MATH. SCAND. 42 (1978), 251–270

UNENDLICHE PRODUKTE UNKORRELIERTER FUNKTIONEN AUF KOMPAKTEN, ABELSCHEN GRUPPEN

GUNTER RITTER

1. Einleitung.

(1.1) F. Riesz [15] benuzte das erste Produkt $\prod_{k=0}^{\infty}(1+\cos 4^k t)$ um die Vermutung zu widerlegen, daß die Fourier–Stieltjes-Transformierte jedes stetigen Maßes auf dem Torus im Unendlichen verschwindet. Seither spielen derartige Produkte in der Fourier-Analysis eine große Rolle. Sie wurden von Hewitt und Zuckerman [10] auf beliebige kompakte, abelsche Gruppen G übertragen, um ein Beispiel für ein stetiges, singuläre Wahrscheinlichkeitsmaß zu geben, dessen Faltungsquadrat absolutstetig ist, mit Dichtefunktion in $\mathfrak{L}_p(G)$ für all $p>1$. Dies führte zur Definition der gruppentheoretischen Dünnheit einer Menge, nämlich ihrer Dissoziiertheit. Seither werden Riesz-Produkte in ähnlicher Weise benutzt, um singuläre Maße auf lokalkompakten Gruppen mit gewissen vorgegebenen Eigenschaften zu konstruieren. So zeigten Brown und Hewitt [3] unter anderem, daß es auf jeder σ-kompakten, abelschen Gruppe singuläre Wahrscheinlichkeitsmaße gibt, deren Träger die ganze Gruppe ist, deren Transformierte im Unendlichen verschwindet, und die zu ihrem Faltungsquadrat äquivalent sind. Hewitt und Ritter [7], [8] benutzten Riesz-Produkte, um stetige singuläre Maße mit vorgegebenem Integrationsverhalten ihrer Transformierten zu erhalten. Sie zeigten unter anderem, daß es auf jeder nicht-diskreten, lokalkompakten, abelschen Gruppe G stetige, singuläre Maße mit kompaktem Träger gibt, deren Transformierte in einem präzisierten Sinne beliebig nahe bei $\mathfrak{L}_2$ sind.

Gleichzeitig wurde die Struktur der Riesz-Produkte untersucht. Nachdem Zygmund [17] gezeigt hatte, daß jedes Riesz-Produkt über einer Hadamard-dissoziierten Menge von natürlichen Zahlen entweder singulär oder absolutstetig ist, zeigten Brown und Moran [4] diese Eigenschaft für Riesz-Produkte auf einer beliebigen kompakten, abelschen Gruppe. Brown [2] bewies, daß jedes Riesz-Produkt über einer dissoziierten Menge ohne Elemente der Ordnung 2 stetig ist und untersuchte die Ergodizität solcher Produkte.

Eingegangen am 19. April, 1977.

In der Literatur finden sich aber auch ähnliche Produktkonstruktionen, die nicht die Form von Riesz-Produkten über dissoziierten Mengen besitzen. So beweist Peyrière [14], daß Riesz-Produkte der Form $\prod_{k=0}^{\infty}(1+a_k \cos 2^k t)$ dasselbe Verhalten bezüglich Singularität und Absolutstetigkeit zeigen, wie Riesz-Produkte über dissoziierten Mengen. Andererseits benutzt Katznelson [12] Produkte der Form

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\sum_{l=1}^{M} a_{kM+l} \cos n_{kM+l} t\right).$$

Der Versuch, diese Produkte gemeinsam zu behandeln, führt zwangsläufig dazu, unendliche Produkte von unkorrelierten Funktionen zu definieren. Man erhält so wesentlich allgemeinere Produktbildungen und Maße. Wir führen diese verallgemeinerten Riesz-Produkte in Abschnitt 3 ein. Dabei ist die Dissoziiertheit der in den Riesz-Produkten auftretenden Frequenzen durch einen allgemeineren Begriff zu ersetzen.

Danach stellt sich die Frage nach den Eigenschaften derartiger Produkte. Unter welchen Bedingungen sind sie absolutstetig, absolutstetig mit stetiger Dichtefunktion, wann sind sie singulär und wann stetig? Dies ist das Programm der Abschnitte 4 und 5. Verallgemeinerte Riesz-Produkte zeigen ein ähnliches Dichotomieverhalten wie Riesz-Produkte; darüberhinaus gibt es auch hier praktikable Kriterien, wann sie singulär bzw. absolutstetig sind. Unsere Bedingung (4.4.i) für die Äquivalenz zweier verallgemeinerter Riesz-Produkte liefert dabei im Spezialfall von Riesz-Produkten eine Verschärfung der entsprechenden Bedingungen in Lemma 4 und Theorem 2 von [4] (siehe (4.5)). Die hier vorliegende Theorie ist im wesentlichen eine $\mathfrak{L}_2$-Theorie. In einer weiteren Arbeit, die in den Mathematical Proceedings der Cambridge Philosophical Society erscheinen wird, werden wir einen maßtheoretischen Aspekt von Riesz-Produkten behandeln.

(1.2) Notationen. Wie üblich sei $\mathbf{N}$ die Menge $\{1,2,3,\ldots\}$ der natürlichen Zahlen, $\mathbf{Z}$ die Gruppe der ganzen Zahlen und $\mathbf{T}$ die Torusgruppe. Wenn nicht anders vermerkt, sei G eine kompakte, abelsche Gruppe mit Haar-Maß λ und Charaktergruppe X. $\mathfrak{C}(G)$ sei der Raum der stetigen Funktionen auf G, $\mathfrak{M}_1^+(G)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf G. Integration ohne Angabe des Integrationsbereiches bedeute immer Integration über G. Für eine p-fach λ-integrable Funktion f auf G sei $\|f\|_p$ ihre p-Norm bzgl. λ. ε_g sei das Dirac-Maß im Punkt $g \in G$ und $\ll$ bzw. $\sim$ stehe für Absolutstetigkeit bzw. Äquivalenz zweier Maße in $\mathfrak{M}_1^+(G)$. Positiv bedeute immer $\geqq 0$ und 1_E sei die Indikatorfunktion einer Menge E. Die übrige, nicht gesondert eingeführte Terminologie ist wie in Hewitt–Ross [9].

2. Dissoziiertheit und Unkorreliertheit.

(2.1) *Die Funktionenklassen* $\mathfrak{C}_1^+(G)$, $\mathfrak{A}_1^+(G)$, $\mathfrak{P}_1^+(G)$ *und* $\mathfrak{J}_1^+(G)$.

Die nachstehend aufgeführten Funktionenklassen werden im folgenden eine Rolle spielen.

$$\mathfrak{C}_1^+(G) := \{f \in \mathfrak{C}^+(G) \mid \|f\|_1 = 1\} ,$$

$$\mathfrak{A}_1^+(G) := \{f \in \mathfrak{C}^+(G) \mid \hat{f} \in \mathrm{l}_1(X), \ \|f\|_1 = 1\} ,$$

$$\mathfrak{P}_1^+(G) := \{f \in \mathfrak{C}^+(G) \mid \hat{f} \geqq 0, \ \|f\|_1 = 1\} .$$

Zur Definition der Funktionenklasse $\mathfrak{J}_1^+(G)$ sei für jede Funktion $f \in \mathfrak{C}(G)$ mit absolut summierbarer Fourier-Reihe gesetzt

$$f' := |\hat{f}|^{\check{}} .$$

Dann definieren wir

$$\mathfrak{J}_1^+(G) := \{f \in \mathfrak{C}^+(G) \mid \hat{f} \in \mathrm{l}_1(X), \ f' \geqq 0, \ \|f\|_1 = 1\} .$$

Es gelten die folgenden Inklusionen (die erste folgt aus [9], (31.42)).

$$\mathfrak{P}_1^+(G) \subseteqq \mathfrak{J}_1^+(G) \subseteqq \mathfrak{A}_1^+(G) \subseteqq \mathfrak{C}_1^+(G) .$$

$\mathfrak{J}_1^+(G)$ enthält auch alle Translate von $\mathfrak{P}_1^+(G)$.

