MATH SCAND. 42 (1978), 71–100

IMAGE D'UN HOMOMORPHISME ET FLOT DES POIDS D'UNE RELATION D'ÉQUIVALENCE MESURÉE

JEAN-LUC SAUVAGEOT

Introduction.

La classification par W. Krieger [16], [17] des transformations ergodiques non singulières T d'un espace mesuré (U,μ) fait intervenir deux invariants: le « ratio-set » $r(T)$ et un flot $\mathscr{W}_T$, construits à partir du cocycle « dérivée de mesure »

$$z \to \frac{dT^z\mu}{d\mu}, \quad z \in \mathbf{Z}\,.$$

Ces deux invariants peuvent être définis pour un 1-cocycle sur un système dynamique mesuré, à valeurs dans un groupe localement compact; le premier est l'ensemble des « valeurs essentielles » de K. Schmidt [26], [27], le second l'image stable ou *image virtuelle* (en anglais, « range closure») de G. W. Mackey [19].

En généralisant la notion de 1-cocycle, on obtient celle d'homomorphisme d'un groupoïde mesuré dans un groupe localement compact. L'image virtuelle est encore définie (cf. [22]), et la généralisation du « ratio-set », sous le nom d'*image réelle*, fait l'objet de notre paragraphe II.1.

Le « ratio-set » $r(T)$ et le flot $\mathscr{W}_T$ apparaissent comme des invariants algébriques (respectivement « invariant » « S » et « flot des poids ») de l'algèbre de von Neumann associée à T par la construction de Murray–von Neumann. Le propos de cette étude est de développer ce parallélisme dans une double direction:

— d'une part, montrer que les deux invariants de la similarité, image réelle et image virtuelle, attachés à un homomorphisme d'un groupoïde mesuré dans un groupe localement compact, ont un comportement (chacun séparément et dans leurs rapports réciproques) analogue à celui des invariants « S » et « flot des poids » d'une algèbre de von Neumann;

— d'autre part, montrer que l'image réelle et l'image virtuelle de l'homomorphisme modulaire (qui est défini à une similarité près) attaché à un

Reçu le 28 mars 1977.

groupoïde mesuré $\mathscr{G}$ sont effectivement, lorsque $\mathscr{G}$ est un relation d'équivalence mesurée, les invariants « S » et « flot des poids » respectivement d'une famille d'algèbres de von Neumann $\mathscr{M}^{\alpha}(\mathscr{G})$ (α deux-cocycle de $\mathscr{G}$ dans le tore) construites par P. Hahn [14]. Ces algèbres englobent la construction de Murray et von Neumann (avec action libre), la construction de Krieger [15] et ses généralisations ([10], [24]).

Après un paragraphe préliminaire (§ I) sur le rapport entre les notions de groupoïde et de relation d'équivalence, on étudie au paragraphe II l'image réelle $r(\varrho)$ d'un homomorphisme ϱ à valeurs dans un groupe G (II.1, II.2) et ses rapports avec l'image virtuelle W_ϱ (II.3). On montre en particulier que la partie finie de $r(\varrho)$ est un sous-groupe fermé de G (proposition II.1.2), que, lorsque G est abélien, ϱ est similaire à l'homomorphisme trivial si et seulement si $r(\varrho)$ est réduit à l'élément neutre de G (proposition II.2.1), et que le noyau de W_ϱ est le plus grand sous-groupe distingué de G contenu dans $r(\varrho)$ (propositon II.3.3).

Le paragraphe III est une interprétation de l'image virtuelle en termes d'algèbres de von Neumann, d'action de groupe, de produit croisé et d'action duale. Au paragraphe IV, on se restreint aux relations d'équivalence mesurées et on obtient, en application des paragraphes précédents, le calcul des invariants « S » et « flot des poids » annoncé ci-dessus (théorème IV.1.1); la suite du paragraphe IV est consacrée au type de l'algèbre $\mathscr{M}^{\alpha}(\mathscr{G})$ dans la classification de Murray–von Neumann (IV.1), et à l'étude des automorphismes de $\mathscr{M}^{\alpha}(\mathscr{G})$ en relation avec les automorphismes de l'espace des unités de $\mathscr{G}$ compatibles avec la relation d'équivalence associée à $\mathscr{G}$ (IV.2).

Les principaux résultats de cet article ont été présentés sous une forme simplifiée dans la note [25].

I. Groupoide et relation d'équivalence.

I.1. *Terminologie.*

Dans tout ce travail, $(\mathscr{G},\mathscr{C})$ désigne un groupoïde analytique mesuré au sens de [22]. Si x est un élément de groupoïde $\mathscr{G}$, on désignera par

$$\begin{array}{rll} x^{-1} & & \text{son inverse} \\ r(x) & = x\cdot x^{-1} & \text{son unité à droite} \\ d(x) & = x^{-1}\cdot x & \text{son unité à gauche}\,. \end{array}$$

On notera $\mathscr{G}^{(0)}$ l'ensemble des unités de $\mathscr{G}$, $\mathscr{C}^{(0)}$ la classe de mesures (le mot « mesure » signifiera toujours « mesure positive σ-finie ») sur $\mathscr{G}^{(0)}$ image de $\mathscr{C}$ par l'application r (ou l'application d) de $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{G}^{(0)}$.

Si A et B sont des sous-ensembles de $\mathscr{G}$, on posera

$$A^{-1} = \{x \in \mathscr{G} \mid x^{-1} \in A\}$$

$$AB = \{xy \mid x \in A,\ y \in B \text{ et } d(x)=r(y)\}\,.$$

Si x est un élément de $\mathscr{G}$, on écrira xA (respectivement Ax) au lieu de $\{x\}A$ (respectivement $A\{x\}$).

On fixe, une fois pour toute dans la classe $\mathscr{C}$, une mesure invariante à gauche β, c'est à dire de la forme

$$(1) \qquad \beta = \int_{\mathscr{G}^{(0)}} \beta^u \, d\beta^{(0)}(u)$$

où $\beta^{(0)}$ est une mesure dans la classe $\mathscr{C}^{(0)}$, et $\{\beta^u, u \in \mathscr{G}^{(0)}\}$ un champ de mesures sur $\mathscr{G}$ borélien (i.e. pour tout borélien A de $\mathscr{G}$, l'application $\mathscr{G}^{(0)} \ni u \to \beta^u(A) \in [0, +\infty]$ est borélienne) et invariant à gauche: pour tout élément x de $\mathscr{G}$, pour tout borélien $A \subset \mathscr{G}$, on a l'égalité

$$\beta^{d(x)}(A) = \beta^{r(x)}(xA) .$$

(Pour l'existence d'une mesure invariante, cf. [14, theorem I.8]. On rappelle que la mesure β est quasi-invariante par l'inversion ($x \to x^{-1}$) et que (1) est une désintégration de β par rapport à l'application r.)

Soit E un sous-ensemble borélien de $\mathscr{G}^{(0)}$. L'ensemble

$$\mathscr{G}_{\restriction E} = \{x \in \mathscr{G} \mid d(x) \in E \text{ et } r(x) \in E\}$$

est un sous-groupoïde borélien de $\mathscr{G}$ qui est appelé un *rétracté* de $\mathscr{G}$. Si E est non-négligeable (mod $\mathscr{C}^{(0)}$), $\mathscr{G}_{\restriction E}$ est non négligeable (mod $\mathscr{C}$: cf. infra lemme I.1.1) et, muni de la classe de mesures $\mathscr{C}_{\restriction E}$ trace de $\mathscr{C}$, c'est un groupoïde analytique mesuré (vérification élémentaire).

Si U est un borélien de $\mathscr{G}^{(0)}$ de complémentaire $\mathscr{C}^{(0)}$-négligeable, le rétracté $\mathscr{G}_{\restriction U}$ (dont le complémentaire dans $\mathscr{G}$ est $\mathscr{C}$-négligeable) s'appelle une *contraction inessentielle de* $\mathscr{G}$.

Les deux lemmes suivants seront utiles dans la suite. Le premier est dû à A. Ramsay (cf. [22, lemme 5.2]).

LEMME I.1.A. *Soit $\mathscr{G}_0$ un sous-groupoïde de $\mathscr{G}$ dont le complémentaire est $\mathscr{C}$-négligeable. Alors $\mathscr{G}_0$ contient une contraction inessentielle.*

LEMME I.1.1. *Soient A et B deux boréliens de $\mathscr{G}$, E un borélien de $\mathscr{G}^{(0)}$.*

(a) *On suppose que $\{u \in \mathscr{G}^{(0)} \mid \beta^u(A^{-1}) \neq 0 \text{ et } \beta^u(B) \neq 0\}$ est non-négligeable* (mod $\mathscr{C}^{(0)}$). *Alors AB est non-négligeable* (mod $\mathscr{C}$).

(b) *On suppose que A est non-négligeable. Alors AA^{-1} et $A^{-1}A$ sont non négligeables.*

(c) *On suppose que E est non-négligeable* (mod $\mathscr{C}^{(0)}$). *Alors le rétracté $\mathscr{G}_{\restriction E}$ est non-négligeable* (mod $\mathscr{C}$).

DEMONSTRATION. (b) décule immédiatement de (a).

(c) découle de (b) car

$$\mathcal{G}_{\restriction E} = r^{-1}(E)d^{-1}(E) \quad \text{et} \quad d^{-1}(E) = (r^{-1}(E))^{-1} .$$

Démontrons (a): On pose

$$F = \{u \in \mathcal{G}^{(0)} \mid \beta^u(A^{-1}) \neq 0 \text{ et } \beta^u(B) \neq 0\} .$$

Comme F est non-négligeable et comme, si $u \in F$,

$$\beta^u(A^{-1} \cap r^{-1}(F)) = \beta^u(A^{-1}) \neq 0$$

$A^{-1} \cap r^{-1}(F)$ est non négligeable et, par symétrie de la classe $\mathscr{C}$, $A \cap d^{-1}(F)$ est non négligeable. On en déduit que le sous-ensemble analytique $r(d^{-1}(F) \cap A)$ de $\mathcal{G}^{(0)}$ est $\mathscr{C}^{(0)}$ non négligeable.

Soit $u \in r(d^{-1}(F) \cap A)$: il existe $x \in A$ tel que $r(x)=u$ et $d(x) \in F$. On aura alors

$$\begin{aligned} \beta^{d(x)}(B) &\neq 0 && \text{(par définition de } F) \\ \beta^{r(x)}(xB) &\neq 0 && \text{(par invariance de } \beta) \\ \beta^{r(x)}(AB) &\neq 0 && \text{(car } xB \subset AB) \end{aligned}$$

soit $\beta^u(AB) \neq 0$, $\forall u \in r(d^{-1}(F) \cap A)$, d'où $\beta(AB) \neq 0$.

I.2. *La relation d'équivalence naturelle.*

DEFINITION I.2.1. *La relation d'équivalence naturelle* associée à un groupoïde $\mathcal{G}$ est la relation d'équivalence R sur $\mathcal{G}^{(0)}$ définie par

$$uRv \text{ si il existe } x \in \mathcal{G} \text{ tel que } r(x) = u \text{ et } d(x) = v .$$

On notera $\mathscr{B}_R^{(0)}$ la tribu des boréliens saturés de $\mathcal{G}^{(0)}$, c'est à dire la tribu des boréliens E de $\mathcal{G}^{(0)}$ vérifiant $r^{-1}(E)=d^{-1}(E)$. On désignera par $L^\infty(\mathcal{G}^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)})^R$ l'algèbre des classes de fonctions essentiellement bornées $\mathscr{B}_R^{(0)}$-measurables (mod $\mathscr{C}^{(0)}$).

LEMME I.2.2. *Soit E un borélien de $\mathcal{G}^{(0)}$. Il existe un borélien saturé $[E]$, essentiellement unique, ayant les propriétés suivantes*:

i) $E \subset [E]$ mod $\mathscr{C}^{(0)}$

ii) *Si F est un borélien de $\mathcal{G}^{(0)}$ vérifiant $d^{-1}(F)=r^{-1}(F)$* (mod $\mathscr{C}$) *et si $E \subset F$* (mod $\mathscr{C}^{(0)}$), *alors $[E] \subset F$* (mod $\mathscr{C}^{(0)}$).

DEFINITION I.2.3. $[E]$ sera appelé *enveloppe essentielle saturée* du borélien E de $\mathcal{G}^{(0)}$.

LEMME I.2.4. (a) *Un sous-ensemble mesurable F de $\mathscr{G}^{(0)}$ est essentiellement égal à un borélien saturé si et seulement si il vérifie $d^{-1}(F)=r^{-1}(F)$ mod $\mathscr{C}$.*

(b) *Une fonction complexe mesurable f définie sur $\mathscr{G}^{(0)}$ est $\mathscr{B}_R^{(0)}$-mesurable si et seulement si elle vérifie $f\circ r=f\circ d$ mod $\mathscr{C}$.*

(c) $L^\infty(\mathscr{G}^{(0)},\mathscr{C}^{(0)})^R=\{f\in L^\infty(\mathscr{G}^{(0)},\mathscr{C}^{(0)}) \mid f\circ r=f\circ d \text{ mod } \mathscr{C}\}$.

Le lemme I.2.4 découle immédiatement de I.2.2.

DEMONSTRATION DU LEMME I.2.2. Les propriétés i) et ii) caractérisent (mod $\mathscr{C}^{(0)}$) le borélien saturé $[E]$: d'où l'unicité.

