MATH. SCAND. 41 (1977), 265–276

VERVOLLSTÄNDIGUNG STRENG AUSGEGLICHENER LIMESVEKTORRÄUME II

STEN BJON[1]

0. Einleitung.

Jede Vervollständigung $\tilde{X}$ im Sinne von E. E. Reed [10] eines Cauchy-Raumes X hat folgende Abbildungseigenschaft: Jede Cauchy-stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ in einen *regulären* vollständigen Cauchy-Raum hat eine Cauchy-stetige Fortsetzung $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to Y$. Auf Grund dessen ist es natürlich, dass man, wenn man Vervollständigungen von Limesvektorräumen (abgekürtzt LVR) zu konstruiren versucht, sich auf die Kategorie der regulären LVR beschränkt. Andererseits haben wir in [4] gesehen, dass es auch ohne jede Regularitätsbedingung möglich ist, eine Vervollständigungstheorie (im Sinne von [4]) für LVR aufzubauen. Diese Theorie enthält aber nicht die klassische Vervollständigungstheorie für topologische Vektorräume. Die Vervollständigungstheorie für reguläre LVR ist kürzlich von B. Müller in [9] entwickelt worden. Sie enthält die klassische Theorie. Zwei Schwierigkeiten treten aber in dieser Theorie auf: (a) Nicht jeder reguläre LVR E kann in dem Sinne vervollständigt werden, dass die natürliche Abbildung $j\colon E \to \tilde{E}$ den Raum E in die (qb-vollständige [4]) Vervollständigung $\tilde{E}$ einbettet (die »Fortsetzungseigenschaft« für Abbildungen wird immer von der Vervollständigung verlangt); (b) Der Bildraum $j(E)$ braucht nicht (adhärenz-) dicht in $\tilde{E}$ zu sein.

In dieser Arbeit betrachten wir eine abgeschwächte Regularitätseigenschaft T_3^-. In der Kategorie $\mathscr{V}\mathscr{E}T_3^-$ der separierten, streng ausgeglichenen T_3^--LVR wird eine Vervollständigung in demselben Sinne wie in [4] konstruiert. Die Schwierigkeiten (a) und (b), die in der Vervollständigungstheorie regulärer LVR auftreten, können in dieser Kategorie vermieden werden. Weiter enthält die Theorie die klassische Vervollständigungstheorie für topologische Vektorräume. Die Vervollständigung eines separierten T_3^--Marinescu-Raumes ist ein Marinescu-Raum und die Vervollständigung eines Raumes, der in der Kategorie der separierten, ausgeglichenen, absolutkonvexen T_3^--LVR bornologisch ist, ist in derselben Kategorie wiederum bornologisch.

Eingegangen am 22. Dezember 1976.

[1] Ein Teil dieser Arbeit ist während meines Forschungsaufenthaltes in Mannheim als Stipendiat der *Alexander von Humboldt-Stiftung* entstanden.

Die Limitierung Λ in einem separierten streng ausgeglichenen LVR E ist ein induktiver Limes spezieller Gruppentopologien τ_ι, $\iota \in I$, sogenannter Fast-Vektorraumtopologien, auf E. Die topologischen Gruppen (E, τ_ι), $\iota \in I$, werden klassisch vervollständigt und der induktive Limes (E^*, Λ^*) der Vervollständigungen wird gebildet. E^* ist dann ein Vektorraum. Der Raum (E^*, Λ^*) ist eine kommutative Limesgruppe. Er ist separiert und vollständig, falls E die Regularitätseigenschaft T_3^- hat. Der Unterraum

$$\tilde{E} = \{z \in E^* \mid Vz \text{ konvergiert gegen } 0\} ,$$

versehen mit der induzierten Limitierung, ist ein qb-vollständiger streng ausgeglichener LVR. Er hat die Eigenschaft T_3^- und ist die gesuchte Vervollständigung von E in der Kategorie $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}T_3^-$.

Ich bin Dr. B. Müller an der Universität Mannheim Dank schuldig. Durch seine Bemerkung wurde ein Fehler in der ursprünglichen Fassung der Arbeit entdeckt.

Wir verwenden die Bezeichnungsweise von [2, 3, 4].

1. Vervollständigung separierter, streng ausgeglichener T_3^--Limesvektorräume.

Wir nennen eine Topologie τ auf einem Vektorraum E über K eine *Fast-Vektorraumtopologie*, falls der Umgebungsfilter $\mathscr{U}_x$ von $x \in E$ gleich $x + \mathscr{U}$ ist, wobei $\mathscr{U}$ den Nullumgebungsfilter bezeichnet und falls ausserdem gilt:

$$\mathscr{U} + \mathscr{U} = \mathscr{U} ,$$

$$\lambda\mathscr{U} \geq \mathscr{U} \text{ für jedes } \lambda \in \mathsf{K} ,$$

$$V \cdot \mathscr{U} = \mathscr{U} .$$

(die Topologie τ ist also eine Gruppentopologie). Der Raum (E, τ) heisse ein *fast-topologischer Vektorraum.* Jeder fast-topologische Vektorraum (E, τ) ist uniformisierbar und ist somit vollständig regulär. Die C-Filter bezüglich der natürlichen Uniformität sind Filter $\mathscr{F}$ auf E mit $\mathscr{F} - \mathscr{F} \geq \mathscr{U}$; zwei C-Filter $\mathscr{F}$ und $\mathscr{G}$ in (E, τ) sind genau dann bezüglich der Uniformität äquivalent, wenn $\mathscr{F} - \mathscr{G} \geq \mathscr{U}$ ist.

Es sei (E, τ) ein beliebiger separierter, fast-topologischer Vektorraum. Genau wie für topologische Vektorräume werden Vektorraumoperationen auf der Menge $\tilde{E}$ der minimalen C-Filter in (E, τ) eingeführt. Durch $x \mapsto x + \mathscr{U}$ wird eine injektive, lineare Abbildung $j \colon E \to \tilde{E}$ erklärt. Die abbildung σ: $\tilde{E} \to \mathsf{F}(E)$, die jeden $u \in \tilde{E}$ den Filter $u \in \mathsf{F}(E)$ zuordnet, definiert eine Mengenabbildung $k \colon \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(\tilde{E})$, $A \mapsto k(A) = \{z \in \tilde{E} \mid A \in \sigma(z)\}$, die endlich durchschnittstreu ist (vgl. [1]).

Lemma 1. *Der Filter* $k(\mathscr{U})=[\{k(V) \mid V \in \mathscr{U}\}]$, *wobei* $\mathscr{U}$ *den Nullumgebungsfilter in* (E,τ) *bezeichnet, ist Nullumgebungsfilter einer vollständigen Fast-Vektorraumtopologie* $\tilde{\tau}$ *auf* $\tilde{E}$. *Der Umgebungsfilter in* $(\tilde{E},\tilde{\tau})$ *eines* $z \in \tilde{E}$ *ist der Filter* $k(\sigma(z))=[\{k(S) \mid S \in \sigma(z)\}]$, *die Abbildung* j: $(E,\tau) \to (\tilde{E},\tilde{\tau})$ *ist eine Einbettung und* $(\tilde{E},\tilde{\tau})$ *ist die* (klassische) *Vervollständigung von* (E,τ).