(2.2) Beispiele. (1) Sei $\chi \in X \setminus \{1\}$ und

$$f := 1 + a\chi + \bar{a}\chi^{-1} ,$$

wobei a eine komplexe Zahl vom Betrage höchstens $\frac{1}{2}$ ist. Dann ist $f \in \mathfrak{J}_1^+(G)$. Falls die Ordnung von χ gleich 2 ist, dann hat f die Form

$$f = 1 + a\chi$$

für ein $a \in [-1, 1]$.

(2) Sei allgemeiner $n \in \mathsf{N}$, $\chi_k \in X \setminus \{1\}$ $(1 \leqq k \leqq n)$ und

$$f := 1 + \sum_{k=1}^{n} (a_k\chi_k + \overline{a_k}\chi_k^{-1}) ,$$

wobei die a_k komplexe Zahlen mit der Eigenschaft $\sum |a_k| \leqq \frac{1}{2}$ sind. Dann ist $f \in \mathfrak{J}_1^+(G)$.

(3) Sei $(a_k)_{k \in \mathsf{Z}^+}$ eine konvexe, antitone Folge positiver, reeller Zahlen mit $a_0 = 1$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$, und sei $l \in \mathsf{N}$. Wir setzen $a_{-k} = a_k$ $(k \in \mathsf{N})$ und

$$f(t) := \sum_{k \in \mathsf{Z}} a_k e^{ilkt} \qquad (-\pi \leqq t < \pi) .$$

Dann ist $f \in \mathfrak{P}_1^+(\mathsf{T})$ (vgl. [5, p. 34])

(2.3) Wir werden die folgenden elementaren Eigenschaften von $\mathfrak{A}_1^+(G)$ benötigen:

(1) $\mathfrak{A}_1^+(G)$ ist stabil bezüglich der Faltung und es gilt für je zwei Funktionen f und g aus $\mathfrak{A}_1^+(G)$

$$(f*g)' = f'*g' .$$

Sei $f \in \mathfrak{A}_1^+(G)$. Dann gilt

(2) $f = \hat{f}\check{}$;

(3) f' ist symmetrisch;

(4) $\|f\|_\infty \leqq \|f'\|_\infty = \|\hat{f}\|_1 = f'(0)$, $\|f'\|_2 = \|f\|_2 \geqq 1$;

(5) $|f-1| \leqq \|\hat{f}\|_1 - 1$.

Zur Definition der Dissoziiertheit von Mengensystemen führen wir zunächst einige Notationen ein.

(2.4) Notationen. Sei $(\boldsymbol{T}_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein System von Teilmengen von $\boldsymbol{X}$ und $\mathscr{E}$ das System der endlichen Teilmengen der Indexmengen A. Wir setzen für $\Phi \in \mathscr{E}$ und $\chi \in \boldsymbol{X}$

$$\Omega_\Phi(\chi) := \left\{(\chi_\alpha)_{\alpha\in A} \;\middle|\; \chi_\alpha \in \boldsymbol{T}_\alpha,\ \chi_\alpha = 1 \text{ für } \alpha \notin \Phi,\ \prod_{\alpha\in A} \chi_\alpha = \chi\right\},$$

$$\Omega(\chi) := \bigcup_{\Phi\in\mathscr{E}} \Omega_\Phi(\chi),$$

$$\Omega_\Phi := \{(\chi_\alpha)_{\alpha\in A} \mid \chi_\alpha \in \boldsymbol{T}_\alpha,\ \chi_\alpha = 1 \text{ für } \alpha \notin \Phi\}$$

und

$$\Omega := \bigcup_{\Phi\in\mathscr{E}} \Omega_\Phi .$$

Die Elemente aus Ω_Φ heißen Φ-Wörter, die aus Ω Wörter.

(2.5) Bemerkung. Nach Hewitt–Zuckerman [10] heißt eine Familie $(\chi_\alpha)_{\alpha\in A}$ von Charakteren in $\boldsymbol{X}$ bekanntlich *dissoziiert*, wenn $\chi_\alpha \neq 1$ für alle $\alpha \in A$ gilt, und wenn für jede endliche Teilmenge $\Phi \subseteqq A$ und jede Wahl von Exponenten $\varepsilon_\alpha \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ aus

$$\prod_{\alpha\in\Phi} \chi_\alpha^{\varepsilon_\alpha} = 1$$

immer $\chi_\alpha^{\varepsilon_\alpha} = 1$ für alle $\alpha \in \Phi$ folgt. In Anlehnung daran definieren wir

(2.6) DEFINITION. Sei $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein System von symmetrischen Teilmengen von X mit $1 \in T_\alpha$.

(a) $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ heiße 1-*dissoziiert*, wenn das triviale Wort $(1)_{\alpha\in A}$ das einzige Wort in $\Omega(1)$ ist.

(b) $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ heiße 2-*dissoziiert*, wenn für jeden Charakter $\chi \in X$ die Menge $\Omega(\chi)$ höchstens einelementig ist.

(T_α) ist genau dann 2-dissoziiert, wenn (T_α^2) 1-dissoziiert ist. Insbesondere ist jedes 2-dissoziierte System auch 1-dissoziiert.

(2.7) BEISPIELE. (1) Sei $(n_k)_{k\in \mathbf{N}}$ eine Teilfolge von $\mathbf{N}$ die der Hadamardschen Bedingung $n_{k+1}/n_k \geqq 2$ genügt. Dann ist das System $T_k = \{1, n_k, -n_k\}$ 1-dissoziiert in $\mathbf{Z}$.

(2) Sei $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie von kompakten, abelschen Gruppen und $G := \prod_{\alpha\in A} G_\alpha$. Bezeichnet X_α die zu G_α duale Gruppe, so ist $X := \bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ die zu G duale Gruppe. Dann ist $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein 2-dissoziiertes System in X.

(3) Sei $(\chi_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie in X und $\chi_\alpha \neq 1$ für alle $\alpha \in A$. Dann ist das System $T_\alpha := \{1, \chi_\alpha, \chi_\alpha^{-1}\}$ genau dann 2-dissoziiert, wenn $(\chi_\alpha)_{\alpha\in A}$ dissoziiert ist.

(4) Sei $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ eine Teilfolge von $\mathbf{N}$, die der Hadamardschen Bedingung $n_{k+1}/n_k \geqq q$ mit einem $q > 1$ genügt. Sei weiter für $M \in \mathbf{N}$ und $k \in \mathbf{Z}^+$

$$T_{M,k} := \{0, \pm n_{kM+1}, \pm n_{kM+2}, \ldots, \pm n_{kM+M}\}\ .$$

Dann gibt es ein $M \in \mathbf{N}$, so daß $(T_{M,k})_{k\geqq 0}$ 2-dissoziiert ist. Zur Bedeutung dieses Beispiels siehe [12, p. 111].

(5) Sei w_n die $n$te Walsh-Funktion in der Paley-Ordnung, und sei

$$T_k := \{w_0, w_{2^{k-1}}, w_{2^{k-1}+1}, \ldots, w_{2^k-1}\} \qquad (k \in \mathbf{N})\ .$$

Dann ist das System (T_k) 1-dissoziiert.

Wir werden wiederholt die folgende Proposition benötigen.