Posons $[E]=\{u\in\mathscr{G}^{(0)} \mid \beta^u(d^{-1}(E))\neq 0\}$. $[E]$ est manifestement borélien. Soit $x\in\mathscr{G}$ tel que $d(x)\in[E]$: on aura $\beta^{d(x)}(d^{-1}(E))\neq 0$, donc

$$\beta^{r(x)}(xd^{-1}(E))\neq 0 \quad \text{et} \quad \beta^{r(x)}(d^{-1}(E))\neq 0\,,$$

car $xd^{-1}(E)\subset d^{-1}(E)$; on a montré que $x\in\mathscr{G}$ et $d(x)\in[E]$ impliquent $r(x)\in[E]$: $[E]$ est saturé pour R.

i) on veut montrer que $E'=E-[E]$ est $\mathscr{C}^{(0)}$-négligeable. Si $u\in E'$, $\beta^u(d^{-1}(E))=0$, donc $\beta^u(\mathscr{G}_{\restriction E'})=0$; on aura donc $\beta(\mathscr{G}_{\restriction E'})=0$, et $\beta^{(0)}(E')=0$ d'après le lemme I.1.(c).

ii) on suppose $E\subset F$ mod $\mathscr{C}^{(0)}$, donc $d^{-1}(E)\subset d^{-1}(F)$ mod $\mathscr{C}$, et $d^{-1}(F)=r^{-1}(F)$ mod $\mathscr{C}$, soit $d^{-1}(E)\subset r^{-1}(F)$ mod $\mathscr{C}$ et, par conséquent:

$$\forall u\in\mathscr{G}^{(0)}\ \beta^{(0)}-\text{p.s.},\quad d^{-1}(E)\subset r^{-1}(F)\ \beta^u-\text{p.s.}\,,$$

d-où

$$\forall u\in[E]\ \beta^{(0)}-\text{p.s.},\quad \beta^u(r^{-1}(F))\neq 0,\ \text{donc}\ u\in F\,.$$

REMARQUE I.2.5. A. Ramsay appelle « essentiellement saturé » un sous-ensemble F de $\mathscr{G}^{(0)}$ tel que $d^{-1}(F)=r^{-1}(F)$ mod $\mathscr{C}$ et demande (cf. [22, p. 321]) si un borélien essentiellement saturé est essentiellement égal à un borélien saturé. Le lemme I.2.4 résoud cette question par l'affirmative.

DEFINITION I.2.6. Le groupoïde $\mathscr{G}$ sera dit ergodique si tout borélien saturé de $\mathscr{G}^{(0)}$ est négligeable ou de complémentaire négligeable. Il revient au même de dire que l'algèbre $L^\infty(\mathscr{G}^{(0)},\mathscr{C}^{(0)})^R$ est de dimension 1.

I.3. *Homomorphismes. Module.*

L'ensemble

$$\mathscr{G}^{(2)}=\{(x,y)\in\mathscr{G}\times\mathscr{G} \mid d(x)=r(y)\}$$

est muni canoniquement d'une structure de groupoïde analytique mesuré, la classe de mesures $\mathscr{C}^{(2)}$ étant celle de la mesure $\beta^{(2)}$ définie par

$$\beta^{(2)}(f) = \int f(x,y)\,d\beta^{d(x)}(y)\,d\beta(x)$$

(f fonction borélienne positive sur $\mathscr{G}^{(2)}$).

DEFINITION I.3.1. Une application ϱ de $\mathscr{G}$ dans un groupe borélien G sera appelée *homomorphisme* si ϱ est borélienne et si il existe une contraction inessentielle $\mathscr{G}_0$ de $\mathscr{G}$ telle que

$$\forall x \in \mathscr{G}_0, \qquad \varrho(x^{-1}) = \varrho(x)^{-1},$$

$$\forall (x,y) \in \mathscr{G}_0^{(2)}, \quad \varrho(xy) = \varrho(x)\varrho(y).$$

Le lemme suivant, énoncé par A. Ramsay [22, theorem 5.1], permet d'affaiblir la définition ci-dessus:

LEMME I.3.A. *Soit* $(\mathscr{G},\mathscr{C})$ *un groupoïde mesuré,* G *un groupe borélien analytique et* ϱ *une application borélienne de* $\mathscr{G}$ *dans* G *vérifiant*

$$\forall (x,y) \in \mathscr{G}^{(2)}\ \mathscr{C}^{(2)}-\text{p.s.}, \quad \varrho(xy) = \varrho(x)\varrho(y).$$

Alors il existe un homomorphisme ϱ' *de* $\mathscr{G}$ *dans* G *tel que* $\varrho = \varrho' \bmod \mathscr{C}$.

DEFINITION I.3.2. Deux homomorphismes ϱ et ϱ' de $\mathscr{G}$ dans le groupe G seront dits *similaires* si il existe une application borélienne θ de $\mathscr{G}^{(0)}$ dans G telle que

$$\forall x \in \mathscr{G}\ \mathscr{C}-\text{p.s.}, \qquad \varrho'(x) = \theta(r(x))\varrho(x)\theta(d(x))^{-1}.$$

NOTATION. On écrira $\varrho \sim \varrho'$ si ϱ et ϱ' sont similaires.

REMARQUE. On identifiera souvent implicitement deux homomorphismes qui coïncident sur une contraction inessentielle (il suffit pour cela qu'il coïncident mod $\mathscr{C}$).

EXEMPLES.

I.3.3. A la mesure invariante à gauche β est associé un homomorphisme δ de $\mathscr{G}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs; δ est caractérisé par

$$\int_{\mathscr{G}} f(x^{-1})\delta(x^{-1})\,d\beta(x) = \int_{\mathscr{G}} f(x)\,d\beta(x), \qquad \forall f \text{ fonction borélienne positive sur } \mathscr{G}$$

(cf. [14, proposition I.8]). δ est appelé *homomorphisme modulaire* ou *module* associé à β; la classe de similarité de δ est indépendante du choix de la mesure invariante à gauche β dans la classe $\mathscr{C}$.

I.3.4. Soit (U, μ) un space analytique mesuré, T une permutation borélienne de U non singulière (i.e. $T\mu \sim \mu$). L'espace $\mathscr{G} = U \times \mathbf{Z}$ peut être muni d'une structure de groupoïde analytique (dont l'espace des unités $\mathscr{G}^{(0)} = U \times \{0\}$ s'identifie à U) en posant

$$r(u,z) = u; \quad d(u,z) = T^{-z}(u); \quad (u,z)^{-1} = (T^{-z}(u), -z);$$
$$(u,z)(u',z') = (u, z+z') \quad \text{si } u' = T^{-z}(u)$$

$((u,z), (u',z') \in \mathscr{G} = U \times \mathbf{Z})$.

La mesure $\beta = \mu \otimes \nu$ (ν = mesure comptable de $\mathbf{Z}$) est invariante à gauche et son module δ est donné par la formule:

$$\delta(u,z)^{-1} = \frac{dT^z\mu}{d\mu}(u).$$

W. Krieger [16], [17] associe à T deux invariants de l'équivalence faible, le ratio-set $r(T)$ et un flot $\mathscr{W}_T$, qui sont également des invariants de la classe de similarité de δ. Ces invariants peuvent être généralisés à un homomorphisme quelconque d'un groupoïde analytique mesuré dans un groupe localement compact à base dénombrable. C'est cette généralisation qui sera l'objet du prochain paragraphe.

II. Images d'un homomorphisme.

Dans ce paragraphe $(\mathscr{G}, \mathscr{C})$ désigne un groupoïde analytique mesuré, qu'on supposera *ergodique* au § I.1, G un groupe localement compact à base dénombrable et ϱ un homomorphisme de $\mathscr{G}$ dans G (définition I.3.1.).

II.1. *Définition de l'image réelle.*

Definition II.1.1. On appellera *image réelle* de l'homomorphisme ϱ et on notera $r(\varrho)$ le sous-ensemble du compactifié d'Alexandroff $\bar{G} = G \cup \{\infty\}$ de G défini de la manière suivante:

un point s de $\bar{G}$ appartient à $r(\varrho)$ si et seulement si pour tout voisinage V de s et tout borélien E de $\mathscr{G}^{(0)}$ non négligeable $(\mathrm{mod}\, \mathscr{C}^{(0)})$ le sous-ensemble $\varrho^{-1}(V \cap G) \cap \mathscr{G}_{\restriction E}$ de $\mathscr{G}$ est non négligeable $(\mathrm{mod}\, \mathscr{C})$.

Les propriétés suivantes sont immédiates:

* $r(\varrho)$ est un sous-ensemble fermé de $\bar{G}$;

* $r(\varrho) = \bigcap_{\substack{E \text{ borélien de } \mathscr{G}^{(0)} \\ E \text{ non négligeable}}}$ image essentielle de ϱ_E,

en désignant par ϱ_E la restriction de ϱ au rétracté $\mathscr{G}_{\restriction E}$ et en appelant « image essentielle de ϱ_E » le support dans $\bar{G}$ de la classe de mesures image de $\mathscr{C}_{\restriction E}$ (cf. § I.1).

Il découle du lemme II.1.5 ci-dessous que l'on a également

$$* \quad r(\varrho) = \bigcap_{\substack{E \text{ borélien de } \mathscr{G}^{(0)} \\ E \text{ non négligeable}}} \overline{\varrho_E(\mathscr{G}_{\restriction E})} \quad \text{(la fermeture étant prise dans } \bar{G}) \,.$$

Proposition II.1.2. *$r(\varrho) \cap G$ est un sous-groupe fermé de G.*

Proposition II.1.3. *On suppose G abélien;*

(a) *Si $\varrho \sim \varrho'$, alors $r(\varrho) = r(\varrho')$;*
(b) *On a $r(\varrho) = \bigcap_{\varrho' \sim \varrho}$ image essentielle de ϱ'.*

Remarque II.1.4. Deux homomorphismes conjugués ont des images réelles conjuguées, et la proposition II.1.3. ne peut donc s'étendre au cas où G n'est pas abélien; toutefois, dans le cas général, les conclusions (a) et (b) restent valables à condition de remplacer $r(\varrho)$ par $\bigcap_{s \in G} s r(\varrho) s^{-1}$.

Demonstration de la proposition II.1.2. Soit V un voisinage de l'élément neutre e de G, E un borélien non négligeable de $\mathscr{G}^{(0)}$, s un point de G appartenant au support de la mesure $\varrho_E(\mathscr{C}_{\restriction E})$ et W un voisinage de s tel que $W . W^{-1} \subset V$. On aura alors

$$\varrho_E^{-1}(W) \cdot \varrho_E^{-1}(W)^{-1} \subset \varrho_E^{-1}(V) \qquad (\operatorname{mod} \mathscr{C}_{\restriction E})$$

et, comme $\varrho_E^{-1}(W)$ est non négligeable, $\varrho_E^{-1}(V)$ est non négligeable en vertu de I.1.1(b). On a montré $e \in r(\varrho)$.

Soient s_1 et s_2 deux éleéments de $G \cap r(\varrho)$, V un voisinage de $s_1^{-1} \cdot s_2$ et E un borélien non négligeable de $\mathscr{G}^{(0)}$. Soient V_1 et V_2 deux voisinages de s_1 et s_2 respectivement tels que $V_1^{-1} \cdot V_2 \subset V$. On posera

$$E' = \{u \in \mathscr{G}^{(0)} \mid \beta^u(\varrho^{-1}(V_1) \cap \mathscr{G}_{\restriction E}) \neq 0\}$$
$$E'' = \{u \in \mathscr{G}^{(0)} \mid \beta^u(\varrho^{-1}(V_2) \cap \mathscr{G}_{\restriction E'}) \neq 0\}$$

E'' est un sous-ensemble borélien de E' non négligeable et, de I.1.1(a), on déduit que $\varrho^{-1}(V_1)^{-1} \cap \varrho^{-1}(V_2) \cap \mathscr{G}_{\restriction E}$ est non négligeable, et donc que $\varrho^{-1}(V) \cap \mathscr{G}_{\restriction E}$ est non négligeable: on a prouvé $s_1^{-1} s_2 \in r(\varrho)$, d'où la proposition.

Lemme II.1.5. *Soit E un borélien de $\mathscr{G}^{(0)}$, s un élément de $\bar{G}$ et W un voisinage de s tels que $\varrho^{-1}(W) \cap \mathscr{G}_{\restriction E}$ soit négligeable. Il existe alors un voisinage V' de s (ne dépendant que de W) et un borélien E' de $\mathscr{G}^{(0)}$ essentiellement égal à E tels que $\varrho^{-1}(V') \cap \mathscr{G}_{\restriction E'} = \varnothing$.*

DEMONSTRATION. En remplaçant $\mathscr{G}$ par une contraction inessentielle, on peut supposer que ϱ est un homomorphisme algébrique.

