MATH. SCAND. 43 (1978), 63–73

ÜBER DIE FORTSETZUNG ANALYTISCHER FUNKTIONEN

HENRIK L. SELBERG

1.

Durch analytische Fortsetzung von

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

sei eine analytische Funktion f definiert. Nach Ausschluss der Windungspunkte und der Pole bleibt von der Riemannschen Fläche von f eine Teilfläche Ω_f übrig, auf welcher f eindeutig und regulär erscheint.

Durch analytische Fortsetzung von

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \tag{2}$$

sei ferner eine analytische Funktion G gegeben. Aus f und G bilden wir die Transformierte

$$U(f,G) = c + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n z^n . \tag{3}$$

Hier ist c eine beliebig gewählte Konstante. Die rechte Seite von (3) ist bis auf eine additive Konstante identisch mit der aus (1) und (2) gebildeten Hadamardschen Multiplikationsreihe.

Wir wollen fortan annehmen, dass G eine Funktion

$$G = Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{(1-z)^k} \tag{4}$$

ist, wobei die rechte Seite für alle $z \neq 1$ konvergent sein soll und nicht alle Q_k ($k \geqq 1$) verschwinden mögen. Wir finden

$$G = Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n$$

und somit nach einer einfachen Umformung

Eingegangen am 15. November, 1978.

$$U = U(f, G) = c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (f(z) z^{k-1}) . \tag{5}$$

Man sieht an Hand dieser Formel leicht ein, dass die Transformierte $U(f, G)$ auf Ω_f eindeutig und regulär bleibt.

2.

Es sei f nun allgemeiner eine beliebige analytische Funktion und somit nicht notwendigerweise mit einem in $z=0$ regulären Zweig versehen. Wie früher lassen wir Ω_f die Riemannsche Fläche von f nach Ausschluss der Windungspunkte und der Pole bezeichnen. Für eine solche Funktion können wir die Transformierte $U(f, G)$ miitels der Formel (5) definieren. Wiederum findet man, dass die Transformierte $U(f, G)$ für jede durch (4) definierte Funktion G auf Ω_f eindeutig und regulär bleibt.

Es sei D ein schlichtes (in Bezug auf der komplexen Ebene) beschränktes Gebiet, das zusammen mit seinem Rand ∂D eine kompakte Teilmenge von Ω_f bildet. Ist $z \in D$ und ist ∂D ein einfacher geschlossener Integrations-weg Γ, so kann die rechte Seite von (5) geschrieben werden

$$c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\zeta^{k-1}}{(\zeta - z)^k} d\zeta .$$

Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k \zeta^{k-1}}{(\zeta - z)^k}$$

ist gleichmässig konvergent auf Γ. Es folgt daher

$$\begin{aligned} U(z) &= c + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \left(\frac{\zeta}{\zeta - z}\right)^k \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= c - \frac{Q_0}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) G\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} . \end{aligned}$$

Verschwinden c und Q_0, was wir ohne Verzicht der Allgemeinheit annehmen dürfen, so reduziert sich diese Formel auf

$$U(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\zeta) G\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} . \tag{6}$$

Die rechte Seite ist der Form nach derselbe Ausdruck, von welchem Hadamard [3] bei der Herleitung seines Multiplikationssatzes ausgegangen ist.

Es sei $0 \notin D \cup \partial D$. Schreiben wir

$$f(z) = f_1\left(\frac{1}{z}\right), \qquad G(z) = G_1\left(\frac{1}{z}\right)$$

und lassen wir Γ_1 die aus Γ durch die Transformation $\eta = 1/\zeta$ hervorgegangene Kurve bedeuten, so erhalten wir aus (6)

$$\begin{aligned} U(f,G)_z &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)G\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f_1(\eta)G_1\left(\frac{1/z}{\eta}\right)\frac{d\eta}{\eta}. \end{aligned}$$

Es folgt

(7) $$U(f,G)_z = -U(f_1,G_1)_w, \qquad w = 1/z .$$

3.

Die Gleichung (5) kann als Sonderfall einer allgemeineren Formel erfasst werden, welche die Transformierte $U(f,H)$ definiert, wenn H von der Form

$$H = P_m + G \qquad \text{oder} \qquad H = P_m$$

ist, von P_m ein Polynom vom Grade m ist. Damit wir mit der Formel (3) im Einklang bleiben, kommen wir überein

$$U(f,P_m) = p_m$$

$$U(f,P_m+G) = p_m + U(f,G)$$

zu setzen, wobei p_m ein beliebiges Polynom vom Grade $\leqq m$ bedeutet.