(2.8) PROPOSITION. a) *Sei $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ 1-dissoziiert und sei für jedes $\alpha \in A$ g_α aus $\mathfrak{C}(G)$. T_α enthalte den Träger von $\hat{g}_\alpha$. Dann gilt für jedes $\Phi \in \mathscr{E}$*

$$\text{i)} \qquad \int \prod_{\alpha\in\Phi} g_\alpha\, d\lambda = \prod_{\alpha\in\Phi} \int g_\alpha\, d\lambda\ .$$

b) *Sei $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ 2-dissoziiert und seien für jedes $\alpha \in A$ g_α und h_α aus $\mathfrak{C}(G)$. T_α enthalte die Träger von $\hat{g}_\alpha$ und $\hat{h}_\alpha$. Dann gilt für jedes $\Phi \in \mathscr{E}$*

$$\text{ii)} \qquad \int \prod_{\alpha\in\Phi} g_\alpha h_\alpha\, d\lambda = \prod_{\alpha\in\Phi} \int g_\alpha h_\alpha\, d\lambda\ .$$

Beweis. a) Wir können annehmen, daß Φ das Intervall $[1,n]$ ist. Dann gilt

$$\left(\prod_{l=1}^{n} g_l(1)\right)^{\wedge} = ((\ldots(\hat{g}_1 * \hat{g}_2)\ldots * \hat{g}_{n-1}) * \hat{g}_n)(1)$$

$$= \sum_{\psi_{n-1}\chi_n = 1} \ \sum_{\psi_{n-2}\chi_{n-1} = \psi_{n-1}} \cdots \sum_{\chi_1\chi_2 = \psi_2} \hat{g}_1(\chi_1)\hat{g}_2(\chi_2)\ldots\hat{g}_n(\chi_n)\,.$$

Für die Charaktere, über die sich die Summationen erstrecken, gilt also $\chi_1 \ldots \chi_n = 1$. Da andererseits für $\chi_l \notin T_l$ gilt $\hat{g}_l(\chi_l) = 0$, ist nur $\chi_l \in T_l$ zu betrachten. Aus der 1-Dissoziiertheit von (T_α) folgt nun $\chi_1 = \ldots = \chi_n = 1$. Somit gilt

$$\left(\prod_{l=1}^{n} g_l(1)\right)^{\wedge} = \hat{g}_1(1)\hat{g}_2(1)\ldots\hat{g}_n(1)\,.$$

b) Da der Träger von $(g_\alpha h_\alpha)^{\wedge}$ in T_α^2 enthalten ist, und da (T_α^2) 1-dissoziiert ist, folgt die Behauptung aus a).

(2.9) Bemerkungen. (a) Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir sagen, eine Familie $(f_\alpha)_{\alpha\in A} \subseteq \mathfrak{L}_1(P)$ ist *unkorreliert*, wenn für jedes $\Phi \in \mathscr{E}$ gilt

$$\int \prod_{\alpha\in\Phi} f_\alpha \, dP = \prod_{\alpha\in\Phi} \int f_\alpha \, dP\,.$$

Wir sagen, $(f_\alpha) \subseteq \mathfrak{L}_2(P)$ ist *quadratisch unkorreliert*, wenn für jedes $\Phi \in \mathscr{E}$ und jede Wahl von $\varepsilon_\alpha \in \{1,2\}$ $(\alpha \in \Phi)$ gilt

$$\int \prod_{\alpha\in\Phi} f_\alpha^{\varepsilon_\alpha} \, dP = \prod_{\alpha\in\Phi} \int f_\alpha^{\varepsilon_\alpha} \, dP\,.$$

Die (quadratische) Unkorreliertheit ist eine Verschärfung der wahrscheinlichkeitstheoretischen paarweisen Unkorreliertheit und eine Abschwächung der Unabhängigkeit. Die Familie (g_α) in (2.8.a) ist wegen (2.8.i) unkorreliert, die Familie (g_α) in (2.8.b) ist wegen (2.8.ii) quadratisch unkorreliert.

Die quadratische Unkorreliertheit hängt eng mit der (starken) Multiplikativität zusammen (vgl. [16]). Da wir diese hier nicht brauchen, gehen wir nicht weiter darauf ein.

(b) Unter Verwendung von (2.8) sieht man leicht, daß eine Familie $(f_\alpha) \subseteq \mathfrak{P}_1^+(G)$ genau dann (quadratisch) unkorreliert ist, wenn das System $(\operatorname{supp} \hat{f}_\alpha)$ (2-) 1-dissoziiert ist.

3. Verallgemeinerte Riesz-Produkte.

(3.1) Notationen. Zu einem gegebenen Funktionensystem $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ und $\Phi \in \mathscr{E}$ sei fortan

$$f_\Phi := \prod_{\alpha \in \Phi} f_\alpha \quad \text{und} \quad \mu_\Phi := \Big(\prod_{\alpha \in \Phi} f_\alpha\Big)\lambda \,.$$

Sei $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein 1-dissoziiertes System in X und sei $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Funktionensystem in $\mathfrak{C}_1^+(G)$, so daß T_α den Träger von $\hat{f}_\alpha$ enthält. Wegen (2.8a) ist $\mu_\Phi \in \mathfrak{M}_1^+(G)$.

(3.2) Definition. Jeder Häufungspunkt μ des Netzes $(\mu_\Phi)_{\Phi \in \mathscr{E}} \subseteqq \mathfrak{M}_1^+(G)$ heißt ein von (f_α) erzeugtes *verallgemeinertes Riesz-Produkt.*

Es gibt zwei Fälle, in denen man von vornherein sagen kann, daß $\lim_{\Phi \in \mathscr{E}} \mu_\Phi$ existiert. Den einen erhält man durch spezielle Wahl des Funktionensystems (Satz (3.3)), den anderen durch spezielle Wahl des Mengensystems (Satz (3.4)).

(3.3) Satz. (a) *Sei die Familie $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ in $\mathfrak{I}_1^+(G)$. Dann existiert*

$$\mu := \lim_{\Phi \in \mathscr{E}} \mu_\Phi$$

in $\mathfrak{M}_1^+(G)$ im vagen Sinne.

(b) *Für jedes $\chi \in X$ ist die Familie $(\prod_{\alpha \in A} \hat{f}_\alpha(\chi_\alpha))_{(\chi_\alpha) \in \Omega(\chi)}$ absolut summierbar, und es gilt*

(i) $$\hat{\mu}(\chi) = \sum_{(\chi_\alpha) \in \Omega(\chi)} \prod_{\alpha \in A} \hat{f}_\alpha(\chi_\alpha) \,.$$

Beweis. Für jedes $\Phi \in \mathscr{E}$ und jedes $\chi \in X$ gilt

(1) $$\sum_{(\chi_\alpha) \in \Omega_\Phi(\chi)} \Big|\prod_{\alpha \in A} \hat{f}_\alpha(\chi_\alpha)\Big| = \sum_{(\chi_\alpha) \in \Omega_\Phi(\chi)} \prod_{\alpha \in A} \hat{f}'_\alpha(\chi_\alpha) = \Big(\prod_{\alpha \in \Phi} f'_\alpha\Big)^{\wedge}(\chi) \,.$$

Da $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie in $\mathfrak{I}_1^+(G)$ ist, ist $\prod_{\alpha \in \Phi} f'_\alpha$ eine Funktion aus $\mathfrak{P}_1^+(G)$; somit gilt

(2) $$\Big(\prod_{\alpha \in \Phi} f'_\alpha\Big)^{\wedge}(\chi) \leqq 1 \,.$$

Aus (1) und (2) folgt nun die absolute Summierbarkeit der Familie $(\prod_{\alpha \in A} \hat{f}_\alpha(\chi_\alpha))_{(\chi_\alpha) \in \Omega(\chi)}$ und es gilt für jedes $\chi \in X$

$$\lim_{\Phi \in \mathscr{E}} \Big(\prod_{\alpha \in \Phi} f_\alpha\Big)^{\wedge}(\chi) = \sum_{(\chi_\alpha) \in \Omega(\chi)} \prod_{\alpha \in A} \hat{f}_\alpha(\chi_\alpha) \,.$$

Hieraus folgen die Behauptungen (a) und (b).