Il existe un voisinage V' de s et un voisinage V_0 de e tels que $V' \cdot V_0 \subset W$. On posera

$$E_1 = \{u \in E \mid \beta^u(\varrho^{-1}(W) \cap \mathscr{G}_{\restriction E}) = 0\}$$

$$E' = \{u \in E_1 \mid \beta^u(\varrho^{-1}(V_0) \cap \mathscr{G}_{\restriction E_1}) \neq 0\} .$$

L'hypothèse « $\varrho^{-1}(W) \cap \mathscr{G}_{\restriction E}$ négligeable » implique $E = E_1 \pmod{\mathscr{C}^{(0)}}$. Posons $F = E_1 - E'$; par définition de E', on a

$$\beta^u(\varrho^{-1}(V_0) \cap \mathscr{G}_{\restriction F}) = 0 \quad \text{pour tout } u \text{ de } F ,$$

soit $\beta\,(\varrho^{-1}(V_0) \cap \mathscr{G}_{\restriction F}) = 0$; d'après la définition de $r(\varrho)$ et la proposition II.1.2, F est nécéssairement négligeable. On a montré $E = E_1 = E' \pmod{\mathscr{C}^{(0)}}$.

Soit $x \in \varrho^{-1}(V') \cap \mathscr{G}_{\restriction E'}$; on a $r(x) \in E' \subset E_1$, soit

$$\beta^{r(x)}(\varrho^{-1}(W) \cap \mathscr{G}_{\restriction E}) = 0$$

et comme $x \cdot \varrho^{-1}(V_0) \subset \varrho^{-1}(V')\varrho^{-1}(V_0) \subset \varrho^{-1}(W)$,

$$\beta^{r(x)}(x \cdot \varrho^{-1}(V_0) \cap \mathscr{G}_{\restriction E}) = 0;$$

d'autre part, $d(x) \in E'$, soit $\beta^{d(x)}(\varrho^{-1}(V_0) \cap \mathscr{G}_{\restriction E_1}) \neq 0$, d'où

$$\beta^{r(x)}(x \cdot \varrho^{-1}(V_0) \cap \mathscr{G}_{\restriction E_1}) \neq 0 .$$

On a donc $\varrho^{-1}(V') \cap \mathscr{G}_{\restriction E'} = \emptyset$, sous peine de contradiction.

Le lemme suivant, reformulation du lemme 6.6 de [22], est une application simple du lemme de sélection de von Neumann (cf. [6, appendice V, n° 5]):

LEMME II.1.6. *Soit E un borélien non négligeable de $\mathscr{G}^{(0)}$. Il existe une application borélienne q de $\mathscr{G}^{(0)}$ dans $\mathscr{G}$ telle que*

(a) $\forall u \in \mathscr{G}^{(0)}, \quad d(q(u)) = u$
(b) $\forall u \in \mathscr{G}^{(0)}\ \mathscr{C}^{(0)}-\text{p.s.}, \quad r(q(u)) \in E$
(c) $\forall u \in E, \quad q(u) = u$
(d) $\forall x \in \mathscr{G}, \quad q(r(x))xq(d(x))^{-1}$ *existe et,*
$\forall x \in \mathscr{G}\ \mathscr{C}-\text{p.s.}, \quad q(r(x)xq(d(x))^{-1}| \in \mathscr{G}_{\restriction E}$.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION II.1.3.

(a) On suppose $\varrho(x) = \theta(r(x))\varrho'(x)\theta(d(x))^{-1}$ (on a remplacé $\mathscr{G}$ par une contraction inessentielle). Soit $s \in \bar{G}$, $s \notin r(\varrho)$; d'après le lemme II.1.5., il existe un borélien non négligeable E de $\mathscr{G}^{(0)}$ et un voisinage V de s tel que $\varrho^{-1}(V) \cap \mathscr{G}_{\restriction E} = \emptyset$. Soit W un voisinage de s et V_0 un voisinage de e tels que

$V_0 \cdot W \cdot V_0^{-1} \subset V$; il existe un point g de G tel que $E' = E \cap \theta^{-1}(gV_0)$ soit non négligeable, et on vérifie sans peine que la construction de E' implique $\varrho^{-1}(W) \cap \mathscr{G}_{\restriction E'} = \varnothing$, soit $s \notin r(\varrho')$.

(b) De (a), on déduit

$$r(\varrho) \subset \bigcap_{\varrho' \sim \varrho} \text{image essentielle de } \varrho' .$$

Soit $s \notin r(\varrho)$, E et V comme ci-dessus tels que $\varrho^{-1}(V) \cap \mathscr{G}_{\restriction E} = \varnothing$. Soit q l'application de $\mathscr{G}^{(0)}$ dans $\mathscr{G}$ ayant les propriétés (a), (b), (c), (d) du lemme II.1.6.; on pose

$$\varrho'(x) = \varrho(q(r(x))xq(d(x))^{-1}), \qquad \forall x \in \mathscr{G}:$$

alors $\varrho' \sim \varrho$ et, comme $\varrho'^{-1}(V) = \varrho^{-1}(V) \cap \mathscr{G}_{\restriction E}$ (mod $\mathscr{C}$) est négligeable, on a $s \notin$ image essentielle de ϱ'. D'où l'inclusion inverse.

II.2. *Propriétes de l'image réelle.*

L'image réelle fournit un critère simple pour qu'un homomorphisme soit similaire à l'homomorphisme trivial 1 (qui à tout x de $\mathscr{G}$ associe l'élément neutre de G).

PROPOSITION II.2.1. *On suppose G abélien.*

$$\text{Alors } \varrho \sim 1 \text{ si et seulement si } r(\varrho) = \{e\} .$$

Cette proposition permet de préciser le rapport entre $r(\varrho)$ et le groupe dual $\hat{G}$.

PROPOSITION II.2.2. *On suppose G abélien et $G/r(\varrho) \cap G$ compact. Alors $r(\varrho) \cap G$ est l'orthogonal du sous groupe $\{\gamma \in \hat{G} \mid \gamma \circ \varrho \sim 1\}$ de $\hat{G}$.*

PROPOSITION II.2.3. *On suppose que G est abélien et que, pour tout γ de $\hat{G}$, $\gamma \circ \varrho \sim 1$. Alors $\varrho \sim 1$.*

REMARQUE. Dans le cas particulier de l'homomorphisme δ de l'exemple I.3.4., la proposition II.2.1 est due à L. K. Arnold [1, Theorem 1]. Les trois propositions ci-dessus sont démontrées par K. Schmidt [26], [27] dans le cas d'un système dynamique ergodique.

LEMME II.2.4. *On suppose G abélien. Soit K un compact de $\bar{G}$ tel que $K \cap r(\varrho) = \varnothing$. Tout borélien non négligeable E de $\mathscr{G}^{(0)}$ contient un borélien non négligeable F tel que $\varrho^{-1}(K) \cap \mathscr{G}_{\restriction F} = \varnothing$.*

DEMONSTRATION. On itère la propriété suivante:

(P) Soit $s \in \bar{G} - r(\varrho)$. Il existe un voisinage V de s tel que tout borélien non négligeable E de $\mathscr{G}^{(0)}$ contienne un borélien non négligeable F vérifiant $\varrho_F^{-1}(V) = \emptyset$.

Pour démontrer (P), on fixe un voisinage W de s et un borélien non négligeable E_1 de $\mathscr{G}^{(0)}$ tels que $\varrho^{-1}(W) \cap \mathscr{G}_{\restriction E_1} = \emptyset$ (II.1.5), un voisinage V de s et un voisinage V_0 de e tels que $V_0 \cdot V \cdot V_0^{-1} \subset W$. En remplaçant $\mathscr{G}$ par une contration inessentielle, on peut supposer que ϱ est un homomorphisme algébrique et qu'il existe une application borélienne q de $\mathscr{G}^{(0)}$ dans $\mathscr{G}$ telle que (cf. II.1.6)

$$d(q(u)) = u, \ \forall u \in \mathscr{G}^{(0)}, \quad \text{et} \quad r(q(u)) \in E_1, \ \forall u \in \mathscr{G}^{(0)} .$$

Il existe un point s de G tel que

$$\{u \in E \mid \varrho(q(u)) \in sV_0\} = F$$

soit non négligeable. Si $x \in \mathscr{G}_{\restriction F}$, $q(r(x))xq(d(x))^{-1}$ existe et appartient à $\mathscr{G}_{\restriction E_1}$, et $\varrho(q(r(x)))\varrho(x)\varrho(q(d(x)))^{-1}$ n'appartient donc pas à W. Comme $\varrho(q(r(x)))$ et $\varrho(q(d(x)))$ appartiennent à sV_0, $\varrho(x)$ n'appartient pas à V et on a bien $\varrho^{-1}(V) \cap \mathscr{G}_{\restriction F} = \emptyset$.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION II.2.1. L'implication dans un sens résulte de II.1.3.(a).

Réciproquement, on suppose $r(\varrho) = \{e\}$. On fixe sur G une distance invariante d et on désigne par V_n la boule ouverte de centre e et de rayon 2^{-n} ($n \in \mathbf{N}$); en itérant le lemme ci-dessus, on obtient une suite décroissante $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de boréliens non négligeable de $\mathscr{G}^{(0)}$ tels que, $F_1 = \mathscr{G}^{(0)}$ et, pour tout $n \geqq 2$, $\varrho(\mathscr{G}_{\restriction F_n}) \subset V_n$.

En appliquant II.1.6. (et en remplaçant $\mathscr{G}$ par une contraction inessentielle), on obtient une suite $(q_n')_{n \in \mathbf{N}}$ d'applications de F_n dans $\mathscr{G}_{\restriction F_n}$ telles que, pour tout n, pour tout u de F_n

$$d(q_n'(u)) = u \quad \text{et} \quad r(q_n'(u)) \in F_{n+1} .$$

Pour tout n, $q_{n+1}'(r(q_n'(u)))q_n'(u)$ existe si $u \in F_n$, ce qui permet de poser par récurrence, pour tout u de $\mathscr{G}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} q_1(u) &= q_1'(u) \\ q_2(u) &= q_2'(r(q_1(u)))q_1(u) \\ &\vdots \\ q_n(u) &= q_n'(r(q_{n-1}(u)))q_{n-1}(u) \end{aligned}$$

etc...

Les q_n vérifient

$$\forall u \in \mathscr{G}^{(0)}, \quad d(q_n(u)) = u \text{ et } r(q_n(u)) \in F_{n+1}\,,$$
$$q_n(u)\cdot q_{n-1}(u)^{-1} \text{ existe et appartient à } \mathscr{G}_{\upharpoonright F_n}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathscr{G}$, $q_n(r(x))xq_n(d(x))^{-1}$ existe et appartient à $\mathscr{G}_{\upharpoonright F_{n+1}}$. On posera

$$\varrho_n(x) = \varrho\big(q_n(r(x))xq_n(d(x))^{-1}\big) \quad \text{et} \quad f_n(u) = \varrho(q_n(u))$$

(x et u dans $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}^{(0)}$ respectivement). Pour tout n, $\varrho_n(x) \in V_n$, $\forall x \in \mathscr{G}$, donc $\varrho_n(x) \to e$. D'autre part, si $u \in \mathscr{G}^{(0)}$,

$$f_n(u)\cdot f_{n-1}(u)^{-1} = \varrho\big(q_n(u)\cdot q_{n-1}(u)^{-1}\big) \in V_n, \quad \forall n \in \mathbf{N}:$$

les $f_n(u)$ forment une suite de Cauchy dans G, donc convergent vers une limite $f(u)$ pour tout u de $\mathscr{G}^{(0)}$.

A la limite, $\forall x \in \mathscr{G}$, $e = f(r(x))\varrho(x)f(d(x))^{-1}$, soit $\varrho \sim 1$.

LEMME II.2.5. *Soit $\tilde{\varrho}$ l'homomorphisme de $\mathscr{G}$ dans le groupe quotient $G/r(\varrho)\cap G$ déduit de ϱ par passage au quotient. On a $r(\tilde{\varrho}) = \{\tilde{e}\}$ ou $r(\tilde{\varrho}) = \{\tilde{e}, +\infty\}$ ($\tilde{e}$ = élément neutre du groupe quotient).*

DEMONSTRATION. Soit $s \in G$ tel que $\tilde{s} \in r(\tilde{\varrho})$. Soit E un borélien non négligeable de $\mathscr{G}^{(0)}$, V un voisinage de s, W un voisinage de s et V_0 un voisinage de e tels que $W\cdot V_0^2 \subset V$. On montre qu'il existe un élément g de $G \cap r(\varrho)$ tel que $\varrho^{-1}(W\cdot V_0\cdot g) \cap \mathscr{G}_{\upharpoonright E}$ soit non négligeable; on en déduit que

$$F = \{u \in E \mid \beta^u(\varrho^{-1}(W\cdot V_0\cdot g)^{-1} \cap \mathscr{G}_{\upharpoonright E}) \neq 0\}$$

est non négligeable et, comme $\varrho^{-1}(g^{-1}V_0) \cap \mathscr{G}_{\upharpoonright F}$ est non négligeable, que

$$\varrho_E^{-1}(V) \supset \varrho_E^{-1}(W\cdot V_0 g)\varrho_E^{-1}(g^{-1}V_0)$$

est non négligeable, soit $s \in r(\varrho)$ et $\tilde{s} = \tilde{e}$.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION II.2.2. Il est immédiat que, pour tout γ de $\hat{G}$,

$$\gamma(r(\varrho)\cap G) \subset r(\gamma\circ\varrho)\,.$$

Donc, si $\gamma\circ\varrho$ est similaire à 1, $r(\gamma\circ\varrho)$ est réduit à $\{1\}$ (proposition II.2.1), $\gamma(r(\varrho)\cap G)$ est réduit à $\{1\}$ et γ est orthogonal à $r(\varrho)\cap G$.