Die Formel (5) gibt

$$\begin{aligned} zU(f,G) &= cz + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k z}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(f(z)z^{k-1}) \\ &= cz + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(f(z)z^{k}) \\ &\quad - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{Q_k}{(k-2)!}\frac{d^{k-2}}{dz^{k-2}}(f(z)z^{k-1}) . \end{aligned}$$

Da

$$zG = G - Q_0(1-z) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{(1-z)^{k-1}}$$

so folgt hieraus

$$zU(f,G) = U(zf, zG) + p_1^*$$

wobei p_m^* ein Polynom vom Grade $\leqq m$ bedeutet. Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung findet man für ganzzahlige $m \geqq 1$

$$z^m U(f, G) = U(z^m f, z^m G) + p_m^* . \tag{8}$$

4.

Nach einem bekannten Satz von Wigert [5] ist die durch (2) gegebene analytische Funktion dann und nur dann von der Gattung (4), wenn

$$q_n = \varphi(n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

wo φ eine ganze Funktion vom höchstens minimalen Typus der Ordnung 1 ist. Erfüllt G diese Bedingung, so ist Ω_f nach dem oben gefundenen eine Überlagerungsfläche von Ω_U und möglicherweise eine Teilfläche von Ω_U. Es kann eintreffen, dass Ω_f nicht die ganze Fläche Ω_U überdeckt. Wählt man z.B.

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{2^\nu}\right) z^n$$

so findet man

$$U(f, G) = z \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 - 2^{-\nu}) + c$$

Ω_U ist in diesem Falle die komplexe Ebene (∞ ausgeschlossen), während Ω_f mit der Kreisfläche $|z| < 1$ zusammenfällt.

Die hier angeschnittene Frage wird, wenn auch unvollständig, beantwortet durch den

Satz 1. *Es sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet der komplexen Vollebene, E eine kompakte Teilmenge von D und $D \setminus E$ ein zweifach zusammenhängendes Gebiet. Es sei ferner ein Zweig $\hat{f}$ einer analytischen Funktion f eindeutig und regulär in $D \setminus E$ mit mindestens einem singulären Punkt in E bei analytischer Fortsetzung innerhalb D. Ist G gegeben durch* (4), *und ist der zu $\hat{f}$ gehörende Zweig von $U(f, G)$ analytisch fortsetzbar überall in D, so gilt folgendes*:

Ist $\infty \notin E$, so ist $0 \in E$ und $\hat{f}$ hat bei analytischer Fortsetzung in D entweder den einzigen singulären Punkt $z = 0$, oder aber es existiert in D ein Kreis $|z| = \varrho$, so dass $\hat{f}$ in $D \setminus \{z \mid |z| \leqq \varrho\}$ überall analytisch fortsetzbar ist jedoch über $|z| = \varrho$ nicht fortgesetzt werden kann.

Ist $0 \notin E$, so ist $\infty \in E$ und $\hat{f}$ hat bei analytischer Fortsetzung in D entweder *den einzigen singulären Punkt* $z=\infty$, *oder aber es existiert in* D *ein Kreis* $|z|=\varrho$, *so dass* $\hat{f}$ *in* $D\setminus\{z \mid |z|\geqq\varrho\}$ *überall analytisch fortsetzbar ist jedoch über* $|z|=\varrho$ *hinaus nicht fortgesetzt werden kann.*

Der Beweis macht Gebrauch von dem

HILFSSATZ. *Bezeichnen* $m_1<m_2<\ldots$ *diejenigen ganzzahligen* $m\geqq 0$, *für welche das Residuum von* z^mG *in* $z=1$ *nicht verschwindet, so ist*

(9)
$$\lim_{k\to\infty}\frac{m_k}{k} = 1\,.$$

BEWEIS. Schreiben wir

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{-k} \qquad (|z|>1)$$

$$z^mG = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_k^{(m)}}{(z-1)^k} \quad (0<|z-1|<\infty)$$

so gilt, wie man mit Hilfe der Residuumrechnung leicht bestätigt,

$$\beta_1^{(m)} = \alpha_{m+1}\,.$$

Nach dem Wigertschen Satz ist

$$\alpha_m = \varphi(m) \qquad (m=1,2,\ldots)$$

wo φ eine ganze Funktion vom höchstens minimalen Typus der Ordnung 1 ist. Bezeichnet $n(r)$ die Anzahl der Nullstellen von φ im Kreise $|z|\leqq r$, so ist

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r} = 0$$

und dies beweist die Behauptung.