Analog beweist man

(3.4) SATZ. a) *Sei das Mengensystem* $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ *2-dissoziiert. Dann existiert*

$$\mu := \lim_{\Phi\in\mathscr{E}} \mu_\Phi$$

in $\mathfrak{M}_1^+(G)$ *im vagen Sinne.*

b) *Für jedes* $\chi \in X$ *gilt*

$$\hat{\mu}(\chi) = \begin{cases} \prod_{\alpha\in A} \hat{f}_\alpha(\chi_\alpha), & \textit{falls } (\chi_\alpha) \textit{ das einzige Wort in } \Omega(\chi) \textit{ ist;} \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

(3.5) BEMERKUNG. Sei Δ eine Teilmenge von $X\setminus\{1\}$, für die das System $(\{1,\chi,\chi^{-1}\})_{\chi\in\Delta}$ 1-dissoziiert ist (vgl. etwa die Beispiele (2.7.1) und (2.7.3)), und sei $a=(a_\chi)_{\chi\in\Delta}$ eine Familie komplexer Zahlen mit den Eigenschaften

$$|a_\chi| \leqq \tfrac{1}{2} \qquad \text{falls } o(\chi)>2$$

und

$$-1 \leqq a_\chi \leqq 1 \qquad \text{falls } o(\chi)=2\,.$$

Wir setzen

$$f_\chi := \begin{cases} 1+a_\chi\chi+\overline{a}_\chi\chi^{-1} & \text{falls } o(\chi)>2 \\ 1+a_\chi\chi & \text{falls } o(\chi)=2\,, \end{cases}$$

und nennen das von $(f_\chi)_{\chi\in\Delta}$ erzeugte verallgemeinerte Riesz-Produkt das von Δ und a erzeugte Riesz-Produkt $\mu_{\Delta,a}$. Im Falle einer dissoziierten Teilmenge stimmt dies mit der üblichen Terminologie überein.

(3.6) DEFINITION. Es mögen die Voraussetzungen eines der beiden Sätze (3.3) oder (3.4) vorliegen. Dann existiert auch für jedes $\Phi \in \mathscr{E}$

$$\varrho_\Phi := \lim_{\Psi\supseteq\Phi} \mu_{\Psi\setminus\Phi} \in \mathfrak{M}_1^+(G)\,.$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionen f_α ist dann μ absolutstetig bezüglich ϱ_Φ mit Radon–Nikodym-Dichte f_Φ. ϱ_Φ heißt das *Φ-Restmaß* von μ.

4. Orthogonalität und Absolutstetigkeit.

(4.1) Zygmund [17] bewies, daß ein Riesz-Produkt

$$\mu_a = \prod_{k=0}^{\infty} (1+a_k e^{\mathrm{i}n_k t}+\bar{a}_k e^{-\mathrm{i}n_k t})$$

auf T, wobei $n_{k+1}/n_k \geqq 3$, dann singulär ist, wenn $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2=\infty$. Im anderen

Falle ist das Produkt absolutstetig bzgl. λ. Peyrière [14] zeigte, daß sich λ durch ein zweites Riesz-Produkt

$$\mu_b = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + b_k e^{\mathrm{i}n_k t} + \bar{b}_k e^{-\mathrm{i}n_k t})$$

ersetzen läßt. Falls $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k - b_k|^2 = \infty$, dann sind die Maße μ_a und μ_b orthogonal und unter schwachen Zusatzvoraussetzungen über die Folgen (a_k) und (b_k) sind die Maße im anderen Falle äquivalent. Gleichzeitig wurde diese Fast-Dichotomie von Brown und Moran [4] für Riesz-Produkte auf kompakten, abelschen Gruppen bewiesen. Ähnlichen Aussagen gelten auch für verallgemeinerte Riesz-Produkte. Insbesondere gilt auch für verallgemeinerte Riesz-Produkte eine Dichotomie: Zwei über demselben 2-dissoziierten System erzeugte verallgemeinerte Riesz-Produkte sind unter schwachen Beschränktheitsvoraussetzungen über die erzeugenden Funktionenfamilien entweder orthogonal oder äquivalent (siehe (4.7)). Die Methode zum Beweis des folgenden Satzes geht auf Peyrière [13] und Brown–Moran [4] zurück.

(4.2) SATZ. *Sei $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein 2-dissoziiertes System in X und seien $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ und $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$ zwei Familien in $\mathfrak{C}_1^+(G)$. T_α enthalte die Träger von $\hat{f}_\alpha$ und $\hat{g}_\alpha$. μ_f bzw. μ_g seien die von (f_α) bzw. (g_α) erzeugten verallgemeinerten Riesz-Produkte. Falls dann gilt*

$$\text{(i)} \qquad \sum_{\alpha\in A} \frac{\|f_\alpha - g_\alpha\|_2^2}{\sup(f_\alpha + g_\alpha)} = \infty ,$$

dann sind μ_f und μ_g orthogonal.

BEWEIS. Sei

$$\text{(1)} \qquad p_\alpha := f_\alpha - g_\alpha$$

und

$$\text{(2)} \qquad s_\alpha := \sup_{x\in G} (f_\alpha + g_\alpha)(x) .$$

Wir setzen

$$\text{(3)} \qquad h_\alpha := s_\alpha^{-\frac{1}{2}} \|p_\alpha\|_2^{-1} \left[p_\alpha - \int p_\alpha f_\alpha \, d\lambda \right]$$

und

$$\text{(4)} \qquad k_\alpha := s_\alpha^{-\frac{1}{2}} \|p_\alpha\|_2^{-1} \left[p_\alpha - \int p_\alpha g_\alpha \, d\lambda \right]$$

falls $p_\alpha \neq 0$, und $h_\alpha = k_\alpha = 0$ sonst. Offenbar sind h_α und f_α orthogonal in $\mathfrak{L}_2(\lambda)$. Wegen $\operatorname{supp} \hat{p}_\alpha \subseteqq T_\alpha$ und (2.8.b) gilt

$$\int h_\alpha h_\beta \, d\mu_f = \int h_\alpha f_\alpha \, d\lambda \int h_\beta f_\beta \, d\lambda = 0 . \tag{5}$$

(h_α) ist also ein Orthogonalsystem in $\mathfrak{L}_2(\mu_f)$. Analog ist (k_α) ein Orthogonalsystem in $\mathfrak{L}_2(\mu_g)$. Wir zeigen, daß (h_α) beschränkt in $\mathfrak{L}_2(\mu_f)$ ist. Der Ausdruck in eckigen Klammern in (3) ist p_α, zentriert am Erwartungswert bzgl. μ_f. Es genügt deshalb zu bemerken, daß wegen Proposition (2.8) gilt

$$\begin{aligned} \int p_\alpha^2 \, d\mu_f &= \int p_\alpha^2 f_\alpha \, d\varrho_{f,\alpha} \\ &\leqq s_\alpha \int p_\alpha^2 \, d\varrho_{f,\alpha} \\ &= s_\alpha \|p_\alpha\|_2^2 , \end{aligned} \tag{6}$$

wobei $\varrho_{f,\alpha}$ das α-Restmaß von μ_f bezeichnet (vgl. (3.6)).

Analog ist (k_α) beschränkt in $\mathfrak{L}_2(\mu_g)$. Sei

$$c_\alpha := k_\alpha - h_\alpha = s_\alpha^{-\frac{1}{2}} \|p_\alpha\|_2 . \tag{7}$$

c_α ist konstant und nach (i) gilt

$$(c_2) \notin \mathrm{l}_2(A) . \tag{8}$$

Somit gibt es eine Familie $(r_\alpha)_{\alpha \in A}$ positiver, reeller Zahlen mit den beiden Eigenschaften

$$(r_\alpha) \in \mathrm{l}_2(A) \tag{9}$$

und

$$(r_\alpha c_\alpha) \notin \mathrm{l}_1(A) . \tag{10}$$

Wegen (9) konvergieren die beiden Reihen

$$\sum_{\alpha \in A} r_\alpha h_\alpha \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha \in A} r_\alpha k_\alpha ,$$

die erste in $\mathfrak{L}_2(\mu_f)$ und die zweite in $\mathfrak{L}_2(\mu_g)$. Dann gibt es eine Zerlegung von $B := \{\alpha \in A \mid r_\alpha > 0\}$ in endliche Mengen Φ_n ($n \in \mathbf{N}$), so daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \Phi_n} r_\alpha h_\alpha \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \Phi_n} r_\alpha k_\alpha \tag{11}$$

punktweise μ_f — bzw. μ_g — f.ü. konvergieren. Sei E_f die Teilmenge von G, wo die erste, E_g die Teilmenge von G, wo die zweite Reihe in (11) konvergiert.

