varkappa, \Lambda_\varkappa)$, weil $i_\varkappa$ injektiv ist. Dieser Filter ist quasi-beschränkt, und da

$$\mathscr{C} \geq i_\varkappa(i_\varkappa^{-1}(\mathscr{C})) + \mathscr{G} \qquad \text{für ein } \mathscr{G} \in \Lambda 0$$

ist, so ist auch $\mathscr{C}$ quasi-beschränkt.

(b) Es sei p_ι: $E \to E_\iota$, die kanonische Abbildung und $\mathscr{C}$ ein C-Filter in (E, Λ). Dann ist für jedes $\iota \in I$, $p_\iota(\mathscr{C})$ ein C-Filter in (E_ι, Λ_ι) und somit $p(V\mathscr{C}) = Vp_\iota(\mathscr{C}) \in \Lambda_\iota 0$. Es ist also $V\mathscr{C} \in \Lambda 0$, d.h. $\mathscr{C}$ ist quasi-beschränkt.

Die Vervollständigung in $\mathscr{V}\mathscr{E}$ eines topologischen Vektorraumes ist i.a. nicht gleich der klassischen Vervollständigung.

SATZ 7. *Die Vervollständigung in $\mathscr{V}\mathscr{E}$ eines topologischen Vektorraumes (E, τ) ist genau dann ein topologischer Vektorraum, wenn $\tilde{E}/j(E)$ endlich-dimensional ist.*

Beweis. Ist $\tilde{E}/j(E)$ endlichdimensional, so ist $B \in B_*$, und $k_B(\mathscr{U})$ ($\mathscr{U}$ ist der Nullumgebungsfilter in (E,τ)) ist dann der gröbste Filter, der in der Vervollständigung gegen Null konvergiert. Die Vervollständigung trägt eine Hauptideallimitierung [5] und ist damit nach [6] topologisch. Ist andererseits $\tilde{E}/j(E)$ unendlichdimensional, so ist der Vervollständigung nach (1) induktiver Limes echter Unterräume und ist somit nicht topologisch.

Es sei (E,Λ) ein ausgeglichener, absolutkonvexer LVR. In [2] wurde gezeigt, dass die Limitierung Λ durch einen Filter ψ (*definierender Filter*) auf der Menge $Q(E)$ der Pseudonormen $q\colon E \to \mathsf{R}_+$ (=Menge der nicht-negativen reellen Zahlen und $+\infty$) definiert werden kann. Hier in dieser Arbeit bezeichnet »definierender Filter« immer den Filter ψ der Mengen $M \subset Q(E)$, für die

$$\mathscr{F}_M = [\{U_q \mid q \in M\}] \in \Lambda 0\,,$$

wobei $U_q = q^{-1}[0,1]$ ist.

Lemma 4. *Es sei (E,Λ) ein ausgeglichener, absolutkonvexer* LVR *mit dem definierenden Filter ψ. Für jedes $A \in B_*$ sei $M^{(A)} \in \psi$ eine Menge mit $\gamma_A(z) - \gamma_A(z) \geq \mathscr{F}_{M^{(A)}}$ für jedes $z \in E_A$* (so eine Zuordnung existiert!). *Der Filter $\tilde{\psi}$, der durch*

$$q_A(z) = \begin{cases} \lim q(\gamma_A(z)), & \textit{falls } z \in E_A \textit{ ist,} \\ \infty, & \textit{falls } z \in E \backslash E_A \textit{ ist,} \end{cases} \qquad (q \in M^{(A)})$$

$$M_A = \{p \in Q(E) \mid \exists\, q \in M \textit{ mit } p \leqq q_A\}, \qquad (M \subset M^{(A)})$$

$$\tilde{\psi} = [\{M_A \mid A \in B_*,\ M \in \psi \textit{ und } M \subset M^{(A)}\}]\,,$$

erklärt wird, ist definierender Filter für $\tilde{\Lambda}$ [3].

