

SUR LES ESPACES DE BANACH NE CONTENANT PAS $l^1(\mathbf{N})$

H. FAKHOURY

Résumé.

On étudie pour un espace de Banach V les rapports qui existent entre le fait de ne pas contenir un sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ et le fait que V ou V' possède la propriété de Dunford–Pettis. En particulier on montre que pour un dual V' on a l'alternative suivante, ou bien il contient un sous-espace isomorphe à $L^1([0, 1])$ ou bien tout opérateur de $L^1([0, 1])$ dans V' est complètement continu, c'est-à-dire qu'il transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente.

Introduction et notations.

Soient V et W deux espaces de Banach, on note $L(V, W)$ l'espace des opérateurs bornés de V dans W . On sait que tout opérateur faiblement compact de V dans W se factorise par un espace de Banach réflexif; aussi introduisons-nous l'ensemble $M(V, W)$ des opérateurs bornés qui se factorisent par un espace de Banach ne contenant pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$. On montre que $M(V, W)$ est un sous-espace fermé de $L(V, W)$. Après avoir étudié les propriétés des opérateurs de $M(V, W)$ et de leurs transposés, on donne deux caractérisations des espaces de Banach possédant la propriété de Dunford–Pettis en termes d'opérateurs de l'ensemble $M(V, W)$ et une caractérisation des espaces de Banach ne contenant pas $l^1(\mathbf{N})$. On en déduit, entre autres, que pour un espace de Banach dual W' on a l'alternative suivante: ou bien W' contient un sous-espace isomorphe à $L^1([0, 1])$ ou bien tout opérateur de $L^1([0, 1])$ dans W' est complètement continu.

Soit V un espace de Banach. on note $B(V)$ sa boule unité fermée et son dual V' sera, sauf mention du contraire, muni de $\sigma(V', V)$. Une série dans V , de terme général $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$, est scalairement sommable si pour tout v' de V' on a $\sum |v'(v_n)| < \infty$. Un opérateur T de $L(V, W)$ est inconditionnellement convergent si l'image par T d'une telle série est toujours une série sommable. Il est aisé de montrer qu'un opérateur faiblement compact est inconditionnellement convergent.

Rappelons enfin qu'un opérateur T est complètement continu si l'image par T de toute suite faiblement convergente est une suite fortement convergente. On dira qu'un espace de Banach V possède la propriété de Schur si toute suite faiblement convergente est fortement convergente, en d'autres termes, si l'injection canonique de V dans lui-même est complètement continue.

Si X est un compact on note $C(X)$ l'espace des fonctions continues et $M(X)$ l'espace des mesures sur X . Soit K un convexe compact, on dira qu'une fonction affine f vérifie le calcul barycentrique si pour toute mesure μ de $M(K)$ de masse 1, on a $\mu(f) = f(b(\mu))$ où $b(\mu)$ est le barycentre de μ . Ceci suppose, évidemment, que f est universellement mesurable sur K .

1. Propriétés de l'espace $M(V, W)$.

Soit T un opérateur de $L(V, W)$, il existe d'après [3] un espace de Banach E_T canoniquement associé à $T(B(V))$ tel que T se factorise par E_T . Le théorème suivant repose sur la caractérisation des espaces contenant $l^1(\mathbf{N})$ de [4], [15] et [19].

THEOREME I. *Soit T un opérateur de $L(V, W)$; alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (a) *L'opérateur T est dans $M(V, W)$.*
- (b) *Pour toute suite (v_n) de $B(V)$, la suite $T(v_n)$ contient une sous-suite $\sigma(W, W')$ -Cauchy.*
- (c) *Il n'existe pas de sous-espace $M \subseteq V$ isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ tel que $T|_M$ soit un isomorphisme.*
- (d) *L'espace E_T ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$.*
- (e) *Pour tout v' de V'' et toute mesure μ sur $B(W')$ il existe une suite bornée (w_n) de W qui converge μ -presque partout sur $B(W')$ vers la fonction $T''(v')$.*
- (f) *Pour tout v'' de V'' la fonction $T''(v'')$ vérifie le calcul barycentrique sur $B(W')$.*
- (g) *Pour tout v'' de V'' la fonction $T''(v'')$ est universellement mesurable sur $B(W')$.*

DEMONSTRATION. Il est clair que (d) \Rightarrow (a) et (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (g).

(a) \Rightarrow (b). — Soient E un espace de Banach ne contenant pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ et deux opérateurs R de $L(V, E)$ et S de $L(E, W)$ tels que $T = S \circ R$. Soit (v_n) une suite de $B(V)$; la suite $R(v_n)$ contient une sous-suite faiblement de Cauchy. La suite $T(v_n) = SR(v_n)$ contient donc une telle sous-suite.