Wir kommen jetzt zum Beweis von Satz 1. Da die Transformation $w=1/z$, wie die Gleichung (7) erkennen lässt, nur das Vorzeichen der Transformierte $U(f,G)$ ändert, dürfen wir uns auf den Fall $\infty\notin E$ beschränken. Es sei also im folgenden angenommen, dass $\infty\notin E$, und dass $U(f,G)_{f=\hat{f}}$ in D eindeutig und regulär ist.

Wir schreiben

(10)
$$\hat{f} = \sigma+\theta$$

wo σ eindeutig und regulär in D ist, während θ sich ausserhalb E eindeutig und regulär verhält und in $z=\infty$ verschwindet. In der Umgebung von ∞ hat θ eine

Entwicklung

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{z^n}. \tag{11}$$

Indem Γ einen einfachen geschlossenen Integrationsweg in D bezeichnet, der E aber nicht den Punkt ∞ in seinem Inneren enthält, finden wir unter Anwendung von (8) $(m=0,1,2,\ldots)$

$$I_m = \int_\Gamma U(z^m f, z^m G)_{f=\hat{f}}\,dz = \int_\Gamma z^m U(f, G)_{f=\hat{f}}\,dz = 0. \tag{12}$$

Wir schreiben

$$z^m G = p_m + G_m$$

wo p_m ein Polynom vom Grade $\leqq m$ ist, während G_m für $z \neq 1$ in der Form

$$G_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k^{(m)}}{(1-z)^k}$$

dargestellt werden kann. Unter Anwendung von (5) erhalten wir aus (12)

$$I_m = Q_1^{(m)} \int_\Gamma z^m \hat{f}(z)\,dz$$

und folglich wegen (10) und (11)

$$I_m = 2\pi i \gamma_{m+1} Q_1^{(m)} = 0 \qquad (m=0,1,2,\ldots).$$

Nun ist $Q_1^{(m)}$ das Residuum von $-z^m G$ in $z=1$. Lassen wir $\mu_1 < \mu_2 < \ldots$ diejenige m bezeichnen, für welche γ_{m+1} verschwindet, so folgt wegen (9)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu_k}{k} = 1.$$

Mit Hilfe des Fabryschen Lückensatzes [2] schliessen wir hieraus, dass die Reihe (11), wenn sie nicht aus endlich vielen Gliedern besteht, einen Konvergenzkreis $|z| = \varrho$ $(\varrho \geqq 0)$ hat, worüber die Reihe nicht analytisch fortgesetzt werden kann. Dies beweist die Richtigkeit von Satz 1.

5.

In nahem Zusammenhang mit Satz 1 steht

Satz 2. *Ist der Konvergenzradius R von*

$$U(f, G) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n z^n$$

grösser als der Konvergenzradius R_f von

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{13}$$

und zugleich

$$q_n = \varphi(n) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

wo φ eine ganze Funktion der Ordnung $\lambda<1$ ist, so hat f den Kreis $|z|=R_f$ als natürliche Grenze.

Beweis. Isolieren wir die Nullstellen $z_1, z_2, \ldots$ von φ durch Kreise

$$K_\nu: \quad |z-z_\nu| = 1$$

so gilt, wie die klassische Theorie der ganzen Funktionen lehrt (Borel [1])

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\log|\log|\varphi(z)||}{\log|z|} \leqq \lambda$$

wieso z ausserhalb der Kreise K_ν $(\nu=1,2,\ldots)$ gegen ∞ strebt. Lassen wir $\mu_1<\mu_2<\ldots$ diejenigen ganzen Zahlen $n>0$ bezeichnen, die ausserhalb der Kreise K_ν $(\nu=1,2,\ldots)$ liegen, so folgt

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |a_{\mu_k}|^{1/\mu_k} \leqq \frac{1}{R}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu_k}{k} = 1\,.$$

Für die übrigen mit $\nu_1<\nu_2<\ldots$ zu bezeichnenden $n>0$ gelten

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |a_{\nu_k}|^{1/\nu_k} = \frac{1}{R_f}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\nu_k}{k} = \infty\,.$$

Die Potenzreihe (13) kann geschrieben werden

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\mu_k} z^{\mu_k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu_k} z^{\nu_k}\,.$$

Der Konvergenzradius der ersten Reihe ist $\geqq R$. Die zweite Reihe hat den Konvergenzradius R_f und ist nach dem Fabryschen Lückensatz nicht über den Kreis $|z|=R_f$ hinaus analytisch fortsetzbar. Der Satz ist hiermit bewiesen.