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass der Filter $q(\gamma_A(z))$ für jedes $q \in M^{(A)}$ konvergiert. Aufgrund der speziellen Wahl der Menge $M^{(A)}$ gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $C \in \gamma_A(z)$ mit $C - C \subset \varepsilon U_q$. Ist nun $q(x)$ endlich für irgendein $x \in C$, so ist auch

$$q(y) \leqq q(y-x) + q(x) \leqq \varepsilon + q(x)$$

endlich für jedes $y \in C$. In diesem Fall ist $q(\gamma_A(z))$ aufgrund der Relation

$$|q(C) - q(C)| \subset q(C-C) \subset [0,\varepsilon]$$

ein C-Filter und konvergiert somit. Falls $q(C) = \{\infty\}$ ist, so konvergiert $q(\gamma_A(z))$

[3] Ich danke dem Referenten für den Hinweis auf einen Fehler in der ursprünglichen Fassung des Lemmas.

gegen ∞. Man verifiziert leicht mit Hilfe von (2) und (3), dass q_A eine Psedonorm ist.

Es sei $q \in M^{(A)}$. Aus $z \in k_A(U_q)$ folgt $[0,1] \in q(\gamma_A(z))$ und daraus $q_A(z) \leqq 1$. Es ist also $z \in U_{q_A}$. Aus $z \in U_{q_A}$ folgt $q_A(z) \leqq 1$ und daraus die Beziehung: Für jedes $C \in \gamma_A(z)$ ist $U_q \cap C \neq \emptyset$. Wir wählen C, so dass $C - C \subset U_q$ ist. Dann ist für beliebiges $c \in U_q \cap C$, $C \subset c + U_q \subset 2U_q$ und folglich ist $z \in 2k_A(U_q)$. Es gilt also: $k_A(U_q) \subset U_{q_A} \subset 2k_A(U_q)$. Aus dieser Relation folgt unmittelbar, dass $k_A(\mathscr{F}_M) \geq \mathscr{F}_{M_A} \geq 2k_A(\mathscr{F}_M)$ für $M \subset M^{(A)}$ ist. Der Filter $\tilde{\psi}$ definiert demnach die Limitierung $\tilde{\Lambda}$.

Als Abschluss der Arbeit werden wir einen Satz über die Vervollständigung des projektiven, absolutkonvexen Tensorprodukts beweisen. Zunächst aber einige Vorbereitungen:

Lemma 5. *Es sei $q: E \to \mathsf{R}_+$ eine Pseudonorm auf einem Vektorraum E und $f: L \to \mathsf{K}$ eine Linearform auf einem Unterraum $L \subset E$, so dass $|f(x)| \leqq q(x)$ für $x \in L$ ist. Dann gibt es eine lineare Fortsetzung $g: E \to \mathsf{K}$ von f, für die $|g(x)| \leqq q(x)$ für jedes $x \in E$ ist.*

Beweis. Es sei H der lineare Unterraum $\{x \in E \mid q(x) < \infty\}$ von E, f_1 die Restriktion von f auf $L \cap H$ und $L_1 \subset L$ ein linearer Unterraum von E mit $H \oplus L_1 = H + L$. Nach dem Satz von Hahn–Banach gibt es eine lineare Fortsetzung $f_2: H \to \mathsf{K}$, so dass $|f_2(x)| \leqq q(x)$ für jedes $x \in H$ ist. Die Linearform $f_3: H + L \to \mathsf{K}$ sei durch

$$f_3(z) = f_2(x) + f(y), \qquad z = x + y,\ x \in H,\ y \in L_1\,,$$

definiert. Weil $q(y) = \infty$ für $y \neq 0$, $y \in L_1$ ist, so gilt:

$$|f_3(z)| \leqq |f_2(x)| + |f(y)| \leqq q(x) + q(y) = q(z)\,.$$

Jede lineare Fortsetzung $g: E \to \mathsf{K}$ von f_3 hat die gewünschte Eigenschaft.