(b) \Rightarrow (c) Sinon il existe un espace N de $T(V)$ qui est isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$. L'espace $M = T^{-1}(N)$ est fermé dans V et $T|_M$ est une surjection. Il existe donc

un sous-espace $M_0 \subset M$ isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ tel que $T|_{M_0}$ soit un isomorphisme. Si (v_n) est une base de M_0 équivalente à la base canonique de $l^1(\mathbf{N})$, la suite $T(v_n)$ est aussi équivalente à la base canonique de $l^1(\mathbf{N})$ et ne contient pas de sous-suite $\sigma(W, W')$ -Cauchy.

(c) \Rightarrow (d) Si E_T contient un sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ il existe d'après le lemme (1, vii) de [3] une suite $(T(v_n))$ dans $T[B(V)]$ sans sous-suite faiblement de Cauchy. Il en est donc de même pour la suite (v_n) de $B(V)$. Ainsi (v_n) contient une sous-suite (v_p) équivalente à la base canonique de $l^1(\mathbf{N})$ dont l'image par T est équivalente à la base canonique de $l^1(\mathbf{N})$. Il reste à montrer que l'espace vectoriel fermé engendré par $T(v_p)$ est inclus dans $T(V)$. En effet, si w est dans cet espace il existe un élément $(\lambda_p) \in l^1(\mathbf{N})$ tel que $w = \sum \lambda_p T(v_p)$. La suite (v_p) étant bornée la série $\sum \lambda_p v_p$ converge dans V et on a $T(\sum \lambda_p v_p) = w$.

(a) \Rightarrow (e) Soient v'' un point de V'' et μ une mesure sur $B(W')$. Par hypothèse, il existe un espace E , ne contenant pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ et deux opérateurs $R \in L(V, E)$ et $S \in L(E, W)$ tels que $T = S \circ R$. On peut sans diminuer la généralité, supposer que $\|S\| = 1$, et poser $v = S'(\mu)$, l'image par S' de la mesure μ . Ainsi v est une mesure sur $B(E')$ et d'après [4] il existe une suite (e_n) bornée dans E qui converge v -presque partout vers $R''(v'')$. La suite $S''(e_n) = S(e_n)$ converge μ -presque partout vers $S'R''(v'') = T''(v'')$.

(g) \Rightarrow (c) Sinon, il existe une suite (v_n) dans $B(V)$ équivalente à la base canonique de $l^1(\mathbf{N})$ ainsi que $T(v_n)$. Si v'' est une valeur d'adhérence de (v_n) $T''(v'')$ est une valeur d'adhérence de $T(v_n)$. Or d'après un résultat de Sierpinski, 14.5.1. de [17], $T''(v'')$ n'est pas universellement mesurable sur $B(N')$ où N est l'espace vectoriel fermé engendré par $(T(v_n))$. Soit S la surjection canonique de $B(W')$ sur $B(N')$. On a $T''(v'')|_{B(N')} \circ S = T''(v'')$, par suite elle n'est pas mesurable pour toute mesure sur $B(W')$.

Signalons que les opérateurs de $M(V, W)$ sont introduits dans [1] sous une forme un peu différente. Dans [1] l'équivalence entre (c) et (d) est prouvée ainsi que le fait que tout espace de factorisation de T s'exprime comme un espace d'interpollation. Dans [10] Pelczyński a étudié les opérateurs strictement singuliers et strictement cosinguliers. On peut, en adaptant sa définition à la classe d'opérateurs qui nous intéresse, introduire la notion suivante: un opérateur T de $L(V, W)$ est l^1 -singulier si et seulement s'il n'existe pas de sous-espace M de V , isomorphe à l^1 tel que $T|_M$ soit un isomorphisme. L'opérateur T est l^1 -cosingulier s'il n'existe pas de surjections R de $L(V, l^1)$ et S de $L(W, l^1)$ telles que $R = S \circ T$. L'équivalence entre (a) et (c) s'exprime de la façon suivante:

PROPOSITION 2. *Soit T un opérateur de $L(V, W)$; alors T est dans $M(V, W)$ si et seulement s'il est l^1 -singulier.*

Les corollaires suivants découlent immédiatement du théorème et leur démonstration sera omise.

COROLLAIRE 3. *L'ensemble $M(V, W)$ est un sous-espace fermé de $L(V, W)$ et pour tout R de $L(E, V)$ et S de $L(W, F)$ l'opérateur $S \circ T \circ R$ est dans $M(E, F)$ si T est dans $M(V, W)$.*

COROLLAIRE 4. *Si l'espace $T(V)$ est séparable alors T est dans $M(V, W)$ si et seulement si $T''(V'')$ est inclus dans W'_1 l'adhérence séquentielle de W dans son bidual.*

COROLLAIRE 5. (a) *Si W est faiblement séquentiellement complet, tout opérateur de $M(V, W)$ est faiblement compact.*

(b) *Si W possède la propriété de Schur tout opérateur de $M(V, W)$ est compact.*

Signalons pour être complet le résultat suivant qui se trouve dans [20] et dont la preuve repose sur le théorème 1 de [14].