6.

Es sei

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \tag{14}$$

eine nicht identisch verschwindende Potenzreihe mit Konvergenzradius >0, deren Koeffizienten durch

$$c_n = \frac{\psi(n)}{\varphi(n)} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

dargestellt werden können, wobei φ und ψ ganze Funktionen von höchstens minimalen Typus der Ordnung 1 sind und φ keine ganzzahlige Nullstellen $\geqq 1$ hat.

SATZ 3. *Ist die durch analytische Fortsetzung von* (14) *erhaltene analytische Funktion h eindeutig und regulär in einem schlichten Gebiet D der komplexen Vollebene und über D hinaus nicht analytisch fortsetzbar, so ist D ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das den Punkt $z=1$ nicht enthält.*

BEWEIS. Indem wir von dem Satz von Wigert Gebrauch machen, setzen wir

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) z^n .$$

Die Funktion

$$U(h,G) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) z^n$$

ist nach Ausschluss des Punktes $z=1$ eindeutig und regulär in der komplexen Vollebene. $z=1$ ist singulärer Punkt von $U(h,G)$ und daher auch von h. Es ist somit $1 \notin D$.

Wäre D mehr als zweifach zusammenhängend, so würde man die Komplementärmenge E von D (betrachtet auf der Riemannschen Kugelfläche) durch eine endliche Anzahl $N \geqq 3$ von Polygonen $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_N$ in D einschliessen können, und zwar so dass jedes Γ_ν $(\nu = 1,2,\ldots,N)$ in seinem Inneren eine nicht leere Teilmenge E_ν von E, in seinem Äusseren die übrigen Γ_μ sowie die dazu gehörenden E_μ $(\mu \neq \nu)$ enthielte. Es würde folglich ein Γ_ν geben, das in seinem Inneren E_ν jedoch weder $z=1$ noch $z=\infty$ enthielte, was mit dem in Satz 1 bewiesenen offenbar im Widerspruch stehen würde. D ist folglich einfach oder zweifach zusammenhängend.

Es sei jetzt angenommen, dass D zweifach zusammenhängend ist. Die Komplementärmenge E von D zerfällt dann in zwei kompakte Mengen E_1' und

E'_2. Ist $1 \in E'_1$, so folgt unter Anwendung von Satz 1, dass $\infty \in E'_2$, und dass E'_2 ferner eine Menge

$$E'_2 = \{z \mid |z| \geqq \varrho\} \qquad (0 < \varrho \leqq \infty)$$

ist. Da E'_1 und E'_2 punktfremd sind, muss $\varrho > 1$ sein. Es gibt daher in $]1, \varrho[$ ein ϱ', so dass h im Kreisring $\varrho' < |z| < \varrho$ durch eine Entwicklung

$$h = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n z^{-n} \tag{15}$$

darstellbar ist. Für $U(h, G)$ finden wir

$$U(h, G) = c - \sum_{n=1}^{\infty} \psi(-n) z^{-n} \tag{16}$$

wo c eine Konstante ist. Anderseits erhalten wir aus (15)

$$U(h, G) = c' + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi(n) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varphi(-n) z^{-n} \tag{17}$$

wo c' eine Konstante ist, und diese Gleichung ist gültig für $\varrho' < |z| < \varrho$. Aus (16) und (17) folgt

$$\alpha_n \varphi(n) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und somit

$$\alpha_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

h muss hiernach im Widerspruch mit der Annahme regulär in $|z| > \varrho'$ sein. Der Beweis ist hiermit vollständig.