Beweis. Seien $u,v \in \tilde{E}$ und $\lambda \in \mathsf{K}$ beliebig gewählt. Die Filter $\sigma(u+v)$ und $\sigma(u)+\sigma(v)$ bzw. $\sigma(\lambda u)$ und $\lambda\sigma(u)$ sind äquivalente C-Filter. Berücksichtigt man, dass Multiplikation mit $\lambda \neq 0$ den Raum (E,τ) homöomorph auf sich abbildet und dass für jeden C-Filter $\mathscr{F}$ der Filter $\mathscr{F}+\mathscr{U}$ ein minimaler C-Filter ist, so erhält man: $\sigma(u+v)=\sigma(u)+\sigma(v)$, $\sigma(\lambda u)=\lambda\sigma(u)$. Aus diesen Gleichungen folgert man leicht, dass $k(A)+k(B)\subset k(A+B)$ und dass $k(\lambda A)=\lambda k(A)$ für $A,B \in \mathscr{P}(E)$ und $\lambda \in \mathsf{K}$ ist. Für die Filter $\tilde{\mathscr{U}}_z=k(\sigma(z))$, $z \in \tilde{E}$, gilt demnach:

$$\tilde{\mathscr{U}}_u+\tilde{\mathscr{U}}_v \geq \tilde{\mathscr{U}}_{u+v}, \quad \text{für } u,v \in \tilde{E}\,, \tag{1}$$

$$\lambda\tilde{\mathscr{U}}_0 \geq \tilde{\mathscr{U}}_0, \quad \text{für } \lambda \in \mathsf{K}\,. \tag{2}$$

Weil $k(A)$ für kreisförmiges $A \subset E$ kreisförmig ist, so ist nach (2) $\dot{V}\tilde{\mathscr{U}}_0=\tilde{\mathscr{U}}_0$. Aus $\sigma(z)-\sigma(z)\geq\mathscr{U}$ und $\dot{z}\geq\tilde{\mathscr{U}}_z$ folgt mit Hilfe von (1): $\tilde{\mathscr{U}}_z-z\geq\tilde{\mathscr{U}}_z-\tilde{\mathscr{U}}_z\geq\tilde{\mathscr{U}}_0$. Andererseits ist nach (1) $\tilde{\mathscr{U}}_z\leq\tilde{\mathscr{U}}_z+\tilde{\mathscr{U}}_0\leq z+\tilde{\mathscr{U}}_0$, d.h. es gilt: $\tilde{\mathscr{U}}_z=z+\tilde{\mathscr{U}}_0$. Jedes $\tilde{\mathscr{U}}_z$ ist Umgebungsfilter von $z \in \tilde{E}$ bezüglich einer translationsinvarianten Topologie $\tilde{\tau}$ auf $\tilde{E}$. Dass es sich tatsächlich um eine Topologie handelt, zeigt man mit Hilfe der Gleichung $\tilde{\mathscr{U}}_0+\tilde{\mathscr{U}}_0=\tilde{\mathscr{U}}_0$, die unmittelbar aus (1) folgt: Für jedes $V \in \tilde{\mathscr{U}}_0$ gibt es ein $W \in \tilde{\mathscr{U}}_0$ mit $W+W\subset V$. Für jedes $z \in W$ ist somit $z+W \subset V$. V ist also eine Umgebung von z für alle $z \in W$.

Wir haben jetzt gezeigt, dass $(\tilde{E},\tilde{\tau})$ ein fast-topologischer Vektorraum ist. Wir brauchen nur noch zu zeigen, dass es die Vervollständigung von (E,τ) ist. Die Abbildung j ist eine Einbettung, denn für jede Teilmenge $A\subset E$ ist $k(A)\cap E$ der Kern von A in dem Raum (E,τ). Nach der Konstruktion ist $j(E)$ dicht in $(\tilde{E},\tilde{\tau})$. Weil für jeden C-Filter $\mathscr{F}$ in (E,τ) der Filter $j(\mathscr{F})$ in $(\tilde{E},\tilde{\tau})$ konvergiert, so ist $(\tilde{E},\tilde{\tau})$ vollständig [5, Ch. II, § 3.4].

Wir betrachten jetzt einen separierten, streng ausgeglichenen Limesvektorraum (E,Λ). Aus der Definition eines solchen Raumes sieht man sofort, dass Λ ein induktiver Limes und ein Infimum (in der Kategorie der Limesräume) einer durch $\geq$ ($\tau_1\geq\tau_2$ bezeichnet »τ_1 ist feiner als τ_2«) gerichteten Menge $\mathscr{T}$ von Fast-Vektorraumtopologien auf E ist: $\Lambda=\inf\{\tau \mid \tau \in \mathscr{T}\}$. Die (klassische) Vervollständigung von (E,τ), $\tau \in \mathscr{T}$, sei $(\tilde{E}_\tau,\tilde{\tau})$. Für jedes Paar $(\tau,\tau') \in \mathscr{T}\times\mathscr{T}$ mit $\tau\geq\tau'$ sei $h_{\tau'\tau}$: $(\tilde{E}_\tau,\tilde{\tau}) \to (\tilde{E}_{\tau'},\tilde{\tau}')$ die stetige, lineare Fortsetzung der Identität $(E,\tau)\to(E,\tau')$. Mit (E^*,Λ^*) bezeichnen wir den induktiven Limes der Limesräume $(\tilde{E}_\tau,\tilde{\tau})$, $\tau \in \mathscr{T}$, bezüglich

$h_{\tau'\tau}$, $\tau \leq \tau'$. E^* kann bekanntlich mit einer Vektorraumstruktur derart, dass die kanonischen h_τ: $\tilde{E}_\tau \to E^*$, $\tau \in \mathscr{T}$, linear sind, versehen werden. Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es zu zeigen, dass, falls (E, Λ) eine Regularitätseigenschaft T_3^- besitzt, ein gewisser Unterraum von (E^*, Λ^*) die Vervollständigung von (E, Λ) in der vollen Unterkategorie $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-$ von $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}$, die aus allen $(E, \Lambda') \in |\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}|$ mit der Eigenschaft T_3^- besteht, ist.

Die erwähnte Regularitätseigenschaft T_3^- eines Limesvektorraumes (E, Λ) definieren wir auf folgender Weise:

(T_3^-) Für jedes $\mathscr{F} \in \Lambda 0$, $\mathscr{G} \in \Lambda 0$ ist $\alpha_{\mathscr{G}}(\mathscr{F}) = [\{\alpha_{\mathscr{G}}(F) \mid F \in \mathscr{F}\}] \in \Lambda 0$.