Dann gilt

$$\mu_f(E_f) = \mu_g(E_g) = 1 . \tag{12}$$

Da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \Phi_n} r_\alpha(k_\alpha - h_\alpha) = \sum_{\alpha \in A} r_\alpha c_\alpha$$

wegen (10) nirgends konvergiert, müssen E_f und E_g disjunkt sein. Aus (12) folgt nun die Behauptung.

Hieraus folgt insbesondere wieder der Singularitätssatz von Zygmund–Peyrière–Brown–Moran für Riesz-Produkte (Notation siehe (3.5)):

(4.3) SATZ. (Peyrière [13], Brown–Moran [4]). *Seien $\mu_{\Delta,a}$ und $\mu_{\Delta,b}$ zwei Riesz-Produkte über der gleichen dissoziierten Menge Δ. Falls dann gilt*

i) $\qquad \sum_{\chi \in \Delta} |a_\chi - b_\chi|^2 = \infty ,$

so sind $\mu_{\Delta,a}$ und $\mu_{\Delta,b}$ orthogonal.

Von Satz (4.2) gilt keinewegs die Umkehrung, nicht einmal im Falle von Riesz-Produkten über unabhängigen Mengen (siehe [4], Corollary zu Proposition 2). Es gibt aber teilweise Umkehrungen, mit denen wir uns nun befassen.

(4.4) SATZ. *Sei $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein 2-dissoziiertes System in X und seien $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ und $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ zwei Familien in $\mathfrak{C}_1^+(G)$. T_α enthalte die Träger von $\hat{f}_\alpha$ und $\hat{g}_\alpha$. μ_f bzw. μ_g seien die von (f_α) bzw. (g_α) erzeugten verallgemeinerten Riesz-Produkte. Falls dann gilt*

(i) $\qquad \sum_{\alpha \in A} \frac{\|f_\alpha - g_\alpha\|_2^2}{\inf(f_\alpha + g_\alpha)} < \infty ,$

dann sind μ_f und μ_g äquivalent.

Das Netz (f_Φ/g_Φ) konvergiert dann in $\mathfrak{L}_1(\mu_g)$ gegen die Radon–Nikodym-Dichte von μ_f bezüglich μ_g. (In (i) setze man gegebenenfalls $0/0 = 0$.)

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, daß (f_Φ/g_Φ) ein Cauchy-Netz in $\mathfrak{L}_1(\mu_g)$ ist. Sei ϱ_Ψ das Ψ-Restmaß von μ_g und sei $h_\alpha := \frac{1}{2}(f_\alpha + g_\alpha)$. Wegen (2.8) gilt für zwei Mengen Φ, $\Psi \in \mathscr{E}$ mit $\Phi \subseteq \Psi$ und $\alpha \in \Psi \setminus \Phi$

$$\int f_\Psi \, d\varrho_\Psi = \lim_{\Lambda} \int f_\Psi g_{\Lambda \setminus \Psi} \, d\lambda = 1 , \tag{1}$$

und analog

$$\int f_\Phi g_{\Psi \setminus \Phi} \, d\varrho_\Psi = 1 , \tag{2}$$

$$\int f_\Phi h_{\Psi \setminus \Phi} \, d\varrho_\Psi = 1 , \tag{3}$$

$$\int f_\Phi \prod_{\substack{\beta \in \Psi \setminus \Phi \\ \beta \neq \alpha}} h_\beta (f_\alpha - g_\alpha)^2 \, d\varrho_\Psi = \| f_\alpha - g_\alpha \|_2^2 . \tag{4}$$

Wie in [11] erhält man über die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung und wegen (1) und (2), unter Beachtung der Gleichheit $\mu_g = g_\Psi \varrho_\Psi$ (3.6)

$$\begin{aligned} \text{(5)} \quad \left[\int \left| \frac{f_\Phi}{g_\Phi} - \frac{f_\Psi}{g_\Psi} \right| d\mu_g \right]^2 &\leqq \left[\int (\sqrt{f_\Phi g_{\Psi \setminus \Phi}} + \sqrt{f_\Psi}) | \sqrt{f_\Phi g_{\Psi \setminus \Phi}} - \sqrt{f_\Psi} | \, d\varrho_\Psi \right]^2 \\ &\leqq \int (\sqrt{f_\Phi g_{\Psi \setminus \Phi}} + \sqrt{f_\Psi})^2 \, d\varrho_\Psi \int (\sqrt{f_\Phi g_{\Psi \setminus \Phi}} - \sqrt{f_\Psi})^2 \, d\varrho_\Psi \\ &= \left[\int (f_\Phi g_{\Psi \setminus \Phi} + f_\Psi) \, d\varrho_\Psi \right]^2 - \left[2 \int f_\Phi \sqrt{f_{\Psi \setminus \Phi} g_{\Psi \setminus \Phi}}) \, d\varrho_\Psi \right]^2 \\ &= 4 \left(1 - \left[\int f_\Phi \sqrt{f_{\Psi \setminus \Phi} g_{\Psi \setminus \Phi}} \, d\varrho_\Psi \right]^2 \right) . \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} \text{(6)} \quad \sqrt{f_{\Psi \setminus \Phi} g_{\Psi \setminus \Phi}} &= h_{\Psi \setminus \Phi} \prod_{\alpha \in \Psi \setminus \Phi} \sqrt{1 - \frac{(f_\alpha - g_\alpha)^2}{(f_\alpha + g_\alpha)^2}} \\ &\geqq h_{\Psi \setminus \Phi} \prod_{\alpha \in \Psi \setminus \Phi} \left(1 - \frac{(f_\alpha - g_\alpha)^2}{(f_\alpha + g_\alpha)^2} \right) \\ &\geqq h_{\Psi \setminus \Phi} \left[1 - \sum_{\alpha \in \Psi \setminus \Phi} \frac{(f_\alpha - g_\alpha)^2}{(f_\alpha + g_\alpha)^2} \right] \\ &\geqq h_{\Psi \setminus \Phi} - \sum_{\alpha \in \Psi \setminus \Phi} \left(\prod_{\substack{\beta \in \Psi \setminus \Phi \\ \beta \neq \alpha}} h_\beta \right) \frac{(f_\alpha - g_\alpha)^2}{2 \inf (f_\alpha + g_\alpha)} . \end{aligned}$$

Aus (6), (3) und (4) erhält man

(7)

$$\int f_\Phi \sqrt{f_{\Psi\setminus\Phi} g_{\Psi\setminus\Phi}}\, d\varrho_\Psi \geqq \int f_\Phi h_{\Psi\setminus\Phi}\, d\varrho_\Psi$$

$$- \sum_{\alpha\in\Psi\setminus\Phi} \frac{1}{2\inf(f_\alpha+g_\alpha)} \int f_\Phi \Big(\prod_{\substack{\beta\in\Psi\setminus\Phi\\ \beta\neq\alpha}} h_\beta \Big) (f_\alpha-g_\alpha)^2\, d\varrho_\Psi$$

$$= 1 - \sum_{\alpha\in\Psi\setminus\Phi} \frac{\|f_\alpha-g_\alpha\|_2^2}{2\inf(f_\alpha+g_\alpha)},$$

und (5), (7) und (i) liefern die Zwischenbehauptung. Für die Indizes α mit $f_\alpha = g_\alpha$ werden in (6) und (7) die Brüche mit $(f_\alpha - g_\alpha)$ im Zähler als 0 interpretiert, unabhängig von der Größe des Nenners.