Réciproquement, supposons γ orthogonal à $H = r(\varrho)\cap G$. Alors $\gamma\circ\varrho$ est de la forme $\tilde{\gamma}\circ\tilde{\varrho}$, où $\tilde{\gamma}$ est un caractère de G/H et $\tilde{\varrho}$ l'homomorphisme défini dans l'énoncé du lemme II.2.5. ci-dessus. Si G/H est compact, on déduit du lemme II.2.5. $r(\tilde{\varrho})=\{\tilde{e}\}$, donc $\tilde{\varrho}\sim 1$ d'après la proposition II.2.1., et $\gamma\circ\varrho=\tilde{\gamma}\circ\tilde{\varrho}\sim 1$.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION II.2.3. On adapte sans difficulté la démonstration du Theorem 3 de [13].

REMARQUE. Lorsque le groupoïde $\mathscr{G}$ n'est pas ergodique, les propositions II.1.2, II.1.3 (a) et II.2.3 restent valables sans modification. Les propositions II.1.3. et II.2.1. restent vraies si on remplace dans l'énoncé l'invariant $r(\varrho)$ par un invariant $r'(\varrho)$ défini de manière analogue à $r(\varrho)$ mais en se limitant, dans la définition II.1.1., aux boréliens E de $\mathscr{G}^{(0)}$ dont l'enveloppe essentielle saturée $[E]$, définie en I.2.3., est de complémentaire négligeable; en d'autres termes, on a

$$r'(\varrho) = \bigcap_{\substack{E \text{ borélien de } \mathscr{G}^{(0)} \\ [E] \text{ conégligeable}}} \text{image essentielle de } \varrho_E .$$

II.3. *Image virtuelle.*

II.3.1. DEFINITION DU GROUPOÏDE $\mathscr{G}_\varrho$. Soit $(\mathscr{G},\mathscr{C})$ un groupoïde mesuré, G un groupe localement compact à base dénombrable et ϱ un homomorphisme de $\mathscr{G}$ dans G. On définit sur l'espace mesuré $(\mathscr{G}\times G, \mathscr{C}\otimes\mathscr{C}_G)$, où $\mathscr{C}_G$ est la classe de la mesure de Haar de G, une structure de groupoïde mesuré en posant:

$$(x,s)^{-1} = (x^{-1}, s\varrho(x))$$

$(x,s)(y,t)$ existe si xy existe et $t=s\varrho(x)$; dans ce cas, $(x,s)(y,s\varrho(x))=(xy,s)$. On note $(\mathscr{G}_\varrho,\mathscr{C}_\varrho)$ ce groupoïde mesuré. $\mathscr{G}^{(0)}$ s'identifie à $\mathscr{G}^{(0)}\times G$, avec la classe de mesures $\mathscr{C}_\varrho^{(0)}=\mathscr{C}^{(0)}\otimes\mathscr{C}_G$; on a

$$r(x,s) = (r(x),s) \quad \text{et} \quad d(x,s) = (d(x), s\varrho(x)) .$$

La relation d'équivalence naturelle $\mathscr{R}_\varrho$ sur $\mathscr{G}_\varrho^{(0)}$ est

$$(u,s)\mathscr{R}_\varrho(v,t) \text{ si il existe } x\in\mathscr{G} \text{ tel que } r(x)=u,\ d(x)=v \text{ et } t=s\varrho(x) .$$

II.3.2. DEFINITION DE L'IMAGE VIRTUELLE. G agit sur $\mathscr{G}_\varrho^{(0)}$ par translations sur la seconde coordonnée:

$$s(u,t) = (u, s^{-1}t) .$$

Cette action préserve la classe de mesures $\mathscr{C}_\varrho^{(0)}=\mathscr{C}^{(0)}\otimes\mathscr{C}_G$, ainsi que la tribu $\mathscr{B}_{\mathscr{R}_\varrho}^{(0)}$ des boréliens $\mathscr{R}_\varrho$-saturés de $\mathscr{G}_\varrho^{(0)}$: d'où une action par automorphismes de G sur l'algèbre de Von Neumann abélienne $L^\infty(\mathscr{G}_\varrho^{(0)},\mathscr{C}_\varrho^{(0)})^{\mathscr{R}_\varrho}$, que nous noterons W_ϱ et que nous appellerons *image virtuelle* de l'homomorphisme ϱ.

Dans la terminologie de G. W. Mackey [19, paragraphe 6] et A. Ramsay [22, paragraphe 7], une réalisation ponctuelle de W_ϱ s'appelle « range closure » de ϱ. A. Ramsay montre que W_ϱ est ergodique si $\mathscr{G}$ est ergodique, et que les images virtuelles de deux homomorphismes similaires sont isomorphes.

Le résultat principal de ce paragraphe est la proposition suivante: le noyau de W_ϱ est le plus grand sous-groupe normal de G contenu dans $r(\varrho)$:

PROPOSITION II.3.3. *Soit $s \in G$. Les deux propositions sont équivalentes*:

(i) *l'automorphisme $W_\varrho(s)$ de $L^\infty(\mathscr{G}_\varrho^{(0)}, \mathscr{C}_\varrho^{(0)})^{\mathscr{R}_\varrho}$ est l'identité*;
(ii) $\forall g \in G,\ gsg^{-1} \in r(\varrho)$.

Cette proposition permet, lorsque G est abélien, de déterminer la partie finie de $r(\varrho)$; si, en outre, $\mathscr{G}$ est ergodique, la proposition suivante permet de décider de l'appartenance du point à l'infini en transposant en termes de transivité l'alternative du lemme II.2.5.

PROPOSITION II.3.4. *On suppose G abélien. Les deux propositions sont équivalentes*:

(i) *le système dynamique W_ϱ est transitif*;
(ii) *le groupoïde $\mathscr{G}$ est ergodique et $r(\tilde{\varrho}) = \{\tilde{e}\}$ (où $\tilde{\varrho}$ est l'homomorphisme défini dans l'énoncé du lemme* II.2.5).

Citons tout de suite un corollaire de la proposition II.3.3.

COROLLAIRE II.3.5. *Si $r(\varrho) \cap G = G$, W_ϱ est l'action triviale de G sur $L^\infty(\mathscr{G}^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)})^{\mathscr{R}}$.*

DEMONSTRATION. D'après la proposition II.3.3, si $r(\varrho) \cap G = G$, W_ϱ est l'action triviale de G sur $L^\infty(\mathscr{G}_\varrho^{(0)}, \mathscr{C}_\varrho^{(0)})^{\mathscr{R}_\varrho}$. Tout borélien saturé de $\mathscr{G}_\varrho^{(0)}$ est égal $(\operatorname{mod} \mathscr{C}_\varrho^{(0)})$ à un borélien G-invariant, donc de la forme $E \times G$ où E est un borélien (nécessairement saturé) de $\mathscr{G}^{(0)}$: $L^\infty(\mathscr{G}_\varrho^{(0)}, \mathscr{C}_\varrho^{(0)})^{\mathscr{R}_\varrho}$ et $L^\infty(\mathscr{G}^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)})^{\mathscr{R}}$ sont donc isomorphes.

En corollaire des propositions II.3.3., II.3.4. et du lemme II.2.5., on obtient:

COROLLAIRE II.3.6. *Si G est abélien, $\mathscr{G}$ ergodique et $G/r(\varrho) \cap G$ compact, W_ϱ peut être réalisé comme l'action transitive de G sur le groupe quotient $G/r(\varrho) \cap G$.*

La démonstration des propositions II.3.3. et II.3.4. fait intervenir le lemme suivant, qui permet d'éliminir les difficultés dues au « presque sûrement » dans le choix d'une réalisation ponctuelle de W_ϱ. Sa démonstration est laissée en exercice au lecteur.

LEMME II.3.7. *Il existe une réalisation ponctuelle* $(Z_\varrho, \mathscr{C}_Z; G)$ *de* W_ϱ, *un sous-ensemble borélien* U *de* $\mathscr{G}^{(0)}$ *de complémentaire négligeable et une application borélienne* p *de* $U \times G$ *dans* Z_ϱ *vérifiant*:

(i) $p(\mathscr{C}^{(0)}) = \mathscr{C}_Z$;
(ii) $\forall x \in \mathscr{G}_{\restriction U}$, $\forall s \in G$, $p(r(x), s) = p(d(x), s\varrho(x))$;
(iii) $\forall u \in U$, $\forall s, t \in G$, $p(u, st) = sp(u, t)$;
(iv) *toute application* $\mathscr{B}^{(0)}_{\mathscr{R}_\varrho}$-*mesurable de* $\mathscr{G}^{(0)}_\varrho$ *dans* $\mathbf{C}$ *se factorise par* p mod $\mathscr{C}^{(0)}$;
(v) Z_ϱ *est un espace compact et* G *agit continument sur* Z_ϱ.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION II.3.3. (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $s \in G$ et $g \in G$ tels que $gsg^{-1} \notin r(\varrho)$. D'après le lemme II.1.5., il existe un borélien E de $\mathscr{G}^{(0)}$ non négligeable et un voisinage V de gsg^{-1} tels que $\varrho_E^{-1}(V) = \varnothing$.

Soit W un voisinage de g tel que $WsW^{-1} \subset V$. Soit A le saturé de $E \times W^{-1}$ pour $\mathscr{R}_\varrho$: A est analytique, donc mesurable, non négligeable. On va montrer $A \cap s^{-1}A = \varnothing$, ce qui impliquera $W_\varrho(s) \neq 1$.

Soit $(u, h) \in A \cap s^{-1}A$. Il existe (x, k) et (x', k') dans $\mathscr{G} \times G$ tels que

$$(r(x), k) \in E \times W^{-1} \quad \text{et} \quad (d(x), k\varrho(x)) = (u, h);$$

$$(r(x'), k') \in E \times W^{-1} \quad \text{et} \quad (d(x'), k'\varrho(x')) = (u, sh).$$

Comme $u = d(x) = d(x')$, $x'x^{-1}$ existe. Comme $r(x)$ et $r(x')$ sont dans E, $x'x^{-1} \in \mathscr{G}_{\restriction E}$. Comme $k\varrho(x) = s^{-1}k'\varrho(x')$,

$$\varrho(x'x^{-1}) = k'^{-1}sk \in WsW^{-1} \subset V:$$

d'où une contradiction puisque $\varrho_E^{-1}(V) = \varnothing$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). On suppose $W_\varrho(s) \neq 1$. Soit $(Z, \mathscr{C}_Z; G)$ une réalisation concrète de W_ϱ vérifiant les conclusions du lemme II.3.7. on identifie $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}_{\restriction U}$.

Il existe un borélien non négligeable Z^0 de Z tel que $Z^0 \cap sZ^0 = \varnothing$; il existe donc un compact K de Z non négligeable tel que $K \cap sK = \varnothing$. Par continuité de l'action de G, il existe un voisinage V de s tel que $K \cap VK = \varnothing$ (i.e. $K \cap hK = \varnothing$, $\forall h \in V$). On posera $A = p^{-1}(K)$: A est un borélien saturé de $\mathscr{G}^{(0)} \times G$ qui vérifie

$$A_{hg} \cap A_g = \varnothing, \qquad \forall h \in V, \ \forall g \in G$$

(avec $A_g = \{u \in \mathscr{G}^{(0)} \mid (u, g) \in A)\}$).

Comme A est non négligeable, il existe $g \in G$ tel que A_g soit non négligeable.

On pose $E=A_g$ pour un tel g et on va montrer que $\varrho_E^{-1}(g^{-1}Vg)=\emptyset$, donc $g^{-1}sg \notin r(\varrho)$. En effet, soit $x \in \mathscr{G}_{\restriction E}$: on aura $(d(x), g) \in A$, donc, $\forall h \in V$, $(d(x), hg) \notin A$. On aura aussi $(r(x), g) \in A$, donc, puisque A est saturé, $(d(x), g\varrho(x)) \in A$. Par comparaison, $g\varrho(x) \neq hg$, $\forall h \in V$, soit $\varrho(x) \notin g^{-1}Vg$.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION II.3.4. (ii) $\Rightarrow$ (i). D'après la proposition II.2.1., on peut supposer, en remplaçant ϱ par un homomorphisme similaire, que $\varrho(x) \in r(\varrho)$, $\forall x \in \mathscr{G}$. Soit $(Z, \mathscr{C}_Z; G)$ une réalization de W_ϱ vérifiant les conclusions du lemme II.3.7.; soit A un borélien saturé de $\mathscr{G}_\varrho^{(0)}$: il existe un borélien Z^0 de Z tel que $A=p^{-1}(Z^0) \bmod \mathscr{C}_\varrho^{(0)}$; d'après la proposition II.3.3.,

$$Z^0 = sZ^0 \bmod \mathscr{C}_Z, \quad \forall s \in r(\varrho),$$

et on peut choisir une version de Z^0 qui soit $r(\varrho) \cap G$-invariante; donc, en remplaçant A par un ensemble borélien saturé équivalent, on peut supposer $A=sA$, $\forall s \in r(\varrho) \cap G$. Montrons que, pour tout g de G, A_g est saturé.