Dabei ist für jedes $\mathscr{G} \in \Lambda 0$ der Adhärenzoperator $\alpha_{\mathscr{G}}$: $\mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ durch

$$x \in \alpha_{\mathscr{G}}(A) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, \mathscr{H} \in \Lambda x \text{ mit } A \in \mathscr{H} \text{ und } \mathscr{H} - \mathscr{H} \geq \mathscr{G} \tag{3}$$

erklärt. Für alle $\mathscr{G}, \mathscr{H} \in \Lambda 0$ mit $\mathscr{G} \leq \mathscr{H}$ und $A \subset B$ ist $\alpha_{\mathscr{G}}(A) \supset \alpha_{\mathscr{H}}(A)$ und $\alpha_{\mathscr{G}}(A) \subset \alpha_{\mathscr{G}}(B)$. Offensichtlich ist auch $\alpha_{\mathscr{G}}(A) \subset \bar{A}$ für $\mathscr{G} \in \Lambda 0$. Dabei bezeichnet $\bar{A}$ die Adhärenz von A in (E, Λ). Es gilt also:

Satz 1. *Jeder reguläre* LVR *genügt* T_3^-.

Den folgenden Satz beweisen wir durch Lemma 2 bis 8.

Satz 2. *Es gibt eine* (bis auf Isomorphie eindeutige) *Vervollständigung in* $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-$. *Die Vervollständigung eines topologischen Vektorraumes in* $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-$ *ist der klassischen Vervollständigung isomorph.*

Wir betrachten wieder den LVR $(E, \Lambda) \in |\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}|$ und setzen voraus, dass er T_3^- genügt. Für $\tau \in \mathscr{T}$ und $z \in \tilde{E}_\tau$ sei $\sigma_\tau(z)$ der minimale C-Filter in der Äquivalenzklasse von z und sei k_τ: $\mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(\tilde{E}_\tau)$ die von σ_τ definierte Abbildung (vgl. Lemma 1).

Lemma 2. *Für jedes* $\tau \in \mathscr{T}$ *ist der Unterraum* $N_\tau = h_\tau^{-1}(0)$ *von* $(\tilde{E}_\tau, \tilde{\tau})$ *abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(z_\iota)_{\iota \in I}$ ein Netz in N_τ, das gegen $z \in \tilde{E}_\tau$ konvergiert. Für jedes V in dem Nullumgebungsfilter $\mathscr{U}_\tau$ in (E, τ) gibt es ein $\iota \in I$ mit $z - z_\iota \in k_\tau(V)$ (vgl. Lemma 1). Es ist also $V \hat{\in} \sigma_\tau(z) \dot{-} \sigma_\tau(z_\iota)$. Für jedes $S \in \sigma_\tau(z)$ und jedes $S_\iota \in \sigma_\tau(z_\iota)$ gilt dann: $S_\iota \cap (S - V) \neq \emptyset$. Da aus $h_\tau(z_\iota) = 0$ folgt $\sigma_\tau(z_\iota) \in \Lambda 0$ und wegen der Beziehung $\sigma_\tau(z_\iota) - \sigma_\tau(z_\iota) = \mathscr{U}_\tau$ ist somit $0 \in \alpha_\tau(S - V)$ für jedes $S \in \sigma_\tau(z)$ und jedes $V \in \mathscr{U}_\tau$. Hierbei bezeichnet α_τ den Adhärenzoperator, den man erhält, wenn man in (3) $\mathscr{G} = \mathscr{U}_\tau$ setzt. Weil $\sigma_\tau(z) - \mathscr{U}_\tau = \sigma_\tau(z)$ ist, ist $\alpha_\tau(\sigma_\tau(z)) \leq \dot{0}$. Der Filter $\alpha_\tau(\sigma_\tau(z))$ ist aber ein C-Filter in (E, Λ) auf Grund der Beziehung

$$\alpha_\tau(\sigma_\tau(z)) - \alpha_\tau(\sigma_\tau(z)) \geq \alpha_\tau(\sigma_\tau(z) - \sigma_\tau(z)).$$

Hieraus folgt: $h_\tau(z)=0$. $N_\tau = h_\tau^{-1}(0)$ ist somit abgeschlossen.

Jedes (E, τ), $\tau \in \mathscr{T}$, ist durch eine lineare Abbildung j_τ in $(\tilde{E}_\tau, \tilde{\tau})$ eingebettet. Für jedes Paar (τ, τ') ist $h_\tau \circ j_\tau = h_{\tau'} \circ j_{\tau'}$. Wir setzen $j = h_\tau \circ j_\tau$.

LEMMA 3. *Die stetige, lineare Abbildung* j: $(E, \Lambda) \to (E^*, \Lambda^*)$ *bettet* (E, Λ) *in den separierten Limesraum* (E^*, Λ^*) *ein.*

BEWEIS. Da N_τ nach Lemma 2 abgeschlossen und $\tilde{\tau}$ eine Gruppen-topologie ist, so ist die Quotiententopologie $\tilde{\tau}/N_\tau$ auf $\tilde{E}_\tau/N_\tau$ separiert [11, Satz II.6]. Der Limesraum (E^*, Λ^*) ist der induktive Limes der Räume $(\tilde{E}_\tau/N_\tau, \tilde{\tau}/N_\tau)$ bezüglich der von den $h_{\tau'\tau}$, $\tau' \leq \tau$, definierten $h'_{\tau'\tau}$: $\tilde{E}_\tau/N_\tau \to \tilde{E}_\tau/N_{\tau'}$ (induktive Limiten und Quotienten tragen ja Finalstrukturen). Da die kanonischen Abbildungen h'_τ: $\tilde{E}_\tau/N_\tau \to E^*$ injektiv sind, ist Λ^* separiert.

Der Einfachheit halber identifizieren wir im folgenden gemäss h' bzw. j den Vektorraum $\tilde{E}_\tau/N_\tau$ bzw. E mit dem Unterraum $h_\tau(\tilde{E}_\tau)$ bzw. $j(E)$ von E^*.

Eine hinreichende Bedingung dafür, dass j eine Einbettung ist, ist offensichtlich: Für jedes $\tau \in \mathscr{T}$ gibt es ein $\tau' \in \mathscr{T}$ derart, dass die von $\tilde{\tau}/N_\tau$ auf E induzierte Topologie feiner als τ' ist. Seien $V \in \mathscr{U}_\tau$ und $x \in h_\tau(k_\tau(V)) \cap E$. Es gibt dann ein $z \in N_\tau$, so dass $x + z \in k_\tau(V)$ d.h. so dass $V \in \sigma_\tau(x) + \sigma_\tau(z)$. Da $\sigma_\tau(x) + \sigma_\tau(z) \in \Lambda x$ ist, ist $x \in \alpha_\tau(V)$ (vgl. Beweis von Lemma 2). Wir haben damit gezeigt, dass der Spurfilter von $h_\tau(k_\tau(\mathscr{U}_\tau))$ auf E feiner als $\alpha_\tau(\mathscr{U}_\tau)$ ist. Wählen wir nun $\tau' \in \mathscr{T}$, so dass $\alpha_\tau(\mathscr{U}_\tau) \geq \mathscr{U}_{\tau'}$ ist, so ist die oben erwähnte hinreichende Bedingung erfüllt und j ist somit eine Einbettung.