Es seien jetzt (E, Λ) und (F, Λ') absolutkonvexe LVR mit den definierenden Filtern ψ bzw. ψ'. In [3] wurde die *projektive, absolutkonvexe Tensorproduktlimitierung* $\Lambda \otimes \Lambda'$ auf $E \otimes F$ als die von dem Filter

$$\psi \otimes \psi' = [\{M \otimes N \mid M \in \psi,\ N \in \psi'\}]$$

definierte absolutkonvexe Vektorraumlimitierung definiert. Dabei ist $M \otimes N$ als die Menge

$$\{r \in Q(E \otimes F) \mid \exists\, p \in M,\ \exists\, q \in N \text{ mit } r \leq p \otimes q\}$$

und $p \otimes q$ als die Pseudonorm

$$(p\otimes q)(z) = \inf \sum p(x_k)q(y_k)$$

auf $E\otimes F$ definiert, wobei das Infimum über alle Zerlegungen $z=\sum x_k\otimes y_k$ von z genommen wird. Ist $r(x\otimes y)\leqq p(x)q(y)$ für alle $x \in E$, $y \in F$, so ist $r\leq p\otimes q$.

Satz 8. *Das projektive, absolutkonvexe Tensorprodukt* $(E\otimes F, \Lambda\otimes\Lambda')$ *ist genau dann separiert, wenn die absolutkonvexen* LVR (E,Λ) *und* (F,Λ') *separiert sind.*

Beweis. Nach [3, S. 13] sind die Faktoren im Tensorprodukt separiert, wenn das Tensorprodukt separiert ist. Wir nehmen jetzt an, dass (E,Λ) und (F,Λ') separiert sind. Das Tensorprodukt ist separiert, falls für jedes $z \in E\otimes F$, $z\neq 0$, und jedes $M \in \psi$ und $N \in \psi'$ Pseudonormen $p \in M$, $q \in N$ existieren, so dass $(p\otimes q)(z)\geqq 1$ ist. Bekanntlich gibt es eine Zerlegung $z=\sum_1^n x_k\otimes y_k$ von z dergestalt, dass

$$\{x_k \mid k=1,\dots n\} \quad \text{und} \quad \{y_k \mid k=1,\dots,n\}$$

in E bzw. F linear unabhängig sind. Weil Λ separiert ist, ist die von Λ auf der linearen Hülle L der Menge $\{x_k \mid k=1,\dots,n\}$ induzierte Limitierung die euklidische Topologie [11]. Die durch $f'_1(x_k)=\delta_{1k}$ definierte Linearform f'_1: $L\to \mathsf{K}$ ist stetig und es gibt folglich eine Pseudonorm $p \in M$, so dass $|f'_1(x)| \leqq p(x)$ für jedes $x \in L$ ist [2, Satz 10]. Nach Lemma 5 gibt es eine lineare Fortsetzung $f_1: E \to \mathsf{K}$ von f'_1, so dass $|f_1(x)|\leqq p(x)$ für jedes $x \in E$ ist. Analog zeigt man, dass es eine Linearform $g_1: F \to \mathsf{K}$ und eine Pseudonorm $q \in N$ gibt, so dass $|g_1(y)|\leqq q(y)$ für jedes $y \in F$ und $g_1(y_k)=\delta_{1k}$ für $k=1,\dots,n$ ist. Da

$$|(f_1\otimes g_1)(x\otimes y)| \leqq p(x)q(y) \quad \text{für alle } x \in E,\ y \in F$$

ist, so ist $p\otimes q$ grösser als die Pseudonorm $u \mapsto |(f_1\otimes g_1)(u)|$ und somit ist

$$(p\otimes q)(z) \geqq |(f_1\otimes g_1)(z)| = |(f_1\otimes g_1)(x_1\otimes y_1)| = 1\ .$$

Die Limitierung $\Lambda\otimes\Lambda'$ ist separiert.