En effet, si $x \in \mathscr{G}$ et $r(x) \in A_g$, alors $(r(x), g) \in A$, donc $(d(x), g\varrho(x)) \in A$ (car A est saturé) et, comme A est $r(\varrho) \cap G$-invariant, $(d(x), g) \in A$ et $d(x) \in A_g$. Comme $\mathscr{G}$ est ergodique, on aura $A_g=\emptyset$ (mod $\mathscr{G}^{(0)}$) ou

$$A_g = \mathscr{G}^{(0)} \, (\bmod \mathscr{C}^{(0)}), \quad \forall g \in G.$$

L'ensemble des $g \in G$ tels que $A_g=\emptyset \bmod \mathscr{C}^{(0)}$ est $r(\varrho) \cap G$-invariant (car $A_{sg} = A_g$ si $s \in r(\varrho) \cap G$), donc A est l'image réciproque d'un borélien B de $G/r(\varrho) \cap G$ par l'application q:

$$q\colon \mathscr{G}_\varrho^{(0)} \ni (u, g) \to \tilde{g} \in G/r(\varrho) \cap G.$$

Il est évident que l'image réciproque par q d'un borélien de $G/r(\varrho) \cap G$ est un borélien saturé de $\mathscr{G}^{(0)}$ et que q échange les actions à gauche de G dans $\mathscr{G}_\varrho^{(0)}$ et $G/r(\varrho) \cap G$: on a montré que W_ϱ était isomorphe à l'action de G sur $L^\infty(G/r(\varrho) \cap G)$, donc que W_ϱ était transitif.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Si W_ϱ est transitif, il est ergodique, donc $\mathscr{G}$ est ergodique car, si E est un borélien saturé de $\mathscr{G}^{(0)}$, $E \times G$ est un borélien saturé G-invariant de $\mathscr{G}_\varrho^{(0)}$. Si W_ϱ est transitif, G abélien et $\mathscr{G}$ ergodique, d'après la proposition II.3.3., W_ϱ admet pour réalization ponctuelle l'action de G sur le groupe quotient $G/r(\varrho) \cap G$ muni de la classe de sa mesure de Haar. On en déduit qu'en remplaçant $\mathscr{G}$ par une contraction inessentielle. il existe une application borélienne p de $\mathscr{G}^{(0)} \times G$ dans $G/r(\varrho) \cap G$ vérifiant

$$\forall x \in \mathscr{G}, \ \forall g \in G, \quad p(r(x), g) = p(d(x), g\varrho(x));$$

$$\forall u \in \mathscr{G}^{(0)}, \ \forall g, h \in G, \quad p(u, gh) = gp(u, h).$$

On en déduit $p(r(x), g) = \varrho(x)p(d(x), g)$, soit

$$\tilde{\varrho}(x) = p(r(x), e)p(d(x), e)^{-1}, \quad \forall x \in \mathscr{G},$$

donc $\tilde{\varrho} \sim 1$ et $r(\tilde{\varrho}) = \{\tilde{e}\}$.

CONCLUSION LORSQUE $G = \mathbf{R}$. Si on suppose $\mathscr{G}$ ergodique, on a les quatre possibilités suivantes:

— type II: $r(\varrho) = \{0\}$ si et seulement si W_ϱ est l'action transitive de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
— type III_1: $r(\varrho) = \bar{\mathbf{R}}$ si et seulement si W_ϱ est le flot trivial sur un espace réduit à un point.
— type III_λ $(0 < \lambda < 1)$: $r(\varrho) = \{\infty\} \cup T_0\mathbf{Z}$ si et seulement si W_ϱ est l'action transitive de $\mathbf{R}$ sur le groupe quotient $\mathbf{R}/T_0\mathbf{Z}$ (avec $T_0 = -2\pi/\mathrm{Log}\,\lambda$).
— type III_0: $r(\varrho) = \{0, \infty\}$ si et seulement si W_ϱ est un flot non transitif, donc isomorphe à un flot sous une fonction au dessus d'une base ergodique diffuse.

III. Interprétation algébrique de l'image virtuelle.

III. 1. *L'algèbre $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$.*

Soit $(\mathscr{G}, \mathscr{C})$ un groupoïde analytique mesuré, α un deux cocycle borélien de $\mathscr{G}$ dans le tore $\mathbf{T}$, c'est à dire une application borélienne de $\mathscr{G}^{(2)}$ dans $\mathbf{T}$ qui vérifie

$$\forall (x, y, z) \in \mathscr{G}_0^{(3)}, \quad \alpha(x, y)\alpha(xy, z) = \alpha(x, yz)\alpha(y, z)$$

$$\text{et} \qquad \alpha(x, d(x)) = \alpha(r(x), x) = 1,$$

où $\mathscr{G}_0$ est une contraction inessentielle de $\mathscr{G}$ et

$$\mathscr{G}_0^{(3)} = \{(x, y, z) \in \mathscr{G}_0^3 \mid d(x) = r(y) \text{ et } d(y) = r(z)\}.$$

Au triplet $(\mathscr{G}, \mathscr{C}, \alpha)$ est associée par P. Hahn [14, Chapter VI] une W*-algèbre que nous noterons $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ (cf. aussi [23]).

A chaque mesure $\beta = \int_{\mathscr{G}^{(0)}} \beta^u \, d\beta^{(0)}(u)$ invariante à gauche dans la classe $\mathscr{C}$ est associé canoniquement un poids Φ sur $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$. L'espace H_Φ de la représentation de Gelfand π_Φ associée au poids Φ s'identifie naturellement à l'espace de Hilbert $L^2(\mathscr{G}, \beta)$. L'algèbre $\pi_\Phi(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}))$ s'identifie à l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $\{L_f^\alpha, f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})\}$ définis ci-dessous:

si f est une fonction borélienne complexe définie sur $\mathscr{G}$, on pose

$$f^*(x) = \alpha(x^{-1}, x)\delta(x)^{-1}\overline{f(x^{-1})}, \quad \forall x \in \mathscr{G}$$

(δ est l'homomorphisme modulaire associé à β: cf. I.3.3.);

$\mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})$ est l'ensemble des fonctions boréliennes complexes f définies sur $\mathscr{G}$ qui vérifient

$$\operatorname{ess\,sup}\{\beta^u(|f|),\ u \in \mathscr{G}^{(0)}\} < \infty \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ess\,sup}\{\beta^u(|f^*|),\ u \in \mathscr{G}^{(0)}\} < \infty;$$

si ξ désigne l'élément générique de $L^2(\mathscr{G},\beta)$ et si $f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})$, on a posé

$$L_f^\alpha \xi(x) = \int_{\mathscr{G}} \alpha(x^{-1}, xy)^{-1} f(xy)\xi(y^{-1})\, d\beta^{d(x)}(y)\,.$$

On vérifie facilement que l'on a

$$\forall f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G}), \qquad (L_f^\alpha)^* = L_{f^*}^\alpha$$

et

$$\forall f, g \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G}), \qquad L_f^\alpha \cdot L_g^\alpha = {}^\alpha_{f*g}\,,$$

où on a défini un élément $f*g$ de $\mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})$ en posant, $\forall x \in \mathscr{G}$,

$$f*g(x) = \int_{\mathscr{G}} \alpha(xy, y^{-1})^{-1} f(xy) g(y^{-1})\, d\beta^{d(x)}(y)\,.$$

On fixe une fois pour toutes la mesure invariante à gauche β dans $\mathscr{C}$, son module δ et le poids Φ associé. Par abus de notations, on écrira encore $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ au lieu de $\pi_\Phi(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}))$. Le théorème 6.9. de (14) peut être reformulé ainsi:

Proposition III.1.A.(a). *$\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ est standard dans $L^2(\mathscr{G},\beta)$ au sens de* [12, définition 2.1], *l'involution J étant définie par*

$$J\xi(x) = \alpha(x^{-1}, x)^{-1}\delta(x)^{-\frac{1}{2}}\overline{\xi(x^{-1})}, \qquad \forall \xi \in L^2(\mathscr{G},\beta)$$

et le cône P la fermeture des $\{L_f^\alpha Jf \mid f \in L^2(\mathscr{G},\beta) \cap \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})\}$.

(b): *l'opérateur modulaire Δ associé au poids Φ est l'opérateur de multiplication dans $L^2(\mathscr{G},\beta)$ par la fonction δ.*

Lemme III.1.1. (a) *Si f est une fonction borélienne complexe sur $\mathscr{G}$ et si $\delta^{-\frac{1}{2}} f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})$, la formule*

$$L_f'^\alpha \xi(x) = \int_{\mathscr{G}} \alpha(x^{-1}y, y^{-1}) f(x^{-1}y)\xi(y)\, d\beta^{r(x)}(y)$$

($\xi \in L^2(\mathscr{G},\beta)$) *définit un opérateur borné $L_f'^\alpha$ de $L^2(\mathscr{G},\beta)$.*

(b) $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})' = \{L_f'^\alpha \mid f \in \delta^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})\}''$.

Demonstration. Si $f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})$, on vérifie que $JL_f^\alpha J = L_{\delta^{\frac{1}{2}}f}'^\alpha$.

III.2. *Le groupoïde $\mathscr{G}_\varrho$.*

Soit G un groupe localement compact abélien, ϱ un homomorphisme de $\mathscr{G}$ dans G (définition I.3.1), $\mathscr{G}_\varrho$ le groupoïde défini en II.3.1. Le deux cocycle α admet une extension naturelle $\tilde{\alpha}$ à $\mathscr{G}_\varrho$ en posant

$$\tilde{\alpha}((x,s),(y,t)) = \alpha(x,y) \quad \text{si } ((x,s),(y,t)) \in \mathscr{G}_\varrho^{(2)} .$$

A l'homomorphisme ϱ est associée une action naturelle $\hat{\varrho}$ du groupe dual $\hat{G}$ sur l'algèbre $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ de la manière suivante: si $\gamma \in \hat{G}$, l'opérateur de multiplication par la fonction $\gamma \circ \varrho$

$$(\mathscr{G} \ni x \to \langle \gamma, \varrho(x) \rangle \in \mathbf{T})$$

définit un unitaire u_γ de $L^2(\mathscr{G}, \beta)$ qui vérifie

$$\forall f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G}), \quad u_\gamma L_f^\alpha u_\gamma^* = L_{\gamma\circ\varrho\cdot f}^\alpha ,$$

et u_γ implémente donc un automorphisme $\hat{\varrho}(\gamma)$ de $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$; $\{\gamma \to u_\gamma\}$ est une représentation unitaire continue de $\hat{G}$ et $\hat{\varrho}$ est donc un morphisme continu de $\hat{G}$ dans Aut $(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}))$. Le but de ce paragraphe est d'établir un isomorphisme naturel entre l'algèbre de von Neumann $\mathscr{M}^{\tilde{\alpha}}(\mathscr{G}_\varrho)$ et le produit croisé $W^*(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}), \hat{\varrho})$.

NOTATIONS. 1) On fixe sur G et $\hat{G}$ les mesures de Haar ν et $\hat{\nu}$ respectivement de sorte que l'opérateur de transformation de Fourier F de $L^2(\hat{G})$ sur $L^2(G)$, défini par

$$F\zeta(s) = \int_{\hat{G}} \overline{\langle \gamma, s \rangle} \zeta(\gamma)\, d\hat{\nu}(\gamma); \quad \zeta \in L^2(\hat{G}),\ s \in G ,$$

soit isométrique.

2) $\{\gamma \to V_\gamma\}$ est la représentation régulière gauche de $\hat{G}$ dans $L^2(\hat{G})$:

$$V_\gamma \zeta(\gamma') = \zeta(\gamma^{-1}\gamma'), \quad \forall \zeta \in L^2(\hat{G}),\ \forall \gamma, \gamma' \in \hat{G} .$$

$\{\gamma \to W_\gamma\}$ est la représentation de $\hat{G}$ dans $L^2(G)$, qui à l'élément γ de $\hat{G}$ associe l'opérateur W_γ de multiplication par la fonction $(G \ni s \to \overline{\langle \gamma, s \rangle})$. On a l'égalité:

$$W_\gamma = F V_\gamma F^*, \quad \forall \gamma \in \hat{G} .$$

3) Si $g \in L^\infty(G)$, T_g est l'opérateur de multiplication par g dans l'espace de Hilbert $L^2(G)$.

Si f est une fonction borélienne complexe sur $\mathscr{G}$, on notera $f \otimes g$ la fonction sur $\mathscr{G}_\varrho = \mathscr{G} \times G$ définie par

$$f \otimes g(x,s) = f(x) g(s) .$$

4) $W^*(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}), \hat{\varrho})$ est l'algèbre de von Neumann d'opérateurs de l'espace de Hilbert

$$L^2(\mathscr{G} \times \hat{G}, \beta \otimes \hat{\nu}) = L^2(\mathscr{G}, \beta) \otimes L^2(\hat{G})$$

engendré par les opérateurs $\{1\otimes V_\gamma, \gamma \in \hat{G}\}$ et $\{\pi^\alpha(f), f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})\}$, où on a posé si $f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})$, $\xi \in L^2(\mathscr{G}\times\hat{G}, \beta\otimes\hat{\nu})$, $x \in \mathscr{G}$ et $\gamma \in \hat{G}$:

$$\pi^\alpha(f)\xi(x,\gamma) = \int_{\mathscr{G}} \alpha(x^{-1},xy)^{-1}\langle\gamma,\varrho(xy)\rangle^{-1}f(xy)\xi(y^{-1},\gamma)\,d\beta^{d(x)}(y)\,.$$

5) La mesure $\beta\otimes\nu$ sur $\mathscr{G}_\varrho = \mathscr{G}\times G$ est invariante à gauche dans la classe $\mathscr{C}_\varrho$ et sera notée $\tilde{\beta}$. $\mathscr{M}^{\tilde{\alpha}}(\mathscr{G}_\varrho)$ s'identifie à l'algèbre d'opérateurs de l'espace de Hilbert

$$L^2(\mathscr{G}_\varrho, \tilde{\beta}) = L^2(\mathscr{G},\beta)\otimes L^2(G)$$

engendrée par les $\{L^{\tilde{\alpha}}_\varphi, \varphi \in \mathscr{L}_{\tilde{\beta}}(\mathscr{G}_\varrho)\}$, avec

$$L^{\tilde{\alpha}}_\varphi\xi(x,s) = \int \alpha(x^{-1},xy)^{-1}\varphi(xy,s)\xi(y^{-1},s\varrho(xy))\,d\beta^{d(x)}(y)$$

si $\xi \in L^2(\mathscr{G}_\varrho, \tilde{\beta})$ et $\varphi \in \mathscr{L}_{\tilde{\beta}(\mathscr{G}_\varrho)}$.