Der Raum (E^*, Λ^*) ist i.a. kein LVR. Aus (1) und (2) folgt aber, dass Λ^* eine Gruppenlimitierung auf dem Vektorraum E^* ist. Wir dürfen also von C-Filtern in (E^*, Λ^*) sprechen.

LEMMA 4. *Der Raum* (E^*, Λ^*) *ist vollständig.*

BEWEIS. Da (E^*, Λ^*) der induktive Limes der Räume $(h_\tau(\tilde{E}_\tau), \tilde{\tau}/N_\tau)$, $\tau \in \mathscr{T}$, ist, so brauchen wir nur zu beweisen, dass für jedes $\tau \in \mathscr{T}$ und jeden C-Filter $\mathscr{F}$ in $(h_\tau(\tilde{E}_\tau), \tilde{\tau}/N_\tau)$ ein $\tau' \in \mathscr{T}$ existiert, so dass $\mathscr{F}$ von der Inklusion $h_\tau(\tilde{E}_\tau) \to h_{\tau'}(\tilde{E}_{\tau'})$ auf einem bezüglich $\tilde{\tau}/N_{\tau'}$ konvergierenden Filter abgebildet wird (wir verwenden die Identifizierungen im Beweis von Lemma 3). Sei also $(h_\tau(z_\iota))_{\iota \in I}$ ein C-Netz (d.h. ein Netz das einen C-Filter erzeugt) in $(h_\tau(\tilde{E}_\tau), \tilde{\tau}/N_\tau)$ für irgendein $\tau \in \mathscr{T}$. Für jedes $V \in \mathscr{U}_\tau$ gibt es ein $\beta \in I$, so dass $h_\tau(z_\iota) - h_\tau(z_\varkappa) \in h_\tau(k_\tau(V))$ für alle $\iota, \varkappa \geq \beta$ ist. Es gibt ein $z \in N_\tau$ (das von ι und $\varkappa$ abhängt) mit $z_\iota - z_\varkappa + z \in k_\tau(V)$, d.h. es ist

$$V \in \sigma_\tau(z_\iota) - \sigma_\tau(z_\varkappa) + \sigma_\tau(z) .$$

Für jedes $S_\iota \in \sigma_\tau(z_\iota)$, $S_\varkappa \in \sigma_\tau(z_\varkappa)$, $S \in \sigma_\tau(z)$ ist nun $(V - S_\iota + S_\varkappa) \cap S \neq \emptyset$ und weil $\sigma_\tau(z) \in \Lambda 0$ ist, so gilt demnach $0 \in \alpha_\tau(V - (S_\iota - S_\varkappa))$. Da $\sigma_\tau(z_\iota) - \sigma_\tau(z_\varkappa)$ ein C-Filter in (E, τ) ist, können wir die Mengen S_ι und $S_\varkappa$ so wählen, dass $S_\iota - S_\varkappa \subset s_\iota - s_\varkappa + V$ für $s_\iota \in S_\iota$, $s_\varkappa \in S_\varkappa$ ist. Da ferner α_τ translationsinvariant ist, gilt folglich:

$$S_\iota - S_\varkappa \subset \alpha_\tau(V - V) .$$

Sei $\tau' \in \mathscr{T}$ eine Topologie mit $\mathscr{U}_{\tau'} \leq \alpha_\tau(\mathscr{U}_\tau)$. Für jedes $W \in \mathscr{U}_{\tau'}$ ist dann

$$\alpha_\tau(V - V) + W \in \sigma_\tau(z_\iota - z_\varkappa) + \mathscr{U}_{\tau'} = \sigma_{\tau'}(h_{\tau'\tau}(z_\iota - z_\varkappa)) .$$

Es ist also $h_{\tau'\tau}(z_\iota - z_\varkappa) \in k_{\tau'}(\alpha_\tau(V - V) + W)$ und demnach ist $(h_{\tau'\tau}(z_\iota))_{\iota \in I}$ ein C-Netz in $(\tilde{E}_{\tau'}, \tilde{\tau}')$ und somit konvergent. Weil $h_{\tau'}$ stetig ist, ist dann auch $(h_\tau(z_\iota))_{\iota \in I}$ in $(h_{\tau'}(\tilde{E}_{\tau'}), \tilde{\tau}'/N_{\tau'})$ konvergent. Der Raum (E^*, Λ^*) ist vollständig.

Für jedes $z \in E^*$ gibt es ein $\tau \in \mathscr{T}$ und ein $y \in \tilde{E}_\tau$ mit $h_\tau(y) = z$. Der Filter $j(\sigma_\tau(y)) = (h_\tau \circ j_\tau)(\sigma_\tau(y))$ konvergiert gegen z in (E^*, Λ^*). Folglich gilt:

Lemma 5. *Der Unterraum $j(E)$ ist dicht in (E^*, Λ^*).*

Die Vervollständigung von (E, Λ) soll ein T_3^--Raum sein:

Lemma 6. *Für jedes $\tau \in \mathscr{T}$ gibt es ein $\tau_1 \in \mathscr{T}$ mit*

$$\alpha_\tau^*(h_\tau(\tilde{\mathscr{U}}_\tau)) \geq h_{\tau_1}(\tilde{\mathscr{U}}_{\tau_1}) ,$$

wo α_τ^* den mit $\mathscr{G} = h_\tau(\tilde{\mathscr{U}}_\tau)$ durch (3) *definierten Adhärenzoperator in (E^*, Λ^*) bezeichnet.*

Beweis. Es sei $V \in \mathscr{U}_\tau$ und $\mathscr{H} \in \Lambda^* z$, $z \in E^*$, ein Filter mit $\mathscr{H} - \mathscr{H} \geq h_\tau(\tilde{\mathscr{U}}_\tau)$ und $h_\tau(k_\tau(V)) \in \mathscr{H}$. Sei ferner $(h_\tau(z_\iota))_{\iota \in I}$ ein Netz in $h_\tau(k_\tau(V))$, das einen Filter definiert, der feiner als $\mathscr{H}$ ist. Wie im Beweis von Lemma 4 zeigt man, dass $(h_{\tau_0\tau}(z_\iota))_{\iota \in I}$ in $(\tilde{E}_{\tau_0}, \tilde{\tau}_0)$ konvergiert, falls man $\tau_0 \in \mathscr{T}$ so wählt, dass $\mathscr{U}_{\tau_0} \leq \alpha_\tau(\mathscr{U}_\tau)$ ist. Sei $z \in \tilde{E}_{\tau_0}$ der Konvergenzpunkt von $(h_{\tau_0\tau}(z_\iota))_{\iota \in I}$. Für jedes $V' \in \mathscr{U}_{\tau_0}$ gibt es dann ein $\beta \in I$ mit $z - h_{\tau_0\tau}(z_\beta) \in k_{\tau_0}(V')$. Es ist also

$$V' \in \sigma_{\tau_0}(z) - \sigma_{\tau_0}(h_{\tau_0\tau}(z_\beta)) \leq \sigma_{\tau_0}(z) - \sigma_\tau(z_\beta) . \tag{4}$$