PROPOSITION 6. *Soient X un compact, $V = C(X)$, et W un espace de Banach. Soit T un opérateur de $L(V, W)$; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *L'opérateur T n'est pas dans $M(V, W)$,*

(b) *Il existe un sous-espace M de V isomorphe à $C([0, 1])$ tel que $T|_M$ soit un isomorphisme.*

Il est clair que le transposé d'un opérateur de $M(V, W)$ n'est pas dans $M(W', V')$, cependant on a le résultat suivant:

PROPOSITION 7. *Soit T un opérateur de $L(V, W)$; on a (a) \Rightarrow (b) \Leftrightarrow (c).*

(a) *L'opérateur T est l^1 -singulier.*

(b) *L'opérateur T est l^1 -cosingulier.*

(c) *L'opérateur T' de W' dans V' est inconditionnellement convergent.*

DEMONSTRATION. Il est clair que (a) \Rightarrow (b).

(b) \Rightarrow (c) T' n'est pas inconditionnellement convergent si et seulement s'il existe un sous-espace M de W' isomorphe à $\text{co}(\mathbf{N})$ tel que $T'|_M$ soit un isomorphisme [2]. Par suite, T est un isomorphisme d'un facteur direct N de V isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ sur son image $T(N)$ qui est un facteur direct dans W . Ainsi T n'est pas l^1 -cosingulier.

(c) \Rightarrow (b) Si T n'est pas l^1 -cosingulier l'opérateur T' est un isomorphisme d'un sous-espace de W' isomorphe à $l^\infty(\mathbf{N})$ sur son image. En particulier T' n'est pas co-singulier ce qui revient à dire, d'après [2], que T' n'est pas inconditionnellement convergent.

PROPOSITION 8. Soit T un opérateur de $L(V, W)$, les assertions suivantes sont reliées par (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c).

- (a) La transposée T' de T est l^1 -singulier.
- (b) L'opérateur T' est l^1 -cosingulier.
- (c) L'opérateur T est inconditionnellement convergent.

La démonstration s'effectue comme plus haut en se basant toujours sur [2]. Remarquons que toutes les implications non prouvées plus haut sont fausses.

EXEMPLE 9. Il existe des opérateurs l^1 -cosinguliers non l^1 -singuliers, comme le montre l'identité de $C([0, 1])$, ou bien $l^\infty(\mathbb{N})$. On peut même construire un tel exemple avec des espaces de Banach duaux séparables. En effet, il existe d'après [7] pour tout espace de Banach séparable X un espace de Banach Y muni d'une base monotone telle que la suite de fonctionnelles canoniquement associées forme une base de Y' et de plus Y' admet X pour quotient et Y'' est isomorphe à $Y \times X'$. Si X est l'espace $C([0, 1])$, alors Y' contient un sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbb{N})$, mais non un tel facteur direct. Sinon Y'' contiendrait un sous-espace isomorphe à $l^\infty(\mathbb{N})$. Or tout opérateur de $l^\infty(\mathbb{N})$ dans $Y'' \sim Y \times X'$ est faiblement compact puisque c'est le cas pour tout opérateur de $l^\infty(\mathbb{N})$ dans Y (car Y est séparable) et X' (car il est faiblement séquentiellement complet).

EXEMPLE 10. Il existe des opérateurs inconditionnellement convergents dont les transposés ne sont pas l^1 -cosinguliers. On utilise la même méthode que plus haut en prenant $X = \text{co}(\mathbb{N})$. L'identité I de Y' est l'opérateur recherché. En effet, Y' étant un dual séparable, il ne peut contenir de sous-espace isomorphe à $\text{co}(\mathbb{N})$, ainsi I est inconditionnellement convergent. Cependant I' qui est l'identité de $Y'' \sim Y \times l^1(\mathbb{N})$ n'est pas l^1 -cosingulier.

2. Propriété de Dunford–Pettis.

Rappelons qu'un espace de Banach V vérifie la propriété de Dunford–Pettis (notée D.P.) si et seulement si pour tout espace de Banach W , tout opérateur faiblement compact de V dans W est complètement continu (voir [18]). Il est classique que V vérifie D.P. si et seulement si, pour toute suite (v_n) , qui est $\sigma(V, V')$ -convergente vers 0 et toute suite (v'_n) de V' qui est $\sigma(V', V'')$ -convergente vers 0, on a $\lim_n |v'_n(v_n)| = 0$.