Avec les notations ci-dessus, on peut définir l'isométrie $1\otimes F$ de $L^2(\mathscr{G},\beta)\otimes L^2(\hat{G})$ sur $L^2(\mathscr{G},\beta)\otimes L^2(G) = L^2(\mathscr{G}_\varrho,\tilde{\beta})$ et énoncer la proposition:

PROPOSITION III.2.1. *On a*

$$1\otimes F\cdot W^*(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}),\hat{\varrho})\cdot 1\otimes F^* = \mathscr{M}^{\tilde{\alpha}}(\mathscr{G}_\varrho)\,.$$

DEMONSTRATION. On vérifie sans difficulté les propriétes suivantes:

(a) si g est une fonction continue bornée sur G et si $f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})$, alors

$$f\otimes g \in \mathscr{L}_{\tilde{\beta}}(\mathscr{G}_\varrho) \quad \text{et} \quad L^{\tilde{\alpha}}_{f\otimes g} = 1\otimes T_g\cdot L^{\tilde{\alpha}}_{f\otimes 1}\,.$$

(b) si $f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})$, on a

$$L^{\tilde{\alpha}}_{f\otimes 1} = 1\otimes F\cdot\pi^\alpha(f)\cdot 1\otimes F^*\,.$$

De (b) et (a) on déduit: $\forall\gamma \in \hat{G}$

$$1\otimes F\cdot 1\otimes V_\gamma\cdot\pi^\alpha(f)\cdot 1\otimes F^* = 1\otimes W_\gamma\cdot L^{\tilde{\alpha}}_{f\otimes 1} = L^{\tilde{\alpha}}_{f\otimes\langle\gamma,\cdot\rangle} \in \mathscr{M}^{\tilde{\alpha}}(\mathscr{G}_\varrho)\,,$$

soit

$$1\otimes F\cdot W^*(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}),\hat{\varrho})\cdot 1\otimes F^* \subset \mathscr{M}^{\tilde{\alpha}}(\mathscr{G}_\varrho)\,.$$

On vérifie ensuite les propriétés suivantes:

(c) $\forall\gamma \in \hat{G}$, $\forall\varphi \in \mathscr{L}_{\tilde{\beta}}(\mathscr{G}_\varrho)$, $u_\gamma\otimes W^*_\gamma\cdot L^{\tilde{\alpha}}_\varphi = L^{\tilde{\alpha}}_\varphi\cdot u_\gamma\otimes W^*_\gamma$.

(d) si $f \in \delta^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})$,

$$f\otimes 1 \in \tilde{\delta}^{\frac{1}{2}}\mathscr{L}_{\tilde{\beta}}(\mathscr{G}_\varrho) \quad \text{et} \quad L'^{\tilde{\alpha}}_{f\otimes 1} = L'^{\alpha}_f\otimes 1\,.$$

Comme le commutant de $W^*(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}),\hat{\varrho})$ est engendré par les opérateurs

$$\{L'^{\alpha}_f \otimes 1, f \in \delta^{\frac{1}{2}} \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G})\} \quad \text{et} \quad \{u_\gamma \otimes V^*_\gamma, \gamma \in \hat{G}\} ,$$

les propriétés (c) et (d) fournissent l'inclusion:

$$1 \otimes F \cdot W^*(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}), \hat{\varrho})' \cdot 1 \otimes F^* \subset \mathscr{M}^{\tilde{\alpha}}(\mathscr{G}_\varrho)' ,$$

d'où la proposition.

Remarque. Lorsque G n'est pas commutatif, on peut encore interpréter $\mathscr{M}^{\tilde{\alpha}}(\mathscr{G}_\varrho)$ comme un produit croisé $W^*(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}), \hat{\varrho})$, où $\hat{\varrho}$ est une action « duale de G » au sens de (8) ou de (20), c'est à dire un morphisme injectif de $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ dans $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}) \otimes \mathscr{M}'(\mathscr{G})$ compatible avec le coproduit de l'algèbre de la représentation régulière droite de G. En faisant opérer $\mathscr{M}^{\tilde{\alpha}}(\mathscr{G}_\varrho)$ et $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}) \otimes \mathscr{M}'(G)$ dans l'espace de Hilbert

$$L^2(\mathscr{G} \times G, \beta \otimes \nu) = L^2(\mathscr{G}, \beta) \otimes L^2(G, \nu) ,$$

où ν est une mesure de Haar à droite de G, on obtient la proposition:

Proposition III.2.2. (i) *Il existe une action $\hat{\varrho}$ (nécessairement unique) de $\mathscr{M}'(G)$ sur $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ vérifiant*

$$\hat{\varrho}(L^\alpha_f) = L^{\tilde{\alpha}}_{f \otimes 1}, \quad \forall f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G}) .$$

(ii) *On a $W^*(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}), \hat{\varrho}) = \mathscr{M}^{\tilde{\alpha}}(\mathscr{G}_\varrho)$, le produit croisé étant pris au sens de* (8).

Demonstration. On a

$$\tilde{U} \cdot L^\alpha_f \otimes 1 \cdot \tilde{U}^* = L^{\tilde{\alpha}}_{f \otimes 1}, \quad \forall f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G}) ,$$

si on désigne par $\tilde{U}$ l'unitaire de $L^2(\mathscr{G} \times G, \beta \otimes \nu)$ défini par

$$\tilde{U}\xi(x,s) = \xi(x, s\varrho(x)), \quad \forall (x,s) \in \mathscr{G} \times G \quad (\xi \in L^2(\mathscr{G} \times G, \beta \otimes \nu)) ,$$

et un calcul simple permet de vérifier que $\hat{\varrho}$ est compatible avec le coproduit Γ de $\mathscr{M}'(G)$, c'est à dire que l'on a

$$\hat{\varrho} \otimes 1(\hat{\varrho}(L^\alpha_f)) = 1 \otimes \Gamma(\hat{\varrho}(L^\alpha_f)), \quad \forall f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G}) .$$

La propriété (a) de la démonstration de la proposition III.2.1. reste vraie, d'où l'inclusion $W^*(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}), \hat{\varrho}) \subset \mathscr{M}^{\tilde{\alpha}}(\mathscr{G}_\varrho)$.

En combinant les résultats de [9] et [20], on montre que $W^*(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}), \hat{\varrho})$ est en position standard dans $L^2(\mathscr{G} \times G, \beta \otimes \nu)$ et que son commutant est engendré par $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})' \otimes 1$ et par les opérateurs $\{\tilde{U} \cdot 1 \otimes T_g \cdot \tilde{U}^*, \ g \in L^\infty(G)\}$; d'où, comme précédemment, l'inclusion inverse.

III.3. *Application aux relations d'équivalence mesurées.*

DEFINITION III.3.1. On dit que le groupoïde analytique mesuré $(\mathscr{G}, \mathscr{C})$ est une *relation d'équivalence mesurée* si (à une contraction inessentielle près), l'application τ:

$$\mathscr{G} \ni x \xrightarrow{\tau} (r(x), d(x)) \in \mathscr{G}^{(0)} \times \mathscr{G}^{(0)}$$

est injective.

Il revient au même de dire que, pour $\mathscr{C}^{(0)}$ presque tout u de $\mathscr{G}^{(0)}$, le stabilisateur

$$s_u = \{x \in \mathscr{G} \mid d(x) = r(x) = u\}$$

est réduit à un point.

Le groupoïde mesuré $(\mathscr{G}, \mathscr{C})$ s'identifie alors au graphe $\mathscr{E}$ de la relation d'équivalence naturelle $\mathscr{R}$ définie en I.2.1., munie de la classe de mesures $\mathscr{C}'$ image de $\mathscr{C}$ par τ et de la structure de groupoïde définie par

$$(u, v)^{-1} = (v, u); \quad d(u, v) = v; \quad r(u, v) = u;$$

$$(u, v)(v, w) = (u, w);$$

où (u, v) et (v, w) sont des éléments de $\mathscr{E} \subset \mathscr{G}^{(0)} \times \mathscr{G}^{(0)}$.

PROPOSITION III.3.2. *Soit $(\mathscr{G}, \mathscr{C})$ une relation d'équivalence mesurée, α un deux-cocycle borélien de $\mathscr{G}$ dans* T, *ϱ un homomorphisme de $\mathscr{G}$ dans le groupe abélien G, $\hat{\varrho}$ l'action du groupe dual $\hat{G}$ sur $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ définie au* § III.2.

L'image virtuelle W_ϱ est isomorphe à la restriction au centre du produit croisé $W^*(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}), \hat{\varrho})$ de l'action de G duale de $\hat{\varrho}$ au sens de [28, *définition* 4.1].

NOTATIONS. III.3.3.1. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathscr{G}, \mathscr{C})$, $f \in L^\infty(\mathscr{G}^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)})$. On notera T_φ l'opérateur de multiplication par φ dans $L^2(\mathscr{G}, \beta)$. On posera

$$T_r(f) = T_{f \circ r} \qquad T_d(f) = T_{f \circ d}\,.$$

III.3.3.2. On posera

$$\mathscr{M}_0(\mathscr{G}) = \{T_r(f) \mid f \in L^\infty(\mathscr{G}^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)})\}$$

$$\mathscr{M}_1(\mathscr{G}) = \{T_d(f) \mid f \in L^\infty(\mathscr{G}^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)})\}$$

$$\mathscr{M}_0^R(\mathscr{G}) = \{T_r(f) \mid f \in L^\infty(\mathscr{G}^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)})^R\}\,.$$

Un calcul élémentaire montre que l'on a

$$\mathscr{M}_0(\mathscr{G}) \subset \mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}); \mathscr{M}_1(\mathscr{G}) = J\mathscr{M}_0(\mathscr{G})J \subset \mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})'$$

$$\mathscr{M}_0^R(\mathscr{G}) = \mathscr{M}_0(\mathscr{G}) \cap \mathscr{M}_1(\mathscr{G}) = \mathscr{M}_0(\mathscr{G}) \cap \text{centre de } \mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$$

$$\forall f \in L^\infty(\mathscr{G}^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)}), \quad JT_r(f)J = T_d(\bar{f})\,.$$

LEMME III.3.4. *Si $(\mathcal{G},\mathcal{C})$ est une relation d'équivalence mesurée, on a:*
(a) *$\mathcal{M}_0(\mathcal{G})$ est abélienne maximale dans $\mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G})$;*
(b) *$\mathcal{M}_0^R(\mathcal{G})$ est le centre de $\mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G})$;*
(c) *$\mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G})$ est un facteur si et seulement si $\mathcal{G}$ est ergodique.*

DEMONSTRATION. (b) et (c) découlent immédiatement de (a).

(a) si un opérateur de $\mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G})$ commute à $\mathcal{M}_0(\mathcal{G})$, comme il commute à $\mathcal{M}_1(\mathcal{G})$, il commute à tous les opérateurs diagonalisables si $(\mathcal{G},\mathcal{C})$ est une relation d'équivalence mesurée et est donc de la forme T_φ, $\varphi \in L^\infty(\mathcal{G},\mathcal{C})$. Il commute aux L'^α_f, $f \in \delta^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}_\beta(\mathcal{G})$, soit

$$\forall f \in \delta^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}_\beta(\mathcal{G}),\ \forall \xi \in L^2(\mathcal{G},\beta),\ \forall u \in \mathcal{G}^{(0)}\ \beta^{(0)}-\text{p.s.},\ \forall x \in \mathcal{G}\ \beta^u-\text{p.s.},$$

$$\int_{\mathcal{G}} \alpha(x^{-1}y, y^{-1}) f(x^{-1}y)\varphi(y)\xi(y)\, d\beta^u(y)$$
$$= \int_{\mathcal{G}} \varphi(x)\alpha(x^{-1}y, y^{-1}) f(x^{-1}y)\xi(y)\, d\beta^u(y)\,.$$

En faisant parcourir à f et ξ un ensemble dénombrable de fonctions indicatrices convenablement choisies, on obtient

$$\forall u \in \mathcal{G}^{(0)}\ \beta^{(0)}-\text{p.s.},\ \forall (x,y) \in \mathcal{G}\times\mathcal{G}\ \beta^u\otimes\beta^u-\text{p.s.},\quad \varphi(x) = \varphi(y)\,,$$

et, en appliquant le lemme de sélection de von Neumann (cf. [6, appendice V n° 5]), on obtient une section borélienne $u \to y_u$ de l'application r telle que

$$\varphi(x) = \varphi(y_u),\quad \forall u \in \mathcal{G}^{(0)}\ \beta^{(0)}-\text{p.s.},\ \forall x \in \mathcal{G}\ \beta^u-\text{p.s.}\,,$$

soit $\varphi = f\circ r \bmod \mathcal{C}$, avec $f(u) = \varphi(y_u)$, et $T_\varphi = T_r(f) \in \mathcal{M}_0(\mathcal{G})$.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION III.3.2. On note $(s \to U_s)$ la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G)$. De la proposition III.2.1., on déduit immédiatement:

(A) l'action de G sur $W^*(\mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G}), \hat{\varrho})$ duale de $\hat{\varrho}$ est isomorphe à l'action de G sur l'algèbre $\mathcal{M}^{\tilde{\alpha}}(\mathcal{G}_\varrho)$ implémentée par le groupe d'unitaires $\{1\otimes U_s, s \in G\}$ de l'espace de Hilbert

$$L^2(\mathcal{G}_\varrho, \tilde{\beta}) = L^2(\mathcal{G},\beta)\otimes L^2(G)\,.$$

D'autre part, avec les notations ci-dessus, on a

(B) l'image virtuelle de ϱ est l'action de G sur l'algèbre $\mathcal{M}_0^{R_\varrho}(\mathcal{G}_\varrho)$ implémentée par le groupe d'unitaires $\{1\otimes U_s,\ s \in G\}$.

Enfin, si $\mathscr{G}$ est une relation d'équivalence, il en est de même du groupoïde $\mathscr{G}_\varrho$ et la proposition découle du lemme III.3.4.

REMARQUE. La proposition III.3.2. reste vraie lorsque G n'est pas abélien, avec les notations de la proposition III.2.2. et la notion d'action de G duale de $\hat{\varrho}$ définie dans (8). (La démonstration est identique à celle ci-dessus, à cette nuance près que la propriété (A) découle immédiatement de la définition de l'action duale).

IV. Automorphismes et type d'une relation d'équivalence mesurée.

IV.1. *Type de l'algèbre $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$.*

Dans la classification de A. Connes [3], [4], le type de $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ s'exprime à l'aide d'invariants (« T », « S », « flot des poids ») qui ne sont autres, dans le cas d'une relation d'équivalence mesurée, que les invariants attachés à la classe de similarité de l'homomorphisme modulaire qui ont été étudiés au chapitre II.

THEOREME IV.1.1. *Soit $(\mathscr{G},\mathscr{C})$ une relation d'équivalence mesurée, α un deux-cocycle borélien de $\mathscr{G}$ dans le tore, δ l'homomorphisme modulaire associé à une mesure invariante à gauche dans $\mathscr{C}$.*

(a) *L'algèbre $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ est semi-finie si et seulement si $\mathscr{G}$ est unimodulaire* (i.e. $\delta\sim 1$);

(b) $T(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}))=\{t\in \mathrm{R}\mid \delta^{it}\sim 1\}$;

(c) $S(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}))=r(\delta)$ (*en identifiant l'élément* 0 *de* R_+ *avec le point à l'infini de* R_+^*; *on suppose* $(\mathscr{G},\mathscr{C})$ *ergodique*);

(d) *le flot des poids « régulier » de $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ est l'image virtuelle de δ.*

DEMONSTRATION. (d) D'après [4], le flot de poids « régulier » de $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ est la restriction au centre du produit croisé $W^*(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}),\sigma^\Phi)$ de l'action θ de R_+^* duale de σ^Φ. Or, l'action $\hat{\delta}$ de R associée à l'homomorphisme δ au § III.2. n'est autre que le groupe d'automorphismes σ^Φ (cela découle de la définition de $\hat{\delta}$ et de III.1.A, (b)). Il suffit alors d'appliquer III.3.2.

(b) Soit f un unitaire de $L^\infty(\mathscr{G}^{(0)},\mathscr{C}^{(0)})$ tel que

$$\forall x\in\mathscr{G}\ \text{p.s.},\qquad \delta(x)^{it} = f(r(x))\cdot\overline{f(d(x))}\,.$$

L'unitaire $u=T_r(f)$ implémente σ_t^Φ, et $t\in T(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}))$. On a montré

$$\{t\in\mathrm{R}\mid \delta^{it}\sim 1\}\subset T(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}))\,.$$

Réciproquement, soit $t\in\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ et u un unitaire du centre du centralisateur $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})_\Phi$ qui implémente σ_t^Φ. Comme l'algèbre abélienne maximale $\mathscr{M}_0(\mathscr{G})$ (cf.

III.3.3.2) est contenue dans $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})_\Phi$, on a $u \in \mathscr{M}_0(\mathscr{G})$, soit $u = T_r(f)$, $f \in L^\infty(\mathscr{G}^{(0)}, \mathscr{C}^{(0)})$ et on vérifie sans peine que $\delta^{it} = f \circ r \cdot \overline{f \circ d} \pmod{\mathscr{C}}$.

(a) On raisonne comme en (b) en remplaçant l'unitaire u par un groupe à un paramètre $\{u_t = h^{it}\}_{t \in \mathbf{R}}$, où h est un opérateur positif affilié au centre de $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})_\Phi$, donc à $\mathscr{M}_0(\mathscr{G})$.

(c) La définition de l'invariant S n'a de sens que si $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ est un facteur, c'est à dire si $\mathscr{G}$ est ergodique. On a

$$
\begin{aligned}
0 \notin S(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})) &\Leftrightarrow \mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G}) \text{ est semi-finie} && \text{([3, lemme 3.1.2])}\\
&\Leftrightarrow \delta \sim 1 && \text{d'après (a)}\\
&\Leftrightarrow r(\delta) = \{1\} && \text{(proposition II.2.1.)}\\
&\Leftrightarrow \infty \notin r(\delta) && \text{(d'après II.1.2.)}
\end{aligned}
$$

et si, $s \in \mathbf{R}_+^*$

$$
\begin{aligned}
s \in S(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})) &\Leftrightarrow s \in \text{noyau du flot des poids} && \text{(cf. [4. § II.3])}\\
&\Leftrightarrow s \in \ker W_\delta && \text{(d'après } (d))\\
&\Leftrightarrow s \in r(\delta) && \text{(proposition II.3.3.)}
\end{aligned}
$$

Remarques. 1) Cette classification est indépendante du cocycle α.

2) Si $(\mathscr{G}, \mathscr{C})$ n'est pas une relation d'équivalence mesurée, on a seulement les inclusions

$$\{t \in \mathbf{R} \mid \delta^{it} \sim 1\} \subset T(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})) \qquad S(\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})) \subset r(\delta)\,.$$

3) (a) est démontré par [14] pour $\mathscr{G}$ ergodique.

4) Le calcul de flot des poids (d) est fait dans [4] pour une relation d'équivalence mesurée provenant d'une action de groupe.

Dans le cas où $\mathscr{G}$ est unimodulaire, on peut préciser le type de $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ dans la classification de von Neumann:

Proposition IV.1.2. *Sous les hypothèses du théorème* IV.1.1., *les deux propositions sont équivalentes*:

(i) *l'algèbre $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ est finie;*

(ii) *pour $\mathscr{C}^{(0)}$-presque tout u de $\mathscr{G}^{(0)}$, la classe d'équivalence de u modulo R est dénombrable et il existe dans $\mathscr{C}^{(0)}$ une mesure finie invariante par le groupe plein de R (défini dans* [10]).

Demonstration. En adaptant la démonstration du théorème 8 de [11], on montre qu'il existe une espérance conditionelle de $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ sur $\mathscr{M}_0(\mathscr{G})$ si et seulement si presque toutes les orbites de R sont dénombrables. On est alors ramené au cas d'une action de groupe (cf. [10]) et la proposition se démontre comme le corollaire 5 de [11].

PROPOSITION IV.1.3. *Sous les hypothèses du théorème* IV.1.1. *et en supposant* $\alpha = 1$, *les deux propositions sont équivalentes:*

(i) *l'algèbre* $\mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G})$ *est discrète;*

(ii) *la relation d'équivalence* R *est mesurable* (*i.e. l'espace quotient* $\mathcal{G}^{(0)}/R$ *est métriquement dénombrablement séparé*).

DEMONSTRATION. On commence par démontrer la proposition dans le cas ergodique. La conclusion (ii) est alors équivalente à:

(ii') le groupoïde $(\mathcal{G},\mathcal{C})$ est essentiellement transitif, auquel cas l'espace $L^2(\mathcal{G},\beta)$ s'identifie naturellement à $L^2(\mathcal{G}^{(0)},\beta^{(0)})\otimes L^2(\mathcal{G}^{(0)},\beta^{(0)})$ de manière qu'un opérateur L_f^α $(f \in \mathcal{L}_\beta(\mathcal{G}))$ devienne de la forme $A_f \otimes 1$, et un opérateur $L_g'^\alpha$ $(g \in \delta^{\frac{1}{2}}\mathcal{L}_\beta(\mathcal{G}))$ de la forme $1 \otimes B_g$. $\mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G})$ est donc isomorphe à $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}^{(0)},\beta^{(0)})\}\otimes 1$ et par conséquent de type I.

Réciproquement, si $\mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G})$ est un facteur de type I, il est nécessairement isomorphe à $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}^{(0)},\beta^{(0)}))$, l'isomorphisme échangeant $\mathcal{M}_0(\mathcal{G})$ et l'algèbre $\mathcal{D}$ des diagonalisables de $L^2(\mathcal{G}^{(0)},\beta^{(0)})$; d'après le théorème 2.18 de [12] il existe un isomorphisme de $L^2(\mathcal{G},\beta)$ sur

$$L^2(\mathcal{G}^{(0)},\beta^{(0)})\otimes L^2(\mathcal{G}^{(0)},\beta^{(0)})$$

qui envoi $\mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G})$ sur $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{G}^{(0)},\beta^{(0)}))\otimes 1$, $\mathcal{M}_0(\mathcal{G})$ sur $\mathcal{D}\otimes 1$, $\mathcal{M}_1(\mathcal{G})$ sur $1\otimes\mathcal{D}$; le groupoïde $(\mathcal{G},\mathcal{C})$ est de la forme $(\mathcal{G}^{(0)}\times\mathcal{G}^{(0)},\beta^{(0)}\otimes\beta^{(0)})$, c'est à dire essentiellement transitif.

Pour passer du cas ergodique au cas général, il suffit de faire intervenir la désintégration du groupoïde $(\mathcal{G},\mathcal{C})$ en groupoïdes ergodiques (cf. [14, theorem 7.15]), soit symboliquement

$$((\mathcal{G},\mathcal{C}) = \int_Z (\mathcal{G}_z,\mathcal{C}_z)\,d\nu(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G}) = \int_Z^\oplus \mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G}_z)\,d\nu(z)\,.$$

Si R est mesurable, on peut prendre pour Z une section borélienne de R et, pour presque tout z, le groupoïde $(\mathcal{G}_z,\mathcal{C}_z)$ est essentiellement transitif; $\mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G})$ est donc discrète comme intégrale de facteurs de type I. Réciproquement, si $\mathcal{M}^\alpha(\mathcal{G})$ est discrète, pour presque tout z le groupoïde $(\mathcal{G}_z,\mathcal{C}_z)$ est essentiellement transitif; une section mesurable de la projection naturelle de $\mathcal{G}^{(0)}$ sur Z est aussi une section mesurable de R, qui est bien mesurable.

IV.2. *Automorphismes d'une relation d'équivalence mesurée.*

Soit $(\mathscr{G},\mathscr{C})$ une relation d'équivalence mesurée. On identifie $\mathscr{G}$ et le graphe de la relation d'équivalence R (cf. § III.3): $\mathscr{G}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{G}^{(0)}\times\mathscr{G}^{(0)}$ et un élément x de $\mathscr{G}$ sera aussi noté (u,v), avec $u=r(x)$ et $v=d(x)$.

Soit

$$\beta = \int_{\mathscr{G}^{(0)}} \beta^u \, d\beta^{(0)}(u)$$

une mesure invariante à gauche dans $\mathscr{C}$. Pour tout u de $\mathscr{G}^{(0)}$, β^u est de la forme $\varepsilon_u \otimes \beta''^u$, où ε_u est la mesure de Dirac au point u, et où $(\beta''^u, u \in \mathscr{G}^{(0)})$ est un champ borélien de mesures sur $\mathscr{G}^{(0)}$ tel que, pour tout u, β''^u soit porté par la classe d'équivalence de u, et vérifiant

$$\beta''^u = \beta''^v, \qquad \forall u,v \in \mathscr{G}^{(0)} \text{ tels que } uRv\,.$$

Definition IV.2.1. Le groupe plein de R est le groupe $[R]$ des automorphismes a de l'espace mesuré $(\mathscr{G}^{(0)}.\mathscr{C}^{(0)})$ qui vérifient la propriété suivante:

$$\forall u \in \mathscr{G}^{(0)}\ \mathscr{C}^{(0)}-\text{p.s.}, \qquad a\beta''^u \sim \beta''^u\,.$$

(Un automorphisme de $(\mathscr{G}^{(0)},\mathscr{C}^{(0)})$ est une permutation borélienne de $\mathscr{G}^{(0)}$ qui préserve la classe $\mathscr{C}^{(0)}$; on identifie deux automorphismes essentiellement égaux).

Cette définition implique:

$$\forall a \in [R],\ \forall u \in \mathscr{G}^{(0)}\ \mathscr{C}^{(0)}-\text{p.s.}, \qquad a(u)Ru\,.$$

Definition IV.2.2. Le normaliseur $\mathscr{N}([R])$ de la relation d'équivalence R est le groupe des automorphismes a de $(\mathscr{G}^{(0)},\mathscr{C}^{(0)})$ qui vérifient

$$\forall u \in \mathscr{G}^{(0)}\ \mathscr{C}^{(0)}-\text{p.s.}, \qquad a\beta''^u \sim \beta''^{a(u)};$$

ce qui implique

$$\forall x \in \mathscr{G}\ \mathscr{C}-\text{p.s.}, \qquad a(r(x))Ra(d(x))$$

$[R]$ est un sous-groupe distingué de $\mathscr{N}([R])$. Si les orbites de R sont dénombrables, $\mathscr{N}([R])$ est le normalisateur de $[R]$ dans le groupe des automorphismes de $(\mathscr{G}^{(0)},\mathscr{C}^{(0)})$. Let but de ce paragraphe est d'établir un isomorphisme de $\mathscr{N}([R])$ sur le groupe des automorphismes de $\mathscr{M}_0(\mathscr{G})$ qui proviennent d'un automorphisme de $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ (avec $\alpha=1$), et de $[R]$ sur le groupe des automorphismes de $\mathscr{M}_0(\mathscr{G})$ qui proviennent d'un automorphisme intérieur de $\mathscr{M}^\alpha(\mathscr{G})$ (avec $\alpha=1$).

Comme les résultats ne font intervenir que le deux cocycle $\alpha=1$, on écrira $\mathscr{M}(\mathscr{G})$ pour $\mathscr{M}^1(\mathscr{G})$, L_f pour L_f^1 $(f \in \mathscr{L}_\beta(\mathscr{G}))$, etc.

NOTATIONS IV.2.3. Si $a \in [R]$, on posera

$$\tilde{a}(u,v) = (au,v), \qquad (u,v) \in \mathscr{G} .$$

$\tilde{a}$ est un automorphisme de l'espace mesuré $(\mathscr{G},\mathscr{C})$ et on définit un unitaire V_a de $L^2(\mathscr{G},\beta)$ en posant

$$V_a\xi(u,v) = \frac{d\tilde{a}\beta}{d\beta}(u,v)^{\frac{1}{2}}\xi(a^{-1}u,v), \qquad \forall\, \xi \in L^2(\mathscr{G},\beta) .$$

Les propriétés suivantes se vérifient facilement:

(i) $\forall\, a \in [R], \quad V_a \in \mathscr{M}(\mathscr{G})$;

(ii) $\forall\, a \in [R]$, $\forall f \in L^\infty(\mathscr{G}^{(0)},\mathscr{C}^{(0)})$, $V_a T_r(f)V_a^* = T_r(af)$ et par conséquent $V_a\mathscr{M}_0(\mathscr{G})V_a^* = \mathscr{M}_0(\mathscr{G})$.

(iii) l'application $a \to V_a$ est un morphisme du groupe $[R]$ dans le groupe unitaire de $\mathscr{M}(\mathscr{G})$.

PROPOSITION IV.2.4. *Un unitaire V de $\mathscr{M}(\mathscr{G})$ qui normalise $\mathscr{M}_0(\mathscr{G})$ s'écrit de manière unique $V = V_a \cdot V_0$, où $a \in [R]$ et $V_0 \in \mathscr{M}_0(\mathscr{G})$.*

DEMONSTRATION. L'unicité ne pose pas de difficultés.

V normalise $\mathscr{M}_0(\mathscr{G})$ et l'algèbre des diagonalisables de $L^2(\mathscr{G},\beta)$. D'où un automorphisme a de $(\mathscr{G}^{(0)},\mathscr{C}^{(0)})$ et un automorphisme $\tilde{a}$ de $(\mathscr{G},\mathscr{C})$ caractérisés par:

$$\forall f \in L^\infty(\mathscr{G}^{(0)},\mathscr{C}^{(0)}), \qquad VT_r(f)V^* = T_r(af)$$

$$\forall \varphi \in L^\infty(\mathscr{G},\mathscr{C}), \qquad VT_\varphi V^* = T_{\tilde{a}\varphi} .$$

Comme V commute à $\mathscr{M}_1(\mathscr{G})$, on a $\tilde{a}(u,v) = (au,v)$, $\forall\, (u,v) \in \mathscr{G}$ $\mathscr{C}$-p.s. et, comme $\tilde{a}$ préserve $\mathscr{C}$, on en déduit

$$\forall u \in \mathscr{G}^{(0)} \ \mathscr{C}^{(0)}\text{-p.s.}, \qquad a\beta''^u \sim \beta''^u ,$$

d'où $a \in [R]$.

$V_0 = V_a^{-1} \cdot V$ est un unitaire de $\mathscr{M}(\mathscr{G})$ qui commute à $\mathscr{M}_0(\mathscr{G})$, donc un élément de $\mathscr{M}_0(\mathscr{G})$ d'après le lemme III.3.4(a).

NOTATIONS IV.2.5. Si $a \in \mathscr{N}([R])$, on posera $\hat{a}(u,v) = (au,av)$, $\forall\, (u,v) \in \mathscr{G}$. $\hat{a}$ est un automorphisme de l'espace mesuré $(\mathscr{G},\mathscr{C})$, et on définit un unitaire $U_{\hat{a}}$ de $L^2(\mathscr{G},\beta)$ en posant

$$U_{\hat{a}}\xi(u,v) = \frac{d\hat{a}\beta}{d\beta}(u,v)^{\frac{1}{2}}\xi(a^{-1}u,a^{-1}v) .$$

On vérifie

(i) $U_{\hat{a}}\mathscr{M}(\mathscr{G})U_{\hat{a}}^* = \mathscr{M}(\mathscr{G})$

(ii) $\forall f \in L^\infty(\mathscr{G}^{(0)},\mathscr{C}^{(0)})$, $U_{\hat{a}}T_r(f)U_{\hat{a}}^* = T_r(af)$ et par conséquent $U_{\hat{a}}\mathscr{M}_0(\mathscr{G})U_{\hat{a}}^* = \mathscr{M}_0(\mathscr{G})$.

(iii) l'application $\hat{a} \to U_{\hat{a}}$ est un morphisme de $\mathcal{N}([R])$ dans le groupe unitaire de $L^2(\mathcal{G}, \beta)$.

(iv) $U_{\hat{a}}$ commute à J.

REMARQUE IV.2.6. Soit ϱ un homomorphisme de $\mathcal{G}$ dans le tore T, et T_ϱ l'opérateur de multiplication par ϱ dans $L^2(\mathcal{G}, \beta)$. T_ϱ normalise $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ et l'isomorphisme $\hat{\varrho} = \mathrm{ad}\,(T_\varrho)$ de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ induit l'identité sur $\mathcal{M}_0(\mathcal{G})$. En outre, T_ϱ est l'implémentation canonique de $\hat{\varrho}$ (au sens de [12, definition 3.3]).

PROPOSITION IV.2.7. *Soit θ un automorphisme de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ tel que $\theta(\mathcal{M}_0(\mathcal{G})) = \mathcal{M}_0(\mathcal{G})$. Alors il existe un élément a de $\mathcal{N}((R))$ et un homomorphisme ϱ de $\mathcal{G}$ dans T, uniques, tels que $\theta = \mathrm{ad}\,(U_{\hat{a}} \cdot T_\varrho)$.*

DEMONSTRATION. Soit U l'implémentation canonique de θ. U implémente un automorphisme de $\mathcal{M}_1(\mathcal{G}) = J\mathcal{M}_0(\mathcal{G})J$, d'où, comme dans la démonstration de la proposition IV.2.4., un automorphisme a de $(\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{C}^{(0)})$ et un automorphisme $\hat{a}$ de $(\mathcal{G}, \mathcal{C})$ tels que

$$\forall f \in L^\infty(\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{C}^{(0)}), \quad UT_r(f)U^* = T_r(af); \quad UT_d(f)U^* = T_d(af);$$

$$\forall \varphi \in L^\infty(\mathcal{G}, \mathcal{C}), \quad UT_\varphi U^* = T_{\hat{a}\varphi}\,.$$

On en déduit $\hat{a}(u, v) = (au, av)$, $\forall\,(u, v) \in \mathcal{G}$ $\mathcal{C}$ – p.s. et, comme $\hat{a}$ préserve $\mathcal{C}$, on aura $a \in \mathcal{N}([R])$.

La proposition découle alors du lemme suivant, dont la démonstration, assez longue, sera omise:

LEMME IV.2.8. *Soit θ_0 un automorphisme de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ induisant l'identité sur $\mathcal{M}_0(\mathcal{G})$. Son implémentation canonique est de la forme $U_0 = T_\varrho$, où ϱ est un homomorphisme de $\mathcal{G}$ dans T.*

REMARQUE. Les résultats du § IV sont une généralisation des paragraphes 5, 7 et 8 de [11]. En conclusion du § IV.2, on obtient un isomorphisme (borélien) du normalisateur de $\mathcal{M}_0(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ avec le produit semi-direct de $[R]$ par le groupe unitaire de $\mathcal{M}_0(\mathcal{G})$, et un isomorphisme (borélien) du groupe des automorphismes de $\mathcal{M}(\mathcal{G})$ qui préservent globalement $\mathcal{M}_0(\mathcal{G})$ avec le produit semi-direct de $\mathcal{N}([R])$ par le groupe des automorphismes de $\mathcal{G}$ dans T.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. K. Arnold, *On σ-finite invariant measures*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 9 (1968), 85–97.
2. F. Combes, *Poids associé à une algèbre hilbertienne à gauche*, Compositio Math. 23 (1971), 49–77.

3. A. Connes, *Une classification des facteurs de type* III, Ann. Sci. École Norm. Sup., 4ème série, 6 (1973), 133–252.
4. A. Connes et M. Takesaki, *The flow of weights on factors of type* III (à paraître).
5. J. Dixmier, *Dual et quasi-dual d'une algèbre de Banach involutive*, Trans. Amér. Math. Soc. 104 (1962), 278–283.
6. J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier–Villars, Paris, 1969.
7. J. Dixmier, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier–Villars, Paris, 1969.
8. M. Enock, *Produit croisé d'une algèbre de Von Neumann par une algèbre de Kac* (à paraître).
9. M. Enock et J. M. Schwartz, *Une nouvelle construction du poids dual sur le produit croisé d'une algèbre de Von Neumann par un groupe localement compact* (à paraître aux C. R. Ácad. Sci. Paris Sér A).
10. J. Feldman et C. C. More, *Ergodic equivalence relations, cohomology and Von Neumann algebras* (à paraître).
11. A. Guichardet, *Automorphismes et type de certaines algèbres de Von Neumann* (à paraître).
12. U. Haagerup, *The standard form of Von Neumann algebras*, Math. Inst. Copenhagen Preprint Series, n° 15, 1973.
13. T. Hamachi, Y. Oka et M. Osikawa, *A Classification of ergodic non singular transformation groups*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, 28 (1974), 113–133.
14. P. Hahn, *Haar measure and convolution algebras on ergodic groupoïds* (à paraître).
15. W. Krieger, *On constructing non *-isomorphic hyperfinite factors of type* III, J. Functional Analysis 6 (1970), 97–109.
16. W. Krieger, *On the Araki-Woods asymptotic ratio-set and non singular transformations of a measure space* in L Sucheston, *Contributions to Ergodic Theory and Probability* (Lecture Notes in Mathematics 160) pp. 158–177, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1970.
17. W. Krieger, *On ergodic flows and the isomorphisms of factors* (à paraître).
18. G. W. Mackey, *Point realizations of transformation groups*, Illinois J. Math. 6 (1962), 327–335.
19. G. W. Mackey, *Ergodic theory and virtual groups*, Math. Ann. 166 (1966), 187–207.
20. Y. Nagakami, *Dual action on a Von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group*, Kyushu University preprint (1975).
21. J. von Neumann, *Einige Sätze über Messbare Abbildungen*, Ann. Math. 33 (1932), 401–485.
22. A. Ramsay, *Virtual groups and group actions*, Advances in Math. 6 (1971), 253–322.
23. M. Samuelides, *Mesures de Haar et W*-couple d'un groupoïde mesuré* (à paraître).
24. M. Samuelides et J. L. Sauvageot, *Algèbre de Krieger d'un système dynamique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 280 (1975), 709–712.
25. J. L. Sauvageot, *Image d'un homomorphisme et flot des poids d'une relation d'équivalence mesurée*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 282 (1976), 619–622.
26. K. Schmidt, *Cohomology and skew product of ergodic transformations* (à paraître).
27. K. Schmidt, *Extension of flows and unique ergodicity* (à paraître).
28. M. Takesaki, *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type* III, Acta Math. 131 (1974), 249–310.
29. V. S. Varadarajan, *Groups of automorphisms of Borel spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 109 (1963), 191–220.

UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
LABORATOIRE DE PROBABILITES
TOUR 56-4, PLACE JUSSIEU
75230 PARIS CEDEX 05
FRANCE