Anderseits gibt es ein $u \in N_\tau$ mit $z_\beta + u \in k_\tau(V)$. Weil somit $V \in \sigma_\tau(z_\beta) + \sigma_\tau(u)$ ist, so gilt $V - S_u \in \sigma_\tau(z_\beta)$ für jedes $S_u \in \sigma_\tau(u)$. Hieraus und aus (11) folgt nun, dass $V' \cap (S_z' - V + S_u) \neq \emptyset$ und ferner, dass $(V' - S_z' + V) \cap S_u \neq \emptyset$ für jedes $S_u \in \sigma_\tau(u)$ und jedes $S_z' \in \sigma_{\tau_0}(z)$ ist. Da $\sigma_\tau(u) \in \Lambda 0$ und $\tau_0 \leq \tau$ ist, gilt für alle $V' \in \mathscr{U}_{\tau_0}$, $S_z' \in \sigma_{\tau_0}(z)$ die Beziehung: $0 \in \alpha_{\tau_0}(V' - S' + V)$. Weil $\sigma_{\tau_0}(z)$ ein C-Filter in (E, τ_0) ist, können wir die Menge S_z' so wählen, dass $S_z' \subset s_z' + V'$ für jedes

$s'_z \in S'_z$ ist und da ferner $\alpha_{\tau 0}$ translationsinvariant ist, gilt: $S'_z \subset \alpha_{\tau 0}(V' - V' + V)$. Es ist also $\alpha_{\tau 0}(V' - V' + V) \in \sigma_{\tau 0}(z)$ für jedes $V' \in \mathscr{U}_{\tau 0}$. Sei nun $\tau_1 \in \mathscr{T}$ eine Topologie mit $\mathscr{U}_{\tau_1} \leq \alpha_{\tau 0}(\mathscr{U}_{\tau 0})$. Für jedes $W \in \mathscr{U}_{\tau_1}$ ist dann

$$\alpha_{\tau 0}(V' - V' + V) + W \in \sigma_{\tau 0}(z) + \mathscr{U}_{\tau_1} = \sigma_{\tau_1}(h_{\tau_1 \tau 0}(z)),$$

d.h.

$$h_{\tau 0}(z) \in h_{\tau_1}(k_{\tau_1}(\alpha_{\tau 0}(V' - V' + V) + W)))$$

für alle $V' \in \mathscr{U}_{\tau 0}$ und alle $W \in \mathscr{U}_{\tau_1}$. Die Mengen $\alpha_{\tau 0}(V' - V' + V) + W$, $V' \in \mathscr{U}_{\tau 0}$, $V \in \mathscr{U}_\tau$, $W \in \mathscr{U}_{\tau_1}$ bilden aber eine Filterbasis des Filters $\mathscr{U}_{\tau_1}$ und somit ist $\alpha^*_\tau(h_\tau(\tilde{\mathscr{U}}_\tau)) \geq h_{\tau_1}(\tilde{\mathscr{U}}_{\tau_1})$.

Der Raum (E^*, Λ^*) wäre ein LVR auf Grund der speziellen Eigenschaften der Räume $(\tilde{E}_\tau, \tilde{\tau})$, wenn für jedes $z \in E^*$ gälte $V \cdot z \in \Lambda^* 0$. Wir betrachten deswegen den Unterraum

$$\tilde{E} = \{ z \in E^* \mid Vz \in \Lambda^* 0 \}.$$

Sei $\tilde{\Lambda}$ die von Λ^* auf $\tilde{E}$ induzierte Limitierung. Dann ist $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ ein LVR. Wenn wir mit $\tilde{\alpha}_\tau$ den durch (3) von der Spur des Filters $h_\tau(\tilde{\mathscr{U}}_\tau)$ auf $\tilde{E}$ definierten Adhärenzoperator in $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ bezeichnen, so ist offensichtlich $\tilde{\alpha}_\tau(A) \subset \alpha^*_\tau(A) \cap \tilde{E}$ für jede Teilmenge A von $\tilde{E}$. Für jedes $\mathscr{F} \in \Lambda^* 0$ ist also $\tilde{\alpha}_\tau(\mathscr{F}_{\tilde{E}}) \geq \alpha^*_\tau(\mathscr{F})_{\tilde{E}}$, wobei $\mathscr{F}_{\tilde{E}}$ die Spur von $\mathscr{F}$ auf $\tilde{E}$ bezeichnet. Nach Lemma 6 ist $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ ein T_3^--Raum. Der Raum $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ ist qb-vollständig: Für jeden quasibeschränkten C-Filter $\mathscr{C}$ in (E, Λ) sei z der Konvergenzpunkt des Filters $j(\mathscr{C})$ in (E^*, Λ^*). Sei $\mathscr{F} \in \Lambda^* 0$ ein Filter mit $j(\mathscr{C}) \geq z + \mathscr{F}$. Dann ist $\dot{z} \geq j(\mathscr{C}) + \mathscr{F}$ und somit ist

$$Vz \geq j(V\mathscr{C}) + V\mathscr{F} \in \Lambda^* 0,$$

d.h. $z \in \tilde{E}$. Wir fassen zusammen:

Lemma 7. *Der Raum* $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ *ist ein* qb-*vollständiger* LVR, *der die Regularitätseigenschaft* T_3^- *hat.*

Der Raum $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ ist die Vervollständigung von (E, Λ) in der Kategorie $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-$, denn es gilt:

Lemma 8. *Für jede stetige, lineare Abbildung* f: $(E, \Lambda) \to (F, \Lambda')$ *in einen* qb-*vollständigen Raum* $(F, \Lambda') \in |\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-|$ *gibt es ein stetiges, lineares* $\tilde{f}$: $(E, \Lambda) \to (F, \Lambda')$ *derart, dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \tilde{E} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & F \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Sei $\Lambda' = \operatorname{ind}_{\tau' \in \mathcal{T}'} \tau'$, wobei $\mathcal{T}'$ eine durch $\geq$ gerichtete Menge von Fast-Vektorraumtopologien auf F ist und sei (F^*, Λ'^*) der induktive Limes der Räume $(\tilde{F}_{\tau'}, \tilde{\tau}')$, $\tau' \in \mathcal{T}'$, bezüglich der stetigen Fortsetzungen der Identitäten $(F, \tau') \to (F, \tau'')$, $\tau' \geq \tau''$. Dann ist (F^*, Λ'^*) vollständig (Lemma 4). Für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ sei eine lineare Abbildung $f_\tau\colon \tilde{E}_\tau \to F^*$ durch $f_\tau(y) = \lim f(\sigma_\tau(y))$ definiert. Für $V \in \mathcal{U}_\tau$ und jedes $z \in k_\tau(V)$ ist $f(V) \in f(\sigma_\tau(z))$. Sei $\tau' \in \mathcal{T}'$ eine Topologie derart, dass $f(\sigma_\tau(z))$ ein C-Filter in (F, τ') für jedes $z \in \tilde{E}_\tau$ ist. Dann ist

$$f_\tau(z) = \lim f(\sigma_\tau(z)) \in \alpha^*_{\tau'}(f(V)),$$

d.h. $f_\tau(k_\tau(V)) \subset \alpha^*_{\tau'}(f(V))$. Weil demnach $f_\tau(\tilde{\mathcal{U}}_\tau) \geq \alpha^*_{\tau'}(f(\mathcal{U}_\tau))$ ist, so ist nach Lemma 6 die Abbildung f_τ stetig. Sei $f^*\colon (E^*, \Lambda^*) \to (F^*, \Lambda'^*)$ die stetige, lineare Abbildung für die $f^* \circ h_\tau = f_\tau$ für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ ist. Weil $f_\tau \circ j_\tau = f$ für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ ist, gilt: $f^* \circ j = f$. Sei schliessloch $\tilde{f}$ die Restriktion von f^* auf $\tilde{E}$. Dann ist $\tilde{f}(z) \in F$ für $z \in \tilde{E}$, denn wäre $\tilde{f}(z) \notin F$, so gäbe es nach Lemma 5 ein C-Filter $\mathcal{C}$ in (F, Λ') und ein $\mathcal{F} \in \Lambda'^*0$ mit $j(\mathcal{C}) \geq f(z) + \mathcal{F}$. Aus

$$j(V\mathcal{C}) \geq f(Vz) + V\mathcal{F} \in \Lambda'^*0$$

würde folgen $V\mathcal{C} \in \Lambda'0$, d.h. (F, Λ') wäre nicht qb-vollständig. Die Abbildung $\tilde{f}\colon (\tilde{E}, \tilde{\Lambda}) \to (F, \Lambda')$ ist also eine stetige, lineare Fortsetzung von f.

Beweis von Satz 2. Für jedes $(E, \Lambda) \in |\mathcal{V}\bar{\mathcal{E}}\mathrm{T}_3^-|$ sei $j_E\colon E \to \tilde{E}$ die oben konstruierte Einbettung. Aus Lemma 5, 7 und 8 folgt, dass der Funktor $C\colon \mathcal{V}\bar{\mathcal{E}}\mathrm{T}_3^- \to \mathcal{V}\bar{\mathcal{E}}\mathrm{T}_3^{-*}$, der durch $C(E, \Lambda) = (\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$, $C(f) = (j_F \circ f)^{\sim}$ für $f\colon E \to F$ definiert ist, zusammen mit der natürlichen Transformation $j = (j_E)$ eine Vervollständigung in $\mathcal{V}\bar{\mathcal{E}}\mathrm{T}_3^-$ ist. Aus der Konstruktion des Raumes $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ folgt sofort, dass die Vervollständigung eines topologischen Vektorraumes gerade die klassische Vervollständigung ist.

Bekanntlich bilden in der Vervollständigung $(\tilde{E}, \tilde{\tau})$ eines topologischen Vektorraumes (E, τ) die Adhärenzen $\bar{V}$ in $(\tilde{E}, \tilde{\tau})$ der Nullumgebungen V in (E, τ) eine Basis des Nullumgebungsfilters in $(\tilde{E}, \tilde{\tau})$. Allgemeiner gilt:

Satz 3. *Sei $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ die Vervollständigung in $\mathcal{V}\bar{\mathcal{E}}\mathrm{T}_3^-$ des Raumes $(E, \Lambda) \in |\mathcal{V}\bar{\mathcal{E}}\mathrm{T}_3^-|$. Dann konvergiert ein Filter $\mathcal{H}$ in $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ genau dann gegen Null, wenn er feiner als ein Filter $\alpha_{j(\mathcal{G})}(j(\mathcal{F}))$ für geeignete $\mathcal{F} \in \Lambda 0$, $\mathcal{G} \in \Lambda 0$ ist.*

Beweis. Für jedes $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ und $\mathcal{G} \in \Lambda 0$ ist $\alpha_{j(\mathcal{G})}(j(\mathcal{F})) \in \tilde{\Lambda}0$, weil $(\tilde{E}, \tilde{\Lambda})$ ein T_3^--Raum ist. Wir zeigen, dass umgekehrt jedes $\mathcal{H} \in \tilde{\Lambda}0$ feiner als ein Filter der Form $\alpha_{j(\mathcal{G})}(j(\mathcal{F}))$ ist und verwenden dabei dieselben Bezeichnungen wie bei der Konstruktion der Vervollständigung. Es gibt ein $\tau \in \mathcal{T}$, so dass $\mathcal{H}$ feiner als die Spur $h_\tau(\tilde{\mathscr{U}}_\tau)_{\tilde{E}}$ von $h_\tau(\tilde{\mathscr{U}}_\tau)$ auf $\tilde{E}$ ist. Für jedes $V \in \mathscr{U}_\tau$ und jedes $h_\tau(z) \in h_\tau(k_\tau(V)) \cap \tilde{E}$ gibt es ein $u \in N_\tau$ mit $z+u \in k_\tau(V)$, d.h. es ist

$$V \in \sigma_\tau(z)+\sigma_\tau(u) .$$

Weil $j(\sigma_\tau(z)+\sigma_\tau(u)) \in \tilde{\Lambda} h_\tau(z)$ ist, gilt: $h_\tau(z) \in \alpha_{j(\mathscr{U}_\tau)}(j(V))$. Es ist also

$$h_\tau(k_\tau(V)) \subset \alpha_{j(\mathscr{U}_\tau)}(j(V))$$

für jedes $V \in \mathscr{U}_\tau$, d.h.

$$\mathscr{H} \geq h_\tau(\tilde{\mathscr{U}}_\tau)_{\tilde{E}} \geq \alpha_{j(\mathscr{U}_\tau)}(j(\mathscr{U}_\tau)) .$$

2. Vervollständigung spezieller Objekte in $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-$.

Aus der Konstruktion der Vervollständigung in $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-$ folgt unmittelbar, dass die Vervollständigung eines induktiven Limes topologischer Vektorräume bezüglich injektiver, stetiger, linearer Abbildungen wieder ein induktiver Limes topologischer Vektorräume bezüglich injektiver, stetiger, linearer Abbildungen ist. Ein solcher induktiver Limes heisst eine pseudotopologische Vereinigung [7, 8].:

Satz 4. *Die Vervollständigung einer pseudotopologischen Vereinigung in* $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-$ *ist eine pseudotopologische Vereinigung.*

Sei A eine absolutkonvexe Teilmenge des LVR $(E,\Lambda) \in |\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-|$. Dann ist — mit den Bezeichnungen des vorigen Abschnitts — die Menge $k_\tau(A)$ eine absolutkonvexe Teilmenge von $\tilde{E}_\tau$. Es gilt somit:

Satz 5. *Die Vervollständigung eines absolutkonvexen* LVR *aus* $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-$ *in* $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-$ *ist ein absolutkonvexer* LVR.