Rappelons que tout opérateur complètement continu est inconditionnellement convergent. En effet, d'après [2], si T n'est pas inconditionnellement convergent, il constitue un isomorphisme d'un sous-espace M de V équivalent à $\text{co}(\mathbb{N})$. La base canonique de M tend faiblement vers 0 mais son image par T ne tend pas fortement vers 0.

Signalons pour commencer que si V ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ et s'il possède la propriété D.P. alors tout opérateur faiblement compact de V dans un espace de Banach W est compact. Plus généralement si T est un opérateur de $M(V, W)$ et S un opérateur faiblement compact de W dans U et si de plus W possède la propriété D.P., alors le produit $S \circ T$ est compact.

THEOREME 11. *Soit V un espace de Banach; les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) V possède la propriété D.P.

(b) Pour tout espace W , et pour tout T de $L(V, W)$ dont le transposé est dans $M(W', V')$, l'opérateur T est complètement continu.

(c) Même énoncé que (b) avec $W = \text{co}(\mathbf{N})$.

DEMONSTRATION. (c) \Rightarrow (a) Soit (v_n) (respectivement (v'_n)) une suite dans V (respectivement V') qui converge vers 0 pour $\sigma(V, V')$ (respectivement $\sigma(V', V'')$). L'opérateur T de $L(V, \text{co}(\mathbf{N}))$ défini par $T(v) = (v'_n(v))$ est faiblement compact. Par conséquent T' est dans $M(l^1(\mathbf{N}), V')$ et par l'hypothèse il est complètement continu; ce qui implique $\lim_n \|T(v_n)\| = 0$. Si la suite $(\|v'_n(v_n)\|)$ ne converge pas vers 0, on peut en se limitant à une sous-suite supposer que $\|v'_n(v_n)\| > \delta > 0$. Comme on peut trouver une sous-suite (v_{n_k}) telle que

$$\|T(v_{n_k})\| < \delta/2.$$

Ceci veut dire que pour tout k on a $\|v'_{n_k}(v_{n_k})\| < \delta/2$, contrairement à l'hypothèse.

(a) \Rightarrow (b) Soient (v_n) une suite de V qui est $\sigma(V, V')$ -convergente vers 0 et T un opérateur de $L(V, W)$ tel que $T' \in M(W', V')$. Il s'agit de montrer

$$\lim_n \|T(v_n)\| = 0.$$

Sinon en se limitant à une sous-suite on peut supposer $\|T(v_n)\| \geq \delta > 0$ pour tout n de N . Pour tout n , il existe w'_n un point de la sphère unité de W' tel que

$$w'_n[T(v_n)] = \|T(v_n)\| \geq \delta.$$

La suite $(T'(w'_n))$ contient une sous-suite $\sigma(V', V'')$ -Cauchy que l'on note $(T'(w'_{p_n}))$ pour simplifier. Comme $(T(v_n))$ converge faiblement vers 0, on peut pour tout n trouver p_n tel que

$$|w'_n(T(v_{p_n}))| < \delta/2.$$

Alors:

$$\begin{aligned} |T'(w'_{p_n})(v_{p_n})| &\leq |T'(w'_{p_n} - w'_n)(v_{p_n})| + |T'(w'_n)(v_{p_n})| \\ &< |T'(w'_{p_n} - w'_n)(v_{p_n})| + \delta/2. \end{aligned}$$

Or la suite $(T'(w'_{p_n} - w'_n))$ converge vers 0 pour $\sigma(V', V'')$ puisque la suite $T'(w'_n)$ est $\sigma(V', V'')$ -Cauchy. D'après l'hypothèse sur V , la suite $(|T'(w'_{p_n} - w'_n)(v_{p_n})|)$ converge vers 0. Par conséquent, il existe N tel que pour tout $n > N$ on a

$$|T'(w'_{p_n})(v_{p_n})| = \|T(v_{p_n})\| < \delta,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

COROLLAIRE 12. *Soit V un espace de Banach qui vérifie la propriété D.P. Si V est de dimension infinie, alors V' contient un sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$.*

DEMONSTRATION. Sinon l'injection canonique de V' est dans $M(V', V')$ par suite l'injection canonique de V est complètement continue ou, ce qui revient au même, V possède la propriété de Schur. Mais, un tel espace contient un sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ dès qu'il est de dimension infinie [15]. Ainsi V' admet $l^\infty(\mathbf{N})$ pour quotient et il contient par conséquent un sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$.

REMARQUE. D'après [5] on a donc le résultat suivant: Si V est un espace séparable qui possède la propriété D.P. et qui est de dimension infinie, alors V admet $co(\mathbf{N})$ pour quotient.