Definition. Es sei (E,Λ) ein separierter, absolutkonvexer LVR mit dem definierenden Filter ψ. Eine Familie $(x_\iota)_{\iota\in I}$ mit $x_\iota \in E$ für alle $\iota \in I$ heisst *absolutsummierbar*, falls es ein $M \in \psi$ gibt, so dass $\sum_{\iota\in I} q(x_\iota)<\infty$ für jedes $q \in M$ ist.

Wir brauchen die Abzählbarkeitsbedingung (vgl. [4]):

(†) Jeder Filter in $\Lambda 0$ ist Oberfilter eines Filters in $\Lambda 0$, der eine abzählbare Filterbasis besitzt.

Satz 9. *Es seien* (E,Λ) *und* (F,Λ') *separierte, ausgeglichene, absolutkonvexe* LVR, *die der Bedingung* (†) *genügen. Dann kann jedes u in der Vervollständigung*

$E\tilde{\otimes}F$ in $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}$ des projektiven, absolutkonvexen Tensorprodukts $(E\otimes F,\ \Lambda\otimes\Lambda')$ als die Summe einer absolutsummierbaren Folge

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n \otimes y_n ,$$

dargestellt werden, wobei $\sum_{n\in\mathsf{N}} |\lambda_n| < \infty$ ist und die Folgen $(x_n)_{n\in\mathsf{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathsf{N}}$ in (E,Λ) bzw. (F,Λ') gegen Null konvergieren.

Beweis. Das Tensorprodukt kann vervollständigt werden, weil es nach Satz 8 separiert ist. Wir verwenden wieder die Bezeichungen des vorigen Paragraphen. Es ist also B eine Vektorraumbasis eines Komplementärraumes zu $j(E\otimes F)$ in $E\tilde{\otimes}F$. Die Menge $A \in B_*$ sei so gewählt, dass $u \in (E\otimes F)_A$ ist. Wie in Lemma 4 bezeichnen wir mit $P^{(A)} = M\otimes N$, $M \in \psi$, $N \in \psi'$, eine beliebige Menge von Pseudonormen auf $E\otimes F$, für die

$$\gamma_A(z) - \gamma_A(z) \geq \mathscr{F}_{P(A)}$$

für jedes $z \in (E\otimes F)_A$ ist. Weil die Räume E und F ausgeglichen sind und der Bedingung (†) genügen, so dürfen wir annehmen, dass $M = \lambda M$ und $N = \lambda N$ für jedes $\lambda > 0$ ist und dass es aufsteigende Folgen $(p_n)_{n\in\mathsf{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathsf{N}}$ in M bzw. N gibt, so dass für jedes $r \in M$ bzw. $r \in N$ ein $n \in \mathsf{N}$ mit $r \leq p_n$ bzw. $r \leq q_n$ gibt. Es sei $P' = (P^{(A)})_A$. Wie im Beweis von Lemma 1 folgt nun, dass

$$j(\gamma_A(u)) \geq u + k_A(\mathscr{F}_{p(A)}) \geq u + \mathscr{F}_{P'}$$

ist. Der Filter $u + \mathscr{F}_{P'}$ hat eine abzählbare Basis und die Spur des Filters auf $j(E\otimes F)$ existiert. Es gibt folglich eine C-Folge $(u_n')_{n\in\mathsf{N}}$ in $(E\otimes F,\ \Lambda\otimes\Lambda')$ derart, dass es für jedes $r \in P^{(A)}$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathsf{N}$ gibt mit $r_A(u - j(u_n')) < \varepsilon$ für alle $n \geqq n_0$. Dabei ist wie in Lemma 4 die Pseudonorm r_A auf $(E\otimes F)_A$ durch $r_A(z) = \lim r(\gamma_A(z))$ definiert. Für jedes $n \in \mathsf{N}$ sei $r_n = p_n \otimes q_n$. Es gibt eine Teilfolge $(u_n)_{n\in\mathsf{N}}$ von $(u_n')_{n\in\mathsf{N}}$, so dass