Satz 4. *Es sei φ eine ganze Funktion von Ordnung < 1 und $\varphi(n) \neq 0$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$). Sind im übrigen die Bedingungen von Satz* 3 *erfüllt, so ist $\infty \notin D$, ausser wenn ψ/φ eine ganze Funktion ist.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $\infty \in D$. Die Formeln (16) und (17) lassen erkennen, dass h in der Umgebung von $z = \infty$ durch eine Entwicklung

$$h = \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(-n)}{\varphi(-n)} z^{-n} \tag{18}$$

dargestellt werden kann. Mit Hilfe von Satz 2 schliesst man hieraus, dass der Rand von D einen Bogen

$$E = \{z \mid |z| = 1,\ \xi_1 \leqq \arg z \leqq \xi_2\}$$

des Einheitskreises bildet, wobei

$$-\pi < \xi_1 \leqq 0 \leqq \xi_2 < \pi .$$

Indem δ so bestimmt ist, dass

$$0 < \delta < 1, \quad \delta < \pi+\xi_1, \quad \delta < \pi-\xi_2$$

lassem wir Γ_δ den Integrationsweg bedeuten

$$\Gamma_\delta \begin{cases} z = (1-\delta)e^{it}, & \xi_1-\delta \leqq t \leqq \xi_2+\delta \\ z = te^{i(\xi_2+\delta)}, & 1-\delta \leqq t \leqq 1+\delta \\ z = (1+\delta)e^{-it}, & -\xi_2-\delta \leqq t \leqq -\xi_1+\delta \\ z = -te^{i(\xi_1-\delta)}, & -(1+\delta) \leqq t \leqq -(1-\delta) . \end{cases}$$

Wir finden $(n=1,2,\ldots)$

$$c_n = \frac{\psi(n)}{\varphi(n)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} \frac{h(\zeta)}{\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

und somit

$$\frac{\psi(n)}{\varphi(n)} = \Phi(n) \qquad (n=1,2,\ldots)$$

wo Φ die ganze Funktion

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} \frac{h(\zeta)}{e^{z\log\zeta}}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

ist. Der Logarithmus ist hier als Hauptwert des Logarithmus zu verstehen. In entsprechender Weise erhalten wir aus (18)

$$\frac{\psi(-n)}{\varphi(-n)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta} h(\zeta)\zeta^n\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

und somit

$$\frac{\psi(-n)}{\varphi(-n)} = \Phi(-n) \qquad (n=1,2,\ldots) .$$

Schreiben wir $z=x+iy$, so ist

$$|\Phi((z)| < \begin{cases} Me^{y(\xi_2+\delta)+|x|\,|\log(1-\delta)|} & (y\geqq 0) \\ Me^{-y(-\xi_1+\delta)+|x|\,|\log(1-\delta)|} & (y\leqq 0) \end{cases}$$

wo M eine Konstante ist. Für die Grösse

$$m(r,\Phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |\Phi(re^{i\theta})|\, d\theta$$

erhalten wir daher die Abschätzung

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(r, \Phi)}{r} \leqq \frac{-\xi_1+\xi_2}{\pi}.$$

Für die charakteristische Funktion $T(r)$ (*R. Nevanlinna* [4]) von $\Phi-\psi/\varphi$ finden wir somit

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r)}{r} \leqq \frac{-\xi_1+\xi_2}{\pi} < 2.$$

Da $\Phi-\psi/\varphi$ anderseits für alle $z=\pm 1, \pm 2, \ldots$ verschwindet, so folgt die Identität

$$\Phi \equiv \frac{\psi}{\varphi}$$

d.h. ψ/φ ist eine ganze Funktion. Der Satz ist hiermit bewiesen.

LITERATURVERZEICHNIS

1. E. Borel, *Sur les zéros des fonctions entières*, Acta Math. 20 (1896), 357–396.
2. E. Fabry, *Sur les points singuliers d'une fonction donnee par son developpement de Taylor*, Ann Sci. École Norm. Sup., (3) 13 (1896), 367–399.
3. J. Hadamard, *Théorème sur les series entières*, Acta Math. 22 (1899), 55–64.
4. R. Nevanlina, *Zur Theorie der mermorphen Funktionen*, Acta Math. 46 (1925), 1–99.
5. S. Wigert, *Sur les fonctions entières*, Öfversikt af Kungliga Vetenskaps Akademis Förhandlinger 57 (1900), 1001–1011.

STORA GRÅMUNKEGRÄND 1
11127 STOCKHOLM
SCHWEDEN