THEOREME 13. *Pour un espace de Banach W , les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *L'espace W possède la propriété D.P.*

(b) *Pour tout espace de Banach V , tout opérateur T de $M(V, W)$ est tel que T' est complètement continu.*

(c) *Même énoncé avec V réflexif.*

DEMONSTRATION. (a) \Rightarrow (b) Cette preuve se fait exactement comme dans le théorème 11.

(c) \Rightarrow (a) Soient (w_n) (respectivement (w'_n)) une suite de W (respectivement W') qui converge vers 0 pour $\sigma(W, W')$ (respectivement $\sigma(W', W'')$). Soit K l'enveloppe convexe fermée équilibrée de la suite (w_n) qui est un ensemble faiblement compact de W . D'après [2] il existe un espace réflexif V et un opérateur T de $L(V, W)$ tel que $K \subset T[B(V)]$. Comme T est dans $M(V, W)$ l'opérateur T' est complètement continu; ainsi $\|T'(w'_n)\|$ converge vers 0. Soit v_n dans $B(V)$ tel que $T(v_n) = w_n$; pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour tout $n > N$ on a

$$\varepsilon \geq \|T'(w'_n)\| \geq |T'(w'_n)(v_n)| = |w'_n(w_n)|$$

ce qui montre que W possède bien la propriété D.P.

Le corollaire suivant généralise un résultat de [12]; sa démonstration consiste en une application immédiate du théorème 13.

COROLLAIRE 14. (a) *Soit W un espace de Banach qui ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ et tel que W possède la propriété D.P. Alors W' possède la propriété de Schur.*

(b) *Soit M un facteur direct dans W . On suppose que W possède la propriété D.P. et que W/M ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$. Alors le polaire M° de M possède la propriété de Schur.*

Rappelons qu'un espace de Banach W est dit *espace de Grothendieck* si toute suite (w'_n) de W' qui converge pour $\sigma(W, W')$ converge en fait pour $\sigma(W', W'')$.

COROLLAIRE 15. *Soit W un espace de Grothendieck qui possède la propriété D.P. Alors W contient un sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ dès qu'il est de dimension infinie.*

DEMONSTRATION. Si l'identité de W est dans $M(W, W)$ le théorème 13 montre que l'identité de W' est complètement continue. Comme W est un espace de Grothendieck on obtient que toute suite (w'_n) de W' qui est $\sigma(W, W')$ convergente est en fait normiquement convergente. Ceci est impossible d'après [8].

REMARQUE. Après la rédaction de ce travail, nous avons appris que le corollaire précédent est établi dans [20] en supposant uniquement que W est un espace de Grothendieck non reflexif. D'autre part, en reprenant la proposition 6, le théorème 13 permet d'établir le résultat suivant; voir aussi la proposition 24.

Soient X un compact, $V=C(X)$, et W un espace de Banach qui possède la propriété D.P.; un opérateur T est dans $M(V, W)$ si et seulement si T' est complètement continu.

THEOREME 16. *Soit W un espace de Banach; les assertions suivantes sont équivalentes:*

- (a) *L'espace W ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$.*
- (b) *Pour tout espace V qui possède la propriété D.P., tout opérateur de $L(V, W')$ est complètement continu.*
- (c) *Même énoncé que (b) avec $V=L^1([0, 1])$.*

DEMONSTRATION. (a) \Rightarrow (b) Soit (v_n) une suite de V qui est $\sigma(V, V')$ convergente vers 0 et supposons, en se limitant éventuellement à une sous-suite

que $\|T(v_n)\| > \delta > 0$. Soit (w_n) une suite de $B(w)$ telle que $T(v_n)(w_n) > \delta$. Comme W ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ la suite (w_n) contient une sous-suite faiblement de Cauchy que l'on note (w_n) pour simplifier. Comme $(T(v_n))$ converge faiblement vers 0, on peut trouver, pour tout n un entier p_n tel que $|T(v_{p_n})(w_n)| < \delta/2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} |T(v_{p_n})(w_{p_n})| &\leq |T(v_{p_n})(w_{p_n} - w_n)| + |T(v_{p_n})(w_n)| \\ &< |T'(w_{p_n} - w_n)(v_{p_n})| + \delta/2 . \end{aligned}$$

Or la suite $T'(w_{p_n} - w_n)$ converge vers 0 pour $\sigma(V', V'')$, comme V possède la propriété D.P. la suite $|T'(w_{p_n} - w_n)(v_{p_n})|$ converge vers 0. Ceci contredit le fait que $|T(v_{p_n})(w_{p_n})| > \delta$ pour tout entier p_n .