Wir müssen noch zeigen, daß $h := \lim_{\Phi\in\mathscr{E}} f_\Phi/g_\Phi$ die Dichte von μ_f bzgl. μ_g ist. Es gilt aber für alle $\chi \in X$

$$(h\mu_g)\hat{}\,(\chi) = \lim_\Phi \int \bar\chi \frac{f_\Phi}{g_\Phi}\, d\mu_g$$

$$= \lim_\Phi \int \bar\chi f_\Phi\, d\varrho_\Phi$$

$$= \begin{cases} \prod_{\alpha\in A} \hat f_\alpha(\chi_\alpha), & \text{falls } (\chi_\alpha) \in \Omega(\chi); \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \mu_f(\chi).$$

Die Äquivalenz von μ_f und μ_g folgt nun aus Symmetriegründen.

Brown–Moran [4] zeigten, daß zwei Riesz-Produkte $\mu_{\Delta,a}$ und $\mu_{\Delta,b}$ äquivalent sind, falls

$$\sum_{\chi\in\Delta} \frac{|a_\chi - b_\chi|^2}{(1-|a_\chi+b_\chi|)^2} < \infty .$$

Das folgende Korollar zu Satz (4.4) ist eine Verschärfung dieses Ergebnisses.

(4.5) Korollar. *Seien $\mu_{\Delta,a}$ und $\mu_{\Delta,b}$ zwei Riesz-Produkte über der gleichen dissoziierten Menge Δ. Falls dann gilt*

(i) $$\sum_{\chi\in\Delta} \frac{|a_\chi - b_\chi|^2}{1-|a_\chi+b_\chi|} < \infty ,$$

dann sind $\mu_{\Delta,a}$ und $\mu_{\Delta,b}$ äquivalent.

(4.6) BEMERKUNG. Seien $\mu_{\Delta,a}$ und $\mu_{\Delta,b}$ zwei Riesz-Produkte, wobei $o(\chi)=3$ und $a_\chi \geqq 0$, $b_\chi \geqq 0$ für alle $\chi \in \Delta$. Dann gilt

$$\inf[(1+2a_\chi \operatorname{Re}\chi)+(1+2b_\chi \operatorname{Re}\chi)] \geqq 2[1+\inf \operatorname{Re}\chi] = 1 .$$

Aus (4.3) und (4.4) folgt dann, daß die beiden Riesz-Produkte genau dann äquivalent sind, wenn (4.3.i) nicht gilt. Andererseits gibt es Fälle (siehe [4], Corollary zu Proposition 2), in denen genau dann Äquivalenz vorliegt, wenn (4.5.i) gilt, andernfalls Orthogonalität. Somit sind (4.3.i) und (4.5.i) die besten Bedingungen, die man unter alleiniger Verwendung der Koeffizienten a_χ und b_χ aufstellen kann.

Der nächste Satz folgt sofort aus (4.2) und (4.4).

(4.7) SATZ. *Sei $(\boldsymbol{T}_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein 2-dissoziiertes System in $\boldsymbol{X}$ und seinen $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ und $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$ zwei Familien in $\mathfrak{C}_1^+(G)$. $\boldsymbol{T}_\alpha$ enthalte die Träger von $\hat{f}_\alpha$ und $\hat{g}_\alpha$. μ_f bzw. μ_g seien die von (f_α) bzw. (g_α) erzeugten verallgemeinerten Riesz-Produkte. Es gelte*

(a) $0 < c \leqq f_\alpha + g_\alpha \leqq C < \infty$ *für alle* $\alpha \in A$.

Dann sind äquivalent:

(i) μ_f und μ_g sind äquivalent,
(ii) μ_f *und* μ_g *sind nicht orthogonal,*
(iii) $\sum_{\alpha\in A} \|f_\alpha - g_\alpha\|_2^2 < \infty$.

In diesem Falle konvergiert das Netz (f_Φ/g_Φ) in $\mathfrak{L}_1(\mu_g)$ gegen die Radon–Nikodym-Dichte von μ_f bzgl. μ_g.

(4.8) BEMERKUNG. Die Bedingung (4.7.a) ist insbesondere dann erfüllt, wenn $g_\alpha = 1$ für alle $\alpha \in A$ gilt und wenn (f_α) gleichmäßig beschränkt ist. In diesem Falle erhält man aber sogar Konvergenz in $\mathfrak{L}_2(\lambda)$; es gilt nämlich

(4.9) PROPOSITON. *Sei $(\boldsymbol{T}_\alpha)_{\alpha\in A}$ 2-dissoziiert und sei $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine gleichmäßig beschränkte Familie in $\mathfrak{C}_1^+(G)$. $\boldsymbol{T}_\alpha$ enthalte den Träger von $\hat{f}_\alpha$ und μ sei das von (f_α) erzeugte verallgemeinerte Riesz-Produkt. Dann sind äquivalent:*

(i) μ *und* λ *sind äquivalent,*
(ii) μ *ist nicht singulär,*
(iii) $\prod_{\alpha\in A} \|f_\alpha\|_2 < \infty \quad (\sum_{\alpha\in A} \|f_\alpha - 1\|_2^2 < \infty)$.

In diesem Fall konvergiert das Netz (f_Φ) in $\mathfrak{L}_2(\lambda)$ gegen die Radon–Nikodym-Dichte von μ bzgl. Diese liegt insbesondere in $\mathfrak{L}_2^+(\lambda)$.

BEWEIS. Wegen (4.7) genügt es zu zeigen, daß (f_Φ) ein Cauchy-Netz in $\mathfrak{L}_2(\lambda)$ ist, falls (iii) gilt. Für $\Phi, \Psi \in \mathscr{E}$ mit $\Phi \subseteq \Psi$ gilt aber wegen der 2-Dissoziiertheit von $(\boldsymbol{T}_\alpha)$

(1) $$\int f_\Phi f_\Psi \, d\lambda = \prod_{\alpha \in \Phi} \|f_\alpha\|_2^2 ,$$

(2) $$\int f_\Phi^2 \, d\lambda = \prod_{\alpha \in \Phi} \|f_\alpha\|_2^2 ,$$

(3) $$\int f_\Psi^2 \, d\lambda = \prod_{\alpha \in \Psi} \|f_\alpha\|_2^2 .$$

Deshalb haben wir

$$\int (f_\Phi - f_\Psi)^2 \, d\lambda = \prod_{\alpha \in \Psi} \|f_\alpha\|_2^2 - \prod_{\alpha \in \Phi} \|f_\alpha\|_2^2 ,$$

woraus wegen (iii) die Konvergenz von (f_Φ) in $\mathfrak{L}_2(\lambda)$ folgt.

Als nächstes soll unter anderem eine Beziehung zwischen unserer Situation und dem Kakutanischen Dichotomiesatz für Produktmaße hergestellt werden. Wir benötigen folgendes

(4.10) Lemma. *Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.*

(a) *Sei $f \in \mathfrak{L}_2(P)$ mit $\|f\|_1 = 1$. Dann gilt*

(i) $$\|f\|_{1/2} \geqq \|f\|_2^{-2} .$$

(b) *Sei $f \in \mathfrak{L}_\infty(P)$ mit $\|f\|_\infty \leqq M$ und $\|f\|_1 = 1$. Dann gibt es eine nur von M abhängige Konstante $\varrho > 0$, so daß gilt*

(ii) $$\|f\|_{1/2} \leqq \|f\|_2^{-\varrho} .$$

Beweis. (i) ergibt sich durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung auf die Funktionen $|f|^{1/3}$ und $|f|^{2/3}$ sowie die Exponenten 3/2 und 3.