$$r_{nA}(u - j(u_n)) < (n+1)^{-2} 2^{-(n+2)}$$

für jedes $n \in \mathsf{N}$ ist. Es sei $u_0 = \sum_{i=0}^{i_0} \lambda_i x_i \otimes y_i$ irgendeine Zerlegung von u_0 und für jedes $n \in \mathsf{N}$ sei $v_n = u_{n+1} - u_n$. Es gilt:

$$\begin{aligned} r_n(v_n) &\leqq r_{nA}(u - j(u_n)) + r_{nA}(u - j(u_{n+1})) \\ &\leqq r_{nA}(u - j(u_n)) + r_{n+1\,A}(u - j(u_{n+1})) < (n+1)^{-2} 2^{-(n+1)} . \end{aligned}$$

Weil $r_n(v_n) = \inf \sum p_n(x_k) q_n(y_k)$ ist, so gibt es für jedes $n \in \mathsf{N}$ eine Zerlegung

$$v_n = \sum_{i=i_n+1}^{i_{n+1}} \lambda_i x_i \otimes y_i ,$$

so dass

$$\sum_{i_n+1}^{i_{n+1}} |\lambda_i| < 2^{-(n+1)},$$

$$p_n(x_i) \leqq (n+1)^{-2} \quad \text{und} \quad q_n(y_i) \leqq (n+1)^{-1}$$

für $i=i_n+1,\ldots,i_{n+1}$ ist. Weil die Folge (u_n) in der Vervollständigung $E\tilde{\otimes}F$ gegen u konvergiert, ist

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i .$$

Nach der Konstruktion ist $\sum_{i\in\mathbf{N}} |\lambda_i| < \infty$; die Folgen (x_i) und (y_i) konvergieren gegen Null in (E,Λ) bzw. (F,Λ'), und die Folge $(\lambda_i x_i \otimes y_i)$ ist absolutsummierbar in $E\otimes F$.

LITERATUR

1. S. Bjon, *Limesräume und Mengenoperatoren*, Acta Acad. Abo. Ser. B, 31, nr. 8 (1971).
2. S. Bjon, *Über absolutkonvexe Limesvektorräume*, Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math., 43 (1973), 181–188.
3. S. Bjon, *Die projektive, absolutkonvexe Tensorproduktlimitierung*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I 593 (1974).
4. S. Bjon, *Minimale, separierte Vektorraumlimitierungen und der Graphensatz*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I 597 (1975).
5. H. R. Fischer, *Limesräume*, Math. Ann. 137 (1959), 269–303.
6. A. Frölicher, and W. Bucher, *Calculus in Vector Spaces without Norm*, Lecture in Mathematics 30, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1966.
7. S. Gähler, W. Gähler und G. Kneis, *Vervollständigung pseudotopologischer Vektorräume*, Math. Nachr. 75 (1976), 185–206.
8. H. Hogbe-Nlend, *Théorie des Bornologies et Applications*, Lecture Notes in Mathematics 213, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1971.
9. S. Kasahara, *On linear bornologies and linear convergence structures*, Math. Seminar Notes, Kobe University, Vol. 3, nr 2, XX (1975).
10. H. Jarchow, *Marinescu-Räume*, Comment. Math. Helv. 44 (1969), 138–163.
11. K. Kutzler, *Eine Bemerkung über endlichdimensionale, separierte, limitierte Vektorräume*, Arch. Math. (Basel) 20 (1969), 165–168.
12. K. Kutzler, *Bemerkungen über unendlichdimensionale, separierte Limesvektorräume und Limesgruppen*, J. Reine Angew. Math. 253 (1972), 98–116.
13. G. Marinescu, *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions*, VEB, Deutscher Verlag der Wissenshaften, 1963.
14. E. E. Reed, *Completions of uniform convergence spaces*, Math. Ann. 194 (1971), 83–108.
15. J. Wloka, *Limesräume und Distributionen*, Math. Ann. 152 (1963), 351–409.

ÅBO AKADEMI
MATHEMATISCHES INSTITUT
SF-20500 ÅBO 50
FINNLAND