(c) \Rightarrow (a) Si W contient un sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ il existe un sous-espace de W' isomorphe à $M([0, 1])$ d'après [13]. L'hypothèse impliquerait que $M([0, 1])$ et en particulier $L^1([0, 1])$ possède la propriété de Schur, ce qui est évidemment faux.

Ce résultat, plus précisément (a) \Rightarrow (c), permet de retrouver simplement un résultat de [13]. En effet, un espace $L^1(\mu)$ relatif à une mesure σ -finie μ comportant une partie diffuse non nulle n'est pas isomorphe à un espace dual W' . Sinon, l'espace W ne peut contenir de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ puisqu'alors $l^\infty(\mathbf{N})$ serait quotient de $L^1(\mu)$, ce qui est impossible puisque μ est σ -finie. Le théorème montre alors que $L^1(\mu)$ vérifie la propriété de Schur, ce qui revient à dire que la partie diffuse de μ est nulle. Une deuxième remarque s'impose à propos de ce théorème. Il résulte du théorème 3.4 de [13] que pour un espace de Banach *séparable* il est équivalent de dire que V contient un sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$, ou que V' contient un sous-espace isomorphe à $L^1([0, 1])$. Ce résultat a été étendu par Hagler (voir [5]), ainsi que dans [5] au cas non séparable. Nous avons ici une autre façon de prouver ce résultat (en fait un énoncé plus fort) en se basant sur la proposition 3.3 de [13].

Signalons enfin que ce théorème donne une réponse négative à une question posée par Phillips à savoir: est-ce qu'un espace de Banach V tel que tout opérateur de $L^1([0, 1])$ dans V est complètement continu, possède la propriété de Radon-Nikodym? En effet il existe des espaces de Banach *séparables*, ne contenant pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ et dont le dual n'est pas séparable. Pour un tel V , l'espace V' vérifie l'hypothèse du théorème mais ne possède pas la propriété de Radon-Nikodym (voir [6], par exemple).

Les théorèmes 11 et 16 admettent des formulations différentes, mais essentiellement équivalentes, quand $V = L^1([0, 1])$. En effet, Uhl a montré qu'un opérateur T de $L^1([0, 1])$ dans un espace U est complètement continu si et seulement si sa restriction à $L^2([0, 1])$ est compacte. Ainsi on peut écrire:

THEOREME 16 bis. *Soit W un espace de Banach, alors W ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ si et seulement si la restriction à $L^2([0, 1])$ de tout opérateur de $L^1([0, 1])$ dans W' est compacte.*

COROLLAIRE 17. *Soient W un espace de Banach qui ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ et V un espace de Banach qui possède la propriété D.P. et dont aucun sous-espace n'est isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$. Si W' est quotient de V alors W' possède la propriété de Schur.*

DEMONSTRATION. Si W' ne possède pas la propriété de Schur il existe une suite (w'_n) de W' qui tend vers 0 pour $\sigma(W', W'')$ et telle que $\|w'_n\| \geq \delta > 0$. Soit (v_n) une suite bornée dans V d'image (w'_n) ; cette suite contient une sous-suite (v_{n_k}) faiblement de Cauchy. La sous-suite image (w'_{n_k}) converge en norme vers 0 d'après le théorème 16.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 16.

COROLLAIRE 18. *Soit W un espace de Banach qui ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ si l'espace W' possède la propriété D.P. alors W' possède la propriété de Schur.*

COROLLAIRE 19. (a) *Soit W un espace de Banach dont le dual W' est isomorphe à un facteur direct dans un espace $L^1(\mu)$ relatif à une mesure σ -finie. Alors W' possède la propriété de Schur et est séparable.*

(b) *Soient W un espace de Banach et μ une mesure σ -finie; s'il existe un opérateur de $L^1(\mu)$ dans W' à image dense, alors l'espace W' est séparable.*

DEMONSTRATION. (a) provient de (b) et du corollaire précédent.

(b) L'espace W ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ sinon il existerait un opérateur de $L^1(\mu)$ dans $l^\infty(\mathbf{N})$ à image dense. Ceci est impossible puisque $L^1(\mu)$ contient une partie faiblement compacte totale et $l^\infty(\mathbf{N})$ n'en contient pas (puisque, par exemple, les compacts faibles de $l^\infty(\mathbf{N})$ sont séparables). L'opérateur T considéré est donc complètement continu et l'image de la partie faiblement compacte totale serait un compact fort et total dans W' , d'où la séparabilité de W' .

REMARQUES. (1) On peut remplacer dans l'assertion (b) l'espace $L^1(\mu)$ par n'importe quel espace V qui possède D.P. et qui contient une partie faiblement compacte totale.