Für die Abschätzung (ii) bemerken wir zunächst, daß es eine (nur von M abhängige) Konstante $K > 0$ gibt mit

(1) $$\sqrt{x} \leqq 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) - K(x-1)^2$$

für alle $x \in [0, M]$. Somit gilt

(2) $$\|f\|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \leqq 1 - K(\|f\|_2^2 - 1) .$$

Es ist leicht zu sehen, daß für alle $y > 0$ gilt

(3) $$1 - K(y-1) \leqq y^{-K} .$$

Die Abschätzungen (2) und (3) zusammen liefern das gewünschte Ergebnis mit $\varrho = 4K$.

Der nächste Satz stellt einen Zusammenhang mit den Kakutanischen Orthogonalitätskriterium her. Er folgt sofort aus (4.7) und (4.10).

(4.11) SATZ. *Sei* $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ *ein 2-dissoziiertes System in* X *und seien* $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ *und* $(g_\alpha)_{\alpha\in A}$ *zwei Familien in* $\mathfrak{C}_1^+(G)$. T_α *enthalte die Träger von* $\hat{f}_\alpha$ *und* $\hat{g}_\alpha$. μ_f *bzw.* μ_g *seien die von* (f_α) *bzw.* (g_α) *erzeugten verallgemeinerten Riesz-Produkte. Es gelte*

(a) $f_\alpha + g_\alpha \leqq C < \infty$,

(b) $g_\alpha \geqq c > 0$.

Dann sind äquivalent:

(i) μ_f *und* μ_g *sind äquivalent*,

(ii) μ_f *und* μ_g *sind nicht orthogonal*,

(iii) $\sum_{\alpha\in A} \|f_\alpha - g_\alpha\|_2^2 < \infty$,

(iv) $\prod_{\alpha\in A} \int (f_\alpha/g_\alpha)^2\, d\mu_g < \infty$,

(v) $\prod_{\alpha\in A} \int (f_\alpha/g_\alpha)^{\frac{1}{2}}\, d\mu_g > 0$.

(4.12) Ch. Berg [1] konstruiert Brown'sche Faltungshalbgruppen auf dem unendlich-dimensionalen Torus T^∞. Die Maße der Halbgruppen sind verallgemeinerte Riesz-Produkte. Dabei spielen diejenigen Faltungshalbgruppen eine besondere Rolle, die aus Maßen mit stetigen Dichtefunktionen bestehen. Wir schließen deshalb diesen Abschnitt mit einem Kriterium für die Existenz einer stetigen Dichtefunktion eines verallgemeinerten Riesz-Produkts. Es gilt im 1-dissoziierten Fall.

(4.13) PROPOSITION. *Sei* $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ *1-dissoziiert und sei* $(f)_{\alpha\in A}$ *eine Familie in* $\mathfrak{A}_1^+(G)$. T_α *enthalte den Träger von* $\hat{f}_\alpha$. *Falls dann gilt*

$$\text{(i)} \qquad \prod_{\alpha\in A} \|\hat{f}_\alpha\|_1 < \infty\,,$$

dann konvergiert (f_Φ) *gleichmäßig gegen eine (stetige) Funktion* f. *Somit erzeugt* (f_α) *in diesem Falle genau ein verallgemeinertes Riesz-Produkt* μ, *und* μ *hat die stetige Dichtefunktion* f *bezüglich* λ.

BEWEIS. Für $\Phi \subseteqq \Psi$ gilt wegen (2.3.5), wobei wir $\Psi \setminus \Phi = \{1,\ldots,k\}$ annehmen,

$$\begin{aligned}|f_\Psi - f_\Phi| &= \left| f_\Phi \sum_{l=1}^{k} (f_l - 1) \prod_{j=1}^{l-1} f_j \right| \\ &\leqq \prod_{\alpha\in A} \|\hat{f}_\alpha\|_1 \sum_{l=1}^{k} |f_l - 1| \\ &\leqq \prod_{\alpha\in A} \|\hat{f}_\alpha\|_1 \sum_{l=1}^{k} (\|\hat{f}_l\|_1 - 1)\,.\end{aligned}$$

Aus (i) folgt nun, daß (f_Φ) ein Cauchy-Netz in $\mathfrak{C}(G)$ ist.

5. Stetigkeit.

(5.1) Ein Maß $\nu \in \mathfrak{M}(G)$ heißt bekanntlich *stetig*, wenn kein Punkt in G ν-Masse trägt. Wir geben zunächst ein hinreichendes Kriterium für die Stetigkeit eine verallgemeinerten Riesz-Produktes an. Dieses Kriterium ist scharf genug, um eine Charakterisierung der stetigen Riesz-Produkte zu ermöglichen. Man erhält als Folgerung einen Satz von Brown [2], wonach ein Riesz-Produkt über einer dissoziierten Menge ohne Element der Ordnung 2 immer stetig ist. Am Ende dieses Abschnittes ziehen wir einen Schluß von den eben genannten Ergebnissen auf die Struktur des Raumes der Maße auf einer nicht-diskreten, lokalkompakten, abelschen Gruppe (5.5.c).

Wir benötigen zunächst wieder eine Normabschätzung.

(5.2) LEMMA. *Seien $p \geqq 1$ und $1 \leqq K < 2$ zwei reelle Zahlen. Dann gibt es eine (von p und K abhängige) Konstante $r < 1$, so daß für alle $f \in \mathfrak{A}_1^+(G)$ mit der Eigenschaft*

(i) $$\|\hat{f}\|_p^p \leqq K$$

gilt

(ii) $$\|f\|_2^2 \leqq \|\hat{f}\|_1^r .$$

BEWEIS. Aus der Antitonie von $q \to \|a\|_q$ $(a \in l_1(X))$ folgt

(1) $$\|f\|_2^2 = 1 + \|(f-1)\hat{}\|_2^2 \leqq 1 + \|(f-1)\hat{}\|_1^2 .$$

Andererseits ist leicht zu sehen, daß für $0 \leqq \gamma \leqq \frac{1}{4}$ und $r \geqq \frac{1}{2}$ gilt

$$1 + \gamma^2 \leqq (1+\gamma)^r ,$$

woraus man für $\|\hat{f}\|_1 \leqq \frac{5}{4}$ und $r \geqq \frac{1}{2}$ erhält

(2) $$1 + \|(f-1)\hat{}\|_1^2 \leqq (1 + \|(f-1)\hat{}\|_1)^r = \|\hat{f}\|_1^r .$$

Aus (1) und (2) erhalten wir zunächst für $\|\hat{f}\|_1 \leqq \frac{5}{4}$ und $r \geqq \frac{1}{2}$

(3) $$\|f\|_2^2 \leqq \|\hat{f}\|_1^r .$$

Falls $\|\hat{f}\|_1 \geqq \frac{5}{4}$, verfahren wir anders. Beachtet man wieder die Antitonie von $q \to \|a\|_q$ $(a \in l_1(X))$, so erhält man für alle $q \geqq p$ nach Voraussetzung (i)

(4) $$\|(f-1)\hat{}\|_q \leqq \|(f-1)\hat{}\|_p \leqq (K-1)^{1/p} =: M .$$

Wegen $M < 1$ gibt es einen (nur von K und p abhängigen) Exponenten $q \geqq p$ mit

(5) $$M^q < \tfrac{1}{4} .$$

Die Höldersche Ungleichung, angewandt auf die Folgen $a := ((f-1)\hat{})^{(q+1)/q}$ und $b := ((f-1)\hat{})^{(q-1)/q}$ sowie die Exponenten q und $q/(q-1)$ ergibt

(6) $$\|(f-1)\hat{}\|_2^2 \leqq \|(f-1)\hat{}\|_{q+1}^{(q+1)/q} \|(f-1)\hat{}\|_1^{(q-1)/q},$$

und wegen $\|(f-1)\hat{}\|_\infty \leqq 1$ gilt

(7) $$\|(f-1)\hat{}\|_{q+1}^{q+1} \leqq \|(f-1)\hat{}\|_q^q .$$

Aus (6), (7) und (4) erhalten wir nun

$$\|(f-1)\hat{}\|_2^2 \leqq M\|(f-1)\hat{}\|^{(q-1)/q},$$

d.h.