Wir wollen jetzt die Vervollständigung eines absolutkonvexen LVR $(E,\Lambda) \in |\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-|$ durch Pseudonormen [2] darstellen. Zu diesem Zweck seien ψ der saturierte, definierende Filter (siehe [2]) auf der Menge $Q(E)$ der Pseudonormen auf E und $\mathscr{T}$ eine Menge von Fast-Vektorraumtopologien auf E mit $\Lambda = \mathrm{ind}\{\tau \mid \tau \in \mathscr{T}\}$. Für jedes $\tau \in \mathscr{T}$ sei $\mathscr{U}_\tau$ der Nullumgebungsfilter bezüglich der Topologie τ. Dann wird ψ von den Mengen

$$M_\tau = \{q \in Q(E) \mid q^{-1}[0,1] \in \mathscr{U}_\tau\}$$

erzeugt. Seien weiter Ω_τ für jedes $\tau \in \mathscr{T}$ die Menge der quasi-beschränkten C-Filter in (E,Λ) mit $\mathscr{C}-\mathscr{C} \geq \mathscr{U}_\tau$ und φ_τ: $\Omega_\tau \to \tilde{E}$ die Abbildung, die jedem C-Filter seine Äquivalenzklasse zuordnet. Es gilt:

Satz 6. *Der saturierte, definierende Filter* $\tilde{\psi}$ *der absolutkonvexen Limitierung* $\tilde{\Lambda}$ *auf* $\tilde{E}$ *ist der Filter*

$$\tilde{\psi} = [\{\tilde{M}_\tau \mid \tau \in \mathscr{T}\}],$$
$$\tilde{M}_\tau = \{p \in Q(\tilde{E}) \mid \exists q \in M_\tau \text{ mit } p \leq \tilde{q}_\tau\},$$
$$\tilde{q}_\tau(x) = \inf_{\mathscr{C} \in \varphi_\tau^{-1}(x)} \lim q(\mathscr{C}), \qquad q \in M_\tau .$$

Beweis. Man rechnet leicht nach, dass $\tilde{q}_\tau$ wohldefiniert und eine Pseudonorm auf $\tilde{E}$ ist. Seien $\tau \in \mathscr{T}$ und $q \in M_\tau$ beliebig. Aus $\tilde{q}_\tau(x) \leqq \frac{1}{2}$ folgt, dass es ein $\mathscr{C} \in \varphi_\tau^{-1}(x)$ und ein $C \in \mathscr{C}$ mit $q(C) \subset [0,1]$ gibt. Mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen sei $y \in \tilde{E}_\tau$ so gewählt, dass $h_\tau(y) = x$ und der C-Filter $\mathscr{C}$ mit dem minimalen C-Filter $\sigma_\tau(y)$ (gleich y) in (E,τ) äquivalent ist. Da $\lim q(\mathscr{C}) = \lim q(\sigma_\tau(y))$ ist, dürfen wir o.B.d.A. $\mathscr{C} = \sigma_\tau(y)$ setzen. Es gibt also ein $C \in \sigma_\tau(y)$ mit $C \subset U_q = q^{-1}[0,1]$, d.h. $U_q \in \sigma_\tau(y)$. Folglich ist $x \in h_\tau k_\tau(U_q) \cap \tilde{E}$ und wir haben damit die erste Inklusion in

$$\text{(5)} \qquad \tfrac{1}{2} U_{\tilde{q}_\tau} \subset h_\tau k_\tau(U_q) \cap \tilde{E} \subset U_{\tilde{q}_\tau}$$

bewiesen. Ist $x \in h_\tau k_\tau(U_q) \cap \tilde{E}$, so gibt es ein $y \in k_\tau(U_q)$ mit $h_\tau(y) = x$. Es ist nun $U_q \in \sigma_\tau(y)$ und somit $\tilde{q}_\tau(x) \leqq \lim q(\sigma_\tau(y)) \leqq 1$, d.h. $x \in \tilde{q}_\tau^{-1}[0,1] = U_{\tilde{q}_\tau}$. Satz 6 folgt unmittelbar aus (5).

Ein Marinescu-Raum [7] ist eine pseudotopologische Vereinigung lokalkonvexer, topologischer Vektorräume. Aus den Sätzen 4 und 5 folgt:

Satz 7. *Die Vervollständigung eines separierten* T_3^-*-Marinescu-Raumes in* $\mathscr{V}\mathscr{E}\mathrm{T}_3^-$ *ist ein* T_3^-*-Marinescu-Raum.*

Eine Teilmenge B eines LVR (E,Λ) heisst beschränkt, wenn $VB \in \Lambda 0$ ist.

Lemma 9. *Es sei B eine Teilmenge eines Raumes* $(E,\Lambda) \in |\mathscr{V}\mathscr{E}\mathrm{T}_3^-|$ *und* $\mathscr{G} \in \Lambda 0$. *Es gilt:*

(a) *Ist B beschränkt, so ist es auch* $\alpha_{\mathscr{G}}(B)$;
(b) *Ist* $V\mathscr{G} = \mathscr{G}$ *und* $\mathscr{G} + \mathscr{G} = \mathscr{G}$, *so ist* $\alpha_{\mathscr{G}}(B)$ *mit B absolutkonvex.*

Beweis. (a) Es genügt ein kreisförmiges B und ein $\mathscr{G} \in \Lambda 0$ mit $V\mathscr{G} = \mathscr{G}$ zu betrachten. Aus (3) folgert man leicht, dass $\alpha_{\mathscr{G}}(\lambda B) \supset \lambda \alpha_{\mathscr{G}}(B)$ für jedes $\lambda \in \mathrm{K}$ ist. Es ist also

$$\alpha_{\mathscr{G}}(B) = \alpha_{\mathscr{G}}\Big(\bigcup_{|\lambda| \leqq 1} \lambda B\Big) \supset \bigcup_{|\lambda| \leqq 1} \lambda \alpha_{\mathscr{G}}(B),$$

d.h. $\alpha_{\mathscr{G}}(B)$ ist kreisförmig. Für jeden Kreis $K_\varepsilon = \{\lambda \in \mathrm{K} \mid |\lambda| \leqq \varepsilon\}$ is nun

$$\alpha_{\mathscr{G}}(K_\varepsilon B) = \alpha_{\mathscr{G}}(\varepsilon B) \supset \varepsilon\alpha_{\mathscr{G}}(B) = K_\varepsilon\alpha_{\mathscr{G}}(B)$$

und somit ist $V\alpha_{\mathscr{G}}(B) \geq \alpha_{\mathscr{G}}(VB) \in \Lambda 0$, d.h. $\alpha_{\mathscr{G}}(B)$ ist beschränkt.

(b) Sei B absolutkonvex und $x, y \in \alpha_{\mathscr{G}}(B)$. Es gibt zwei Filter $\mathscr{F} \in \Lambda x$, $\mathscr{H} \in \Lambda y$ mit $\mathscr{F} - \mathscr{F} \geq \mathscr{G}$, $\mathscr{H} - \mathscr{H} \geq \mathscr{G}$, $B \in \mathscr{F}$ und $B \in \mathscr{H}$. Für jedes $\lambda, \mu \in \mathsf{K}$ mit $|\lambda| + |\mu| = 1$ ist dann

$$B = \lambda B + \mu B \in \lambda\mathscr{F} + \mu\mathscr{H} \in \Lambda(\lambda x + \mu y)$$

und

$$(\lambda\mathscr{F} + \mu\mathscr{H}) - (\lambda\mathscr{F} + \mu\mathscr{H}) \geqq \mathscr{G}$$

und somit $\lambda x + \mu y \in \alpha_{\mathscr{G}}(B)$. Die Menge $\alpha_{\mathscr{G}}(B)$ ist also absolutkonvex.

Es sei $\mathscr{V}\mathscr{E}\mathscr{C}\mathrm{T}_3^-$ die Kategorie der separierten, ausgeglichenen absolutkonvexen T_3^--Limesvektorräume. Der Begriff des $\mathscr{V}\mathscr{E}\mathscr{C}\mathrm{T}_3^-$-bornologischen LVR wurde in [4] eingeführt.

Satz 8. *Ein Raum* $(E, \Lambda) \in |\mathscr{V}\mathscr{E}\mathscr{C}\mathrm{T}_3^-|$ *ist genau dann* $\mathscr{V}\mathscr{E}\mathscr{C}\mathrm{T}_3^-$*-bornologisch wenn er ein induktiver Limes* (in der Kategorie der LVR) *normierter Räume ist und* T_3^- *benügt.*

Beweis. Sei $(E, \Lambda) \in |\mathscr{V}\mathscr{E}\mathscr{C}\mathrm{T}_3^-|$ bornologisch und sei $\mathscr{B}$ die Bornologie $\{B \subset E \mid VB \in \Lambda 0\}$. Dann ist die Limitierung $\Lambda_{\mathscr{B}}$ der Mackey-Konvergenz feiner als Λ und nach Lemma 7 eine T_3^--Limitierung. Es ist folglich $\Lambda = \Lambda_{\mathscr{B}}$. Die Limitierung $\Lambda_{\mathscr{B}}$ ist ein induktiver Limes normierter Räume [6, 4].

Ist umgekehrt ein T_3^--LVR ein induktiver Limes normierter Räume, so ist er $\mathscr{V}\mathscr{E}\mathscr{C}$-bornologisch (siehe [4]) und damit auch $\mathscr{V}\mathscr{E}\mathscr{C}\mathrm{T}_3^-$-bornologisch.

Unmittelbar aus Satz 8 und aus der Konstruktion der Vervollständigung folgt nun:

Satz 9. *Die Vervollständigung* $\tilde{E}$ *eines* $\mathscr{V}\mathscr{E}\mathscr{C}\mathrm{T}_3^-$*-bornologischen* LVR E *in* $\mathscr{V}\bar{\mathscr{E}}\mathrm{T}_3^-$ *ist ein* $\mathscr{V}\mathscr{E}\mathscr{C}\mathrm{T}_3^-$*-bornologischer* LVR.

Ist $E = \mathrm{ind}_{\iota \in I} E_\iota$ eine Darstellung von E als ein induktiver Limes normierter Räume E_ι bezüglich injektiver, stetiger, linearer Abbildungen $h_{\varkappa\iota}: E_\iota \to E_\varkappa$, so ist $\tilde{E}$ der induktive Limes der Banachräume $\tilde{E}_\iota$ nach den stetigen linearen Fortsetzungen der Abbildungen $h_{\varkappa\iota}$ $(\iota \leq \varkappa)$. Ist also $(E, \mathscr{B})$ ein konvexer bornologischer Vektorraum [6], für den die Limitierung $\Lambda_{\mathscr{B}}$ T_3^- genügt, so ist der bornologische Vektorraum $(\tilde{E}, \tilde{\mathscr{B}})$ mit

$$\tilde{\mathscr{B}} = \{B \subset \tilde{E} \mid VB \in \tilde{\Lambda}_{\mathscr{B}} 0\}$$

gerade die Vervollständigung (»complété« in [6]) von $(E, \mathscr{B})$. Die Vervollständigung in [4] liefert dagegen die Mackey-Vervollständigung (»Mackey-complété« in [6]) eines konvexen, bornologischen Vektorraumes.

LITERATUR

1. S. Bjon, *Limesräume und Mengenoperatoren*, Acta Acad. Abo. Ser B, 31, nr. 8 (1971).
2. S. Bjon, *Über absolutkonvexe Limesvektorräume*, Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math., 43 (1973), 181–188.
3. S. Bjon, *Minimale, separierte Vektorraumlimitierungen und der Graphensatz*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I., 597 (1975).
4. S. Bjon, *Vervollständigung streng ausgeglichener Limesvektorräume* I, Math. Scand. 41 (1977), 249–264.
5. N. Bourbaki, *General Topology*, Part 1, Hermann–Addison-Wesley, Paris - Reading, 1966.
6. H. Hogbe-Nlend, *Théorie des Bornologies et Applications*, Lecture Notes in Math. 213, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1971.
7. H. Jarchow, *Marinescu-Räume*, Comment. Math. Helv. 44 (1969), 138–163.
8. G. Marinescu, *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distribution*, VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963.

B. Müller, *Vervollständigung von Limesvektorräumen*, Manuskripte der Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Mannheim, Nr. 51, 1975.

10. E. E. Reed, *Completions of uniform convergence spaces*, Math. Ann. 194 (1971), 83–108.
11. J. Wloka, *Limesräume und Distributionen*, Math. Ann. 152 (1963), 351–409.

ÅBO AKADEMI
MATHEMATISCHES INSTITUT
SF-20500 ÅBO 50
FINNLAND