(2) On a vu dans ce qui précède que les opérateurs l^1 -singuliers se comportent comme les opérateurs faiblement compacts. Cette ressemblance ne va quand même pas loin. Ainsi, en reprenant le théorème 11 on est tenté de

conjecturer que si T est un opérateur de $L^1([0, 1])$ dans V tel que T' soit dans $M(V', L^\infty([0, 1]))$ alors T est représentable. c'est-à-dire qu'il existe $g \in L^\infty(V, \mu)$ tel que $T(f) = \int fg d\mu$ ($\mu =$ mesure de Lebesgue). Or ceci est faux. En effet, on sait que tout opérateur de $L^1[0, 1]$ dans V est représentable si et seulement si V vérifie la propriété de Radon-Nikodym. Ainsi, si le résultat était vrai, on aurait le résultat suivant: « V possède la propriété de Radon-Nikodym dès que $V' \not\supset l^1(\mathbf{N})$ ». Cependant Lindenstrauss et Stegall ont construit dans [6, corollaire 4] des espaces, qui contredisent ce résultat.

PROPOSITION 20. *Soient W un espace de Banach ne contenant pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ et μ une mesure sur $B(W')$. Il existe un convexe $K_0 \subset B(W')$ qui est normiquement fermé et séparable tel que μ soit portée par toute tranche $\sigma(W', W'')$ -fermée contenant K_0 .*

DEMONSTRATION. Toute fonctionnelle w'' de W'' est universellement mesurable et vérifie le calcul barycentrique puisque W ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ [4]. Ainsi les tranches $\sigma(W', W'')$ -fermées sont μ -mesurables et on ne diminue pas la généralité en supposant que μ est une mesure de probabilité. Soit T l'opérateur de $L^1(\mu)$ dans W' défini par

$$T(f) = \int_{B(W')} w' f(w') d(\mu(w')) .$$

Cet opérateur est bien défini puisque le deuxième membre n'est autre que le barycentre de la mesure $f \cdot \mu$ elle-même portée par $B(W')$. De plus on a $\|T\| \leq 1$, par conséquent T est complètement continu et $T(L^1(\mu))$ est un sous-espace séparable de W' . On pose

$$K_0 = \overline{T(L^1(\mu))} \cap B(W') ;$$

cet ensemble est normiquement fermé et séparable. Pour tout w'' de W'' on pose

$$[w'']_{K_0} = \text{Sup} \{w''(w') ; w' \in K_0\} .$$

Soient $\alpha > [w'']_{K_0}$ et $f = \lambda \chi_{\{w'' \geq \alpha\}}$ où λ est un nombre réel et $\chi_{\{w'' \geq \alpha\}}$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\{w' \in B(W') ; w''(w') \geq \alpha\}$. La fonction f est dans $L^1(\mu)$ et si elle n'est pas nulle, on peut choisir λ tel que $\|f\| = 1$. Ainsi $T(f)$ est un point de $B(W')$, en particulier il est dans K_0 . Par conséquent, on a:

$$\begin{aligned} \alpha > w''[T(f)] &= \int_{B(W')} w''(w') f(w') d(\mu(w')) \\ &= \int_{\{w'' \geq \alpha\}} w''(w') d(\mu(w')) \geq \alpha ; \end{aligned}$$

ce qui est impossible et montre que $\mu(\{w'' \geq \alpha\}) = 0$; d'où le résultat annoncé.

COROLLAIRE 21. Soient W un espace de Banach ne contenant pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ et μ une mesure sur $B(W')$. Alors $\mu^*(K) = 0$ dès que K est une partie $\sigma(V'V'')$ -compacte (resp. convexe et $\sigma(V', V'')$ -ouverte) disjointe de K_0 .

On ne peut affirmer que la mesure μ est portée par K_0 lui-même puisqu'alors la mesure μ serait portée par un K_σ fort puisque ceci revient, d'après un résultat de Schwartz [16], à dire que W' possède la propriété de Radon–Nikodym qui est une hypothèse strictement plus forte que la condition $W \nexists l^1(\mathbf{N})$. En utilisant le théorème 16 (ou 13) on peut, en utilisant les mêmes techniques, prouver les résultats suivants qui n'ont évidemment d'intérêt que pour des espaces non séparables.

PROPOSITION 22. Soient V un espace de Banach ne contenant pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ et μ une mesure de probabilité sur $B(V')$. Alors $\overline{\text{conv}}(S\mu)$ l'adhérence $\sigma(V', V)$ -fermée de l'enveloppe convexe du support $S\mu$ de μ est $\sigma(V', V)$ -séparable.

COROLLAIRE 23. Soit V un espace de Banach ne contenant pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ qui est un sous-espace de $C(X)$ où X est le support d'une mesure. Alors l'espace V' est $\sigma(V', V)$ -séparable.

Notons que ces résultats ne constituent nullement une caractérisation puisque si $V = l^1(\mathbf{N})$ l'espace $V' = l^\infty(\mathbf{N})$ vérifie les conditions du corollaire. Cependant, il donne une idée sur la \exists taille \exists de V . Ainsi bien que le cardinal de X et de $C(X)$ peuvent être arbitrairement grands le cardinal de V est inférieur à la puissance du continu. En tout cas, les hypothèses du corollaire 23 n'impliquent pas que V est séparable, comme le montre l'exemple donné dans [6].

Il serait intéressant de caractériser les espaces de Banach tels que tout opérateur $L^1([0, 1])$ dans U est complètement continu. Cette classe contient les espaces qui vérifient la propriété de Schur, les espaces qui possèdent la propriété de Radon–Nikodym et les sous-espaces du dual d'un espace ne contenant pas $l^1(\mathbf{N})$. On ignore si la dernière propriété caractérise effectivement cette classe d'espaces.

Pour terminer signalons une application immédiate du théorème 11 qui paraît comme une version duale du théorème 16.

PROPOSITION 24. Soit V un espace de Banach qui possède la propriété D.P. S'il existe un opérateur non complètement continu de V dans $L^1(\mu)$, il existe un sous-espace de V' isomorphe à $C([0, 1])$.

DEMONSTRATION. Si T est un tel opérateur de V dans $L^1(\mu) = W$, on voit que T' n'est pas l^1 -singulier d'après le théorème 11. Par conséquent, la proposition 6 permet de conclure puisque l'espace W' est isométrique à un espace $C(X)$. Remarquons que dans cette proposition la mesure μ n'est pas nécessairement σ -finie.

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Beauzamy, *Opérateurs de type Rademacher*, Séminaire Maurey–Schwartz, exposé 5–6, 1975–1976, École Polytechnique, Paris, 1976.
2. C. Bessaga et A. Pelczynski, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, *Studia Math.* 17 (1958), 151–164.
3. W. J. Davies, T. Figiel, W. V. Johnson, A. Pelczynski, *Factoring weakly compact operators*, *J. Functional Analysis* 17 (1974), 311–327.
4. R. Haydon, *Some more characterizations of Banach spaces containing l^1* , *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 80 (1976), 269–276.
5. W. B. Johnson et H. Rosenthal, *On w -basis sequences and their applications to the study of Banach spaces*, *Studia Math.* 43 (1972), 77–92.
6. J. Lindenstrauss et C. Stegall, *Exemples of separable spaces which do not contain l^1 and whose duals are not separable*, *Studia Math.* 55 (1975), 81–105.
7. J. Lindenstrauss, *On James' paper "Separable conjugate spaces"*, *Israël J. Math.* 9 (1971), 279–284.
8. A. Nissenzweig, *w^* -sequential convergence*, *Israël J. Math.* 22 (1975), 266–272.
9. E. Odell et H. Rosenthal, *A double dual characterization of separable Banach spaces containing l^1* , *Israël J. Math.* 20 (1975), 375–384.
10. A. Pelczynski, *Strictly singular and strictly cosingular operators I and II*, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 13 (1965), 31–41.
11. A. Pelczynski, *Projection in certain Banach spaces*, *Studia Math.* 19 (1960), 209–218.
12. A. Pelczynski, *Uncomplemented function algebras with separable annihilators*, *Duke Math. J.* 33 (1966), 605–612.
13. A. Pelczynski, *On Banach spaces containing $L^1(\mu)$* , *Studia Math.* 30 (1968), 231–246.
14. H. Rosenthal, *On factors of $C((0, 1))$ with non separable dual*, *Israel J. Math.* 13 (1972), 361–378.
15. H. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing l^1* , *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 71 (1974), 2411–2413.
16. L. Schwartz, *Propriété de Radon–Nikodym*, Séminaire Maurey–Schwartz; exposé n° 5, 1974–1975, École Polytechnique, Paris, 1976.
17. Z. Semadeni, *Banach Spaces Of Continuous Functions* (Monografie Matematyczne 55), PWN—Polish Scientific Publ., Warszawa, 1971.
18. S. Simons, *On the Dunford–Pettis property and Banach spaces containing co* , *Math. Ann.* 216 (1975), 225–231.
19. C. Stegall, *A result of Haydon and its applications*, Séminaire Maurey–Schwartz, exp. n° 2, 1975–76.
20. J. Diestel et C. J. Siefert, *The Banach–Sacks ideal*, à paraître.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD (LYON 1)
69621 — VILLEURBANNE, FRANCE

ET

EQUIPE D'ANALYSE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
UNIVERSITÉ PARIS VI
2, PLACE JUSSIEU
75005 — PARIS, FRANCE