(8) $$\|f\|_2^2 \leqq 1 + M(\|\hat{f}\|_1 - 1)^{(q-1)/q} .$$

Für den Fall $\|\hat{f}\|_1 \geqq \frac{5}{4}$ genügt es somit zu zeigen, daß es $r < 1$ gibt mit

(9) $$M\gamma^{(q-1)/q} \leqq (1+\gamma)^r - 1$$

für alle $\gamma \geqq \frac{1}{4}$. Es ist klar, daß es $r_1 < 1$ und $\gamma_0 \geqq \frac{1}{4}$ derart gibt, daß (9) für $r \geqq r_1$ und $\gamma \geqq \gamma_0$ gilt. Andererseits gilt

(10) $$\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} (1+\gamma)^r - 1 = \gamma$$

gleichmäßig in $\gamma \in [\frac{1}{4}, \gamma_0]$ und wegen (5) haben wir

(11) $$M\gamma^{(q-1)/q} < \gamma$$

dort. Damit ist (9) gezeigt und wir erhalten zusammen mit (3) die Behauptung (ii).

(5.3) Satz. *Sei G eine unendliche, kompakte, abelsche Gruppe, sei $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ 2-dissoziiert, und sei $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie in $\mathfrak{J}_1^+(G)$. T_α enthalte den Träger von f_α und μ sei das von (f_α) erzeugte verallgemeinerte Riesz-Produkt. Es gebe $p \geqq 1$ und $K < 2$ derart, daß für fast alle $\alpha \in A$ gilt*

(i) $\|\hat{f}_\alpha\|_p^p \leqq K .$

Dann ist μ stetig.

Beweis. Wir dürfen annehmen

(1) $$\prod_{\alpha\in A} \|f'_\alpha\|_\infty = \infty ,$$

da μ sonst wegen Proposition (4.1) eine stetige Dichtefunktion besitzt und damit wegen der Unendlichkeit von G stetig ist. Nach Lemma (5.2) gibt es $r<1$ mit der Eigenschaft

$$\|f'_\alpha\|_2^2 \leqq \|f'_\alpha\|_\infty^r \tag{2}$$

für alle $\alpha \in A$ und wegen (1) gibt es für jedes $\varepsilon>0$ eine Menge $\Phi \in \mathscr{E}$ mit

$$\prod_{\alpha\in\Phi} \|f'_\alpha\|_\infty^{r-1} \leqq \varepsilon\,. \tag{3}$$

Da die Funktion

$$x \to \|f'_\Phi\|_\infty^{-1} f'_\Phi(a-x) \qquad (x \in G) \tag{4}$$

für jedes $a \in G$ positiv ist und den Wert 1 in a hat, ist die Behauptung des Satzes bewiesen, wenn wir zeigen

$$\int \|f'_\Phi\|_\infty^{-1} f'_\Phi(a-x)\,\mu(dx) \leqq \varepsilon\,. \tag{5}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktionen f'_α und der 2-Dissoziiertheit von $(\boldsymbol{T}_\alpha)$ haben wir nach (2.8)

$$\int f'_\Phi(a-x)\,\mu(dx) = \prod_{\alpha\in\Phi} f_\alpha * f'_\alpha(a)\,. \tag{6}$$

Ferner gilt wegen (2.3.4) und (2.3.1) für jedes $\alpha \in A$

$$f_\alpha * f'_\alpha \leqq f'_\alpha * f'_\alpha(0)\,, \tag{7}$$

wegen (2.3.3) und (2) gilt

$$f'_\alpha * f'_\alpha(0) = \|f'_\alpha\|_2^2 \leqq \|f'_\alpha\|_\infty^r\,, \tag{8}$$

und aus (2.3.4) folgt

$$\|f'_\Phi\|_\infty = \prod_{\alpha\in\Phi} \|f'_\alpha\|_\infty\,. \tag{9}$$

Aus (6), (7), (8), (9) und (3) folgt nun (5) und damit die Behauptung des Satzes.

Für Riesz-Produkte über dissoziierten Mengen folgt aus (5.3) sofort

(5.4) SATZ (Brown [2]). *Sei Δ eine dissoziierte Teilmenge von $\boldsymbol{X}$, die höchstens endlich viele Elemente der Ordnung 2 enthält. Dann ist jedes Riesz-Produkt über Δ stetig.*

(5.5) BEMERKUNGEN. (a) Eine vollständige Charakterisierung der unstetigen Riesz-Produkte gibt Hewitt [6].

(b) Satz (5.3) wird ohne die Bedingung (5.3.i) falsch. Brown [1] zeigt, daß ein Riesz-Produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+a_n r_n)$ auf $[0,1[$ (wobei r_n die n-te Rademacher-Funktion ist) genau dann stetig ist, wenn $\prod_{n\in\mathbb{N}}|a_n|=0$ gilt.

(c) Unter Verwendung von (5.4) kann man zeigen, daß der Rieszsche Satz [15] für nichtdiskrete, lokalkompakte, abelsche Gruppen gilt, d.h. auf jeder derartigen Gruppe gibt es ein stetiges Maß $\mu \in \mathfrak{M}_1^+(G)$ mit der Eigenschaft $\hat{\mu} \notin \mathfrak{C}_0(X)$. Man verwendet zum Beweis den Darstellungssatz für lokalkompakte, abelsche Gruppen.

LITERATUR

1. Ch. Berg, *Potential theory on the infinite dimensional torus*, Invent. Math. 32 (1976), 49–100.
2. G. Brown, *Riesz products and generalized characters*, Proc. London Math. Soc. 30 (1975), 209–238.
3. G. Brown and E. Hewitt, *Continuous singular measures equivalent to their convolution squares*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 80 (1976), 249–268.
4. G. Brown and W. Moran, *On orthogonality of Riesz products*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 76 (1974), 173–181.
5. G. H. Hardy and W. W. Rogosinski, *Fourier series* Cambridge University Press, Cambridge, 1968.
6. E. Hewitt, *Bemerkungen über singuläre Maße*, Uspehi Mat. Nauk 31 (1976), 167–176.
7. E. Hewitt and G. Ritter, *On the integrability of Fourier transforms on groups*, Part II:*Fourier Stieltjes transforms of singular measures*, Proc. Royal Irish Acad. 77, Sect. A (1976), 265–287.
8. E. Hewitt and G. Ritter, *The Orlicz–Paley–Sidon phenomenon for singular measures*, Istituto Nazionale di Alta Matematica, Symposia Mathematica XXII (1977), 21–31.
9. E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis* I, II (Grundlehren Math. Wissensch. 115, 152) Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg 1963, 1970.
10. E. Hewitt and H. S. Zuckerman,*Singular measures with absolutely continuous convolution squares*, Math. Proc. Cambr. Philos. Soc. 62 (1966), 399–420. Corrigendum, ibid. 63 (1967), 367–368.
11. S. Kakutani, *On equivalence of infinite product measures*, Ann. of Math. 49 (1948), 214–224.
12. Y. Katznelson, *Harmonic Analysis*, Wiley and Sons, New York - London - Sydney - Toronto, 1968.
13. J. Peyrière, *Sur les produits de Riesz*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 276 (1973), 1417–1419.
14. J. Peyrière, *Etude de quelques propriétés des produits de Riesz*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 25 (1975), 127–169.
15. F. Riesz, *Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktionen von beschränkter Schwankung*, Math. Z. 2 (1918), 312–315.
16. W. F. Stout, *Almost Sure Convergence*, Academic Press, New York - San Francisco - London, 1974.
17. A. Zygmund, *On lacunary trigonometric series*, Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), 435–446.

MATHEMATISCHES INSITUT DER UNIVERSITÄT
BISMARCKSTRASSE 1 1/2
D-8520 ERLANGEN
BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND