

QUASI-SEPARABLE UND KOSEPARABLE MODULN ÜBER DISKRETEN BEWERTUNGSRINGEN

HELMUT ZÖSCHINGER

Einleitung.

Beim Studium des sogenannten Whitehead-Problems führte Griffith in [3] den Begriff des *koseparablen* Moduls ein, indem er für jeden Untermodul U von M , mit M/U endlich erzeugt, die Existenz eines $U' \subset U$ verlangte, so daß M/U' immer noch endlich erzeugt ist, aber zusätzlich U' direkter Summand in M ist. Dual nennen wir M *separabel*, wenn es zu jedem endlich erzeugten Untermodul U von M einen Zwischenmodul $U \subset U_1 \subset M$ gibt, so daß U_1 endlich erzeugt und direkter Summand in M ist. Für abelsche Gruppen ist dieser Begriff wohlbekannt, wird aber oft nur auf spezielle M , z.B. p -Gruppen oder \aleph_1 -freie Gruppen, angewandt (siehe [2, § 65 und § 87], [5, p.102]). Wir wollen ihn für beliebige Moduln gebrauchen, allerdings in dieser Arbeit stets über einem diskreten Bewertungsring R , zusammen mit der folgenden Verallgemeinerung: M heiße *quasi-separabel*, wenn jeder endlich erzeugte reine Untermodul in M abspaltet.

Es zeigt sich nun, daß über einem diskreten Bewertungsring sich diese Moduln auf verschiedene Weisen mit Hilfe des Komplementbegriffs kennzeichnen lassen. Wir sagen, V sei ein *Komplement* von U in M , wenn $V + U = M$ ist und wenn V bezüglich dieser Eigenschaft minimal ist. Gibt es sogar zu jedem $X + U = M$ ein solches V , mit $V \subset X$, so sagen wir U habe *genügend viele* Komplemente in M . Mit diesen Definitionen lautet unsere erste Kennzeichnung:

Ist der Torsionsuntermodul $T(M)$ teilbar, so gilt

- A1) Genau dann ist M quasi-separabel, wenn jeder endlich erzeugte Untermodul von M ein Komplement in M hat.
- A2) Genau dann ist M koseparabel, wenn jeder endlich erzeugte Untermodul von M genügend viele Komplemente in M hat.

Um uns von der Bedingung » $T(M)$ teilbar« zu lösen, benützen wir den Begriff des starken Komplementes: Ein Komplement V von U in M heißt *stark* [9],

Eingegangen am 28. Februar, 1978.

wenn $V \cap U$ direkter Summand in U ist. Damit zeigen wir für einen beliebigen Modul M :

- B1) Genau dann ist M quasi-separabel, wenn M in jeder Erweiterung N , mit N/M einfach, ein starkes Komplement hat.
 B2) Genau dann ist M koseparabel, wenn jeder maximale Untermodul von M ein starkes Komplement in M hat.

In den ersten beiden Abschnitten der Arbeit werden diese Charakterisierungen durchgeführt. Im dritten Teil wird für beliebiges M die Existenz von Komplementen für die endlich erzeugten Untermoduln untersucht. Es zeigt sich, daß jeder direkte Summand der Form $R/(p^n)$, $n \geq 1$, als »Komplement-erzeugender« Faktor wirkt (siehe 3.1), und daraus folgt: Ist p -Rang $(T(M)) \geq \aleph_0$, so hat jeder endlich erzeugte Untermodul von M genügend viele Komplemente in M ; ist aber p -Rang $(T(M)) < \aleph_0$, so gelten die oben unter A1 und A2 angegebenen Bedingungen.

0. Definitionen und Grundtatsachen.

Der Grundring R , über dem die Moduln betrachtet werden, ist stets ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal (p) und Quotientenkörper $K \neq R$. Für die Grundlagen über R -Moduln siehe [6], für die im folgenden zitierten Tatsachen über radikal-komplementierte Moduln siehe [10, Abschnitt 3].

$D(M)$ ist der divisible Anteil von M , d.h. der größte teilbare Untermodul von M . Der Ulm-Untermodul von M ist

$$H(M) = \bigcap_{n=1}^{\infty} Mp^n,$$

das Radikal von M ist $\text{Ra}(M) = Mp$, und der p -Rang von M ist die Dimension des $R/(p)$ -Vektorraumes $M/\text{Ra}(M)$.

M heißt *koatomar*, wenn jeder teilbare Faktormodul von M gleich Null ist. Das ist äquivalent damit, daß $T(M)$ beschränkt und $M/T(M)$ endlich erzeugt und frei ist.

Ist $V+U=M$, so ist V genau dann ein Komplement von U in M , wenn $V \cap U$ klein in V ist, d.h. koatomar ist und enthalten in $\text{Ra}(V)$. Ist $V \cap U$ nur klein in M , so sagen wir V sei ein *schwaches Komplement* von U in M (siehe [11, Abschnitt 6]). Jeder koatomare Untermodul U von M hat genügend viele schwache Komplemente in M , und falls R vollständig ist, sogar genügend viele Komplemente.

M heißt *reinerfallend*, wenn jeder reine Untermodul von M bereits direkter Summand ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der reduzierte Anteil $M/D(M)$ koatomar ist.

M heißt *radikal-komplementiert*, wenn $\text{Ra}(M)$ ein Komplement in M hat. Das ist äquivalent damit, daß »der« Basis-Untermolul von M koatomar ist, oder auch damit, daß $T(M)/D(T(M))$ beschränkt und p -Rang $(M/T(M)) < \aleph_0$ ist. Ist $U \subset \text{Ra}(M)$ und hat U ein schwaches Komplement in M , so hat U bereits ein Komplement in M , und das gilt genau dann, wenn U selbst radikal-komplementiert ist.

1. Quasi-separable Moduln.

Die ersten beiden Lemmata geben einfache, vom Komplementbegriff im wesentlichen unabhängige Kennzeichnungen von Separabilität und Quasi-Separabilität. Wie Punkt (iii) der nachfolgenden Äquivalenzen zeigt, läßt sich die Separabilität von M als Verallgemeinerung der Eigenschaft » $\text{Ra}(M)$ ist klein in M « auffassen.

LEMMA 1.1. Für einen Modul M sind äquivalent:

- (i) M ist separabel
- (ii) Zu jedem $x \in M$ gibt es ein $\alpha \in \text{End}(M)$ mit $\alpha(x) = x$ und $\text{Bi } \alpha$ endlich erzeugt
- (iii) Zu jedem $x \in \text{Ra}(M)$ gibt es ein $\alpha \in \text{End}(M)$ mit $\alpha(x) = x$ und $\alpha(\text{Ra}(M))$ klein in M
- (iv) $H(T(M)) = 0$, und $M/T(M)$ ist bis auf Isomorphie reiner Untermodul von R^I .

BEWEIS. Klar ist (i \rightarrow ii \rightarrow iii).

Bei (iii \rightarrow iv) ist sogar $H(M) = 0$, denn zu $x \in H(M)$ wähle man α wie angegeben, und weil $\alpha(\text{Ra}(M)) = \text{Ra}(\text{Bi } \alpha)$ koatomar ist, ist es auch $\text{Bi } \alpha$, insbesondere $H(\text{Bi } \alpha) = 0$, $\alpha(x) = 0$, $x = 0$. Für jeden vollinvarianten Untermodul M_0 von M gilt, daß M/M_0 wieder die Bedingung (iii) erfüllt, so daß wir gleich M torsionsfrei annehmen können. Dann ist aber mit der Menge $I = \text{Hom}_R(M, R)$ die kanonische Abbildung $\varphi: M \rightarrow R^I$ ein reiner Monomorphismus, denn zu $0 \neq x \in M$ und $r \in R$ gibt es nach Voraussetzung ein $\alpha \in \text{End}(M)$ mit $\alpha(xp) = xp$ und $\text{Bi } \alpha$ koatomar, d.h. $\alpha(x) = x$ mit einem Isomorphismus $\omega: \text{Bi } \alpha \rightarrow R^n$ ($n \geq 1$): Ist nun $\varphi(x) \in (R^I)r$, d.h. $i(x) \in Rr$ für alle $i \in I$, so folgt insbesondere $\pi_v \omega \alpha'(x) \in Rr$ für alle $1 \leq v \leq n$, $\alpha'(x) \in (\text{Bi } \alpha)r$, $x \in Mr$ wie gewünscht.

(iv \rightarrow i) Aus den Voraussetzungen folgt, daß $T(M)$ und $M/T(M)$ separabel sind (siehe [2, Proposition 65.1] und [8, Theorem 5.2]). Bleibt zu zeigen, daß es auch M ist: Zu einem endlich erzeugten Untermodul U von M hat man

$$(U + T(M))/T(M) \subset A/T(M) \subset M/T(M)$$

mit $A = T(M) \oplus A'$ und A' endlich erzeugt und frei, sowie $A/T(M)$ direkter Summand in $M/T(M)$, also auch A' direkter Summand in M . Weil $U_1 = U + A'$ immer noch endlich erzeugt und $A/A' \cong T(M)$ separabel ist, folgt $U_1/A' \subset U_2/A' \subset A/A'$ mit U_2 endlich erzeugter direkter Summand in A . Als beschränkter Modul ist U_2/A' nicht nur rein, sondern sogar direkter Summand in M/A' , also auch U_2 in M .

BEMERKUNG 1. Ist M separabel, so ist jeder radikal-komplementierte Untermodul U von M bereits koatomar. Zum Beweis kann man (weil $T(U)$ beschränkt und $M/T(M)$ wieder separabel ist) gleich M torsionsfrei annehmen und U sogar rein in M : Für einen Basis-Untermodul S von U gilt dann, daß S endlich erzeugt ist, also nach Voraussetzung direkter Summand in M , also $S = U$. Daraus folgt sofort, daß in einem separablen Modul M jeder Untermodul des Radikals, der ein Komplement in M hat, bereits klein in M ist. Diese Eigenschaft wurde in [10, Satz 4.1] für Σ -selbstprojektive Moduln über einem beliebigen Ring nachgewiesen.

BEMERKUNG 2. Ist M torsionsfrei und separabel, U_* die reine Hülle von U in M (d.h. $U_*/U = T(M/U)$), so gilt: Genau dann hat U ein Komplement in M , wenn U_*/U endlich erzeugt und U_* direkter Summand in M ist. Wir wollen nur die Richtung beweisen, in der die Separabilität benutzt wird: Ist V ein Komplement von U in M , so ist $V \cap U_*$ von endlichem Rang und rein in M , also bereits endlich erzeugt und direkter Summand. Damit ist U_*/U als Faktor von $V \cap U_*$ endlich erzeugt, und aus $X \oplus (V \cap U_*) = M$ folgt $(X \cap V) \oplus U_* = M$.

Weil jeder endlich erzeugte Modul reinzerfallend ist, ist unsere Definition von »quasi-separabel« wirklich eine Verallgemeinerung des Begriffes »separabel«. Das folgende Lemma zeigt, wie man sich auf die alte Definition zurückziehen kann. Mit $\Delta(M)$ bezeichnen wir den größten Untermodul von M , dessen torsionsfreier Anteil teilbar ist, also $\Delta(M)/T(M) = D(M/T(M))$.

LEMMA 1.2. *Für einen Modul M sind äquivalent:*

- (i) M ist quasi-separabel
- (ii) Jeder zyklische reine Untermodul von M ist direkter Summand
- (iii) Jeder radikal-komplementierte reine Untermodul von M ist bereits reinzerfallend und direkter Summand
- (iv) $M/\Delta(M)$ ist separabel.

BEWEIS. (i \rightarrow iv) Wir zeigen den zweiten Punkt in (1.1): Zu $0 \neq \bar{x} \in M/\Delta(M)$ sei $U/\Delta(M)$ die reine Hülle von $\bar{x}R$ in $M/\Delta(M)$, und mit $U = \Delta(M) \oplus U'$, $U' \cong R$, folgt nach Voraussetzung, daß U' nicht nur rein, sondern direkter Summand in M ist, also auch $U/\Delta(M)$ in $M/\Delta(M)$.

(iv \rightarrow iii) Sei U radikal-komplementierter, reiner Untermodul von M . Nach der ersten Bemerkung zu (1.1) ist $(U + \Delta(M))/\Delta(M)$ nicht nur radikal-komplementiert, sondern sogar endlich erzeugt. Mit $U/\Delta(U)$ ist daher auch U reinzerfallend, außerdem

$$(U + \Delta(M))/\Delta(M) \oplus B/\Delta(M) = M/\Delta(M),$$

d.h. $U + B = M$ und $U \cap B = U \cap \Delta(M) = \Delta(U)$ reininjektiv, so daß $U \cap B$ direkter Summand in B ist, also auch U in M .

(iii \rightarrow ii) ist klar, und (ii \rightarrow i) ist ein einfacher Induktionsbeweis.

Aus Punkt (iv) folgt sofort, daß M genau dann quasi-separabel ist, wenn es der torsionsfreie Anteil $M/T(M)$ ist. Allgemeiner hat man für jeden Untermodul $M_0 \subset \Delta(M)$, daß $(M/M_0)/\Delta(M/M_0)$ isomorph zu $M/\Delta(M)$ ist, und damit die

BERMerkung 1. Ist $M_0 \subset \Delta(M)$, so ist M genau dann quasi-separabel, wenn M/M_0 quasi-separabel ist.

Aus Punkt (ii) folgt, daß für vollständiges R jeder R -Modul quasi-separabel ist. Im unvollständigen Fall vererbt sich Quasi-Separabilität nicht einmal auf Unter- oder Faktormoduln. Die Frage nach den quasi-separablen Untermoduln hängt eng mit dem Begriff der Koseparabilität zusammen (siehe 2.1), für Faktormoduln gilt:

BERMerkung 2. Ist M quasi-separabel und M_0 ein projektionsinvarianter Untermodul von M , so ist auch M/M_0 quasi-separabel. Ebenso, wenn M_0 ein schwaches Komplement in M hat. Da die erste Aussage wie in (1.2, i \rightarrow iv) bewiesen wird, haben wir nur noch die zweite zu zeigen, und dazu sei X ein schwaches Komplement von M_0 in M : Weil dann M/M_0 bis auf Isomorphie direkter Summand in $M/X \cap M_0$ ist, kann man gleich $X = M$, d.h. M_0 klein in M annehmen. Damit ist auch $(M_0 + \Delta(M))/\Delta(M)$ klein in $M/\Delta(M)$, also $M/(M_0 + \Delta(M))$ nach der zweiten Bemerkung zu (1.1) separabel, also nach eben M/M_0 quasi-separabel.

Die Grundlage für unsere Charakterisierungen von quasi-separablen und koseparablen Moduln durch Komplementeigenschaften ist der folgende

HILFSSATZ 1.3. Sei U ein Untermodul von M . Dann gilt:

- Ist $U \subset \text{Ra}(M) + T(M)$ und U koatomar, so hat U genügend viele Komplemente in M .
- Hat U ein schwaches Komplement in M , so hat auch $(U + T(M))/T(M)$ ein schwaches Komplement in $M/T(M)$, und der Kokern der induzierten Abbildung $T(M) \rightarrow T(M/U)$ ist artinsch.
- Hat $(U + T(M))/T(M)$ ein Komplement in $M/T(M)$ und ist U torsionsfrei, so hat auch U ein Komplement in M .
- Hat U ein Komplement in M und ist $U \subset U_1 \subset M$ ein Zwischenmodul mit U_1/U teilbar, so hat auch U_1 ein Komplement in M .

BEWEIS. (a) Bei $X + U = M$ kann man, weil $X \cap U$ ein schwaches Komplement in X hat, gleich annehmen, daß $X \cap U$ klein in M ist. Die Menge

$$\{V \subset X \mid \text{Ra}(V) = V \cap \text{Ra}(M)\}$$

hat nach Zorn ein maximales Element V_0 , und weil $V_0 \cap U$ klein in V_0 ist, bleibt nur noch $V_0 + U = M$ zu zeigen. In $\bar{M} = M/V_0$ gilt wegen der Maximalität von V_0 , daß \bar{X} reduziert ist und enthalten in $\text{Ra}(\bar{M})$, und aus $\bar{X} + \bar{U} = \bar{M}$ folgt, daß \bar{M} reduziert ist und radikal-komplementiert. Aus $\bar{U} \subset \text{Ra}(\bar{M}) + T(\bar{M})$ folgt die Teilbarkeit von $\bar{M}/T(\bar{M})$, so daß \bar{M} sogar beschränkt sein muß, \bar{X} klein in \bar{M} und $\bar{U} = \bar{M}$, also $V_0 + U = M$ wie gewünscht. (Das ist eine Verallgemeinerung des Beweisganges zu Satz 3.4 in [10].)

(b) Sei $X + U = M$ und $X \cap U$ klein in M . Mit $\bar{M} = M/T(M)$ folgt $\bar{X} + \bar{U} = \bar{M}$, und weil $\bar{X} \cap \bar{U}$ als wesentliche Erweiterung von $\bar{X} \cap \bar{U}$ endlichen Rang hat, gilt die erste Behauptung. Für die zweite braucht man, weil $T(M/X \cap U) \rightarrow T(M/U)$ surjektiv ist, nur den Kokern von $T(M) \rightarrow T(M/X \cap U)$ zu betrachten, so daß wir gleich $X = M$, d.h. U klein in M annehmen können. Mit $U_*/U = T(M/U)$ ist nun $U_*/T(M)$ wesentliche Erweiterung von $(U + T(M))/T(M)$, und weil $U/T(U) \cong R^n$ ist für ein $n \geq 0$, ist $U_*/(U + T(M))$ bis auf Isomorphie Untermodul von $(K/R)^n$, d.h. artinsch wie behauptet.

(c) Ist $W/T(M)$ ein Komplement von $(U + T(M))/T(M)$ in $M/T(M)$, so zeigen wir ohne weitere Voraussetzungen an U , daß $U/T(U)$ ein Komplement in $M/T(U)$ hat: Klar ist $W/T(U) + U/T(U) = M/T(U)$ und der Durchschnitt koatomar, aber er ist auch enthalten in $\text{Ra}(W/T(U)) + T(W/T(U))$, so daß er nach (a) ein Komplement in $W/T(U)$ hat, das dann auch ein Komplement von $U/T(U)$ in $M/T(U)$ ist.

(d) Sei V ein Komplement von U in M . Statt der Teilbarkeit von U_1/U genügt es zu verlangen, daß U_1/U in $\text{Ra}(M/U)$ enthalten ist und ein Komplement in M/U hat. Dann ist nämlich U_1/U radikal-komplementiert, also auch $V \cap U_1$ wegen der exakten Folge

$$0 \rightarrow V \cap U \subset V \cap U_1 \rightarrow U_1/U \rightarrow 0,$$

und

$$V \cap U_1 \subset (V + \text{Ra}(M)) \cap (U + \text{Ra}(M)) = \text{Ra}(M)$$

liefert $V \cap U_1 \subset \text{Ra}(V)$, so daß $V \cap U_1$ ein Komplement in V hat.

FOLGERUNG 1.4. *Ist M quasi-separabel und hat U genügend viele schwache Komplemente in M , so hat U auch ein Komplement in M .*

BEWEIS. Besitze im 1. Schritt U nur ein schwaches Komplement in M , sei aber dafür zerfallend, d.h. $T(U)$ direkter Summand in U . Dann hat U bereits ein Komplement in M , denn zunächst hat $T(U)$ in jedem Zwischenmodul zu M ein schwaches Komplement, also auch ein Komplement, so daß wir (weil $M/T(U)$ wieder quasi-separabel ist) gleich $T(U)=0$ annehmen können, wegen (b, c) sogar $T(M)=0$: Mit $X+U=M$, $X \cap U$ klein in M , $X_*/X = T(M/X)$ ist X_* wieder quasi-separabel und $X_* \cap U$ von endlichem Rang, so daß wir gleich U von endlichem Rang, ja nach (d) sogar endlich erzeugt annehmen können. Dann gibt es aber ein $U' \subset U$, das rein in M ist und für das U/U' klein in M/U' ist (wähle etwa U' als Komplement von $U \cap \text{Ra}(M)$ in U), und jedes direkte Komplement von U' in M ist dann ein Komplement von U in M . Seien nun im 2. Schritt M und U wie verlangt. Ist $W/T(M)$ ein Komplement von $(U + T(M))/T(M)$ in $M/T(M)$, so ist W als reiner Untermodul von M wieder quasi-separabel, und zu $W + U = M$ gibt es nach Voraussetzung ein schwaches Komplement von $W \cap U$ in W . Nun ist $W \cap U/T(W \cap U)$ sogar endlich erzeugt, insbesondere $W \cap U$ zerfallend, so daß der 1. Schritt ein Komplement von $W \cap U$ in W liefert.

BEMERKUNG. Es genügt in der Folgerung nicht, daß U ein schwaches Komplement in M hat. Um dafür ein Beispiel zu geben, sei R unvollständig, X die Vervollständigung von R und M ein reduzierter Modul mit $X \subset \text{Ra}(M)$ und $M/T(M)$ teilbar. Dann ist M quasi-separabel, und X hat ein Komplement in M , sagen wir U . Aber weil M/U teilbar und ungleich Null ist, hat U kein Komplement in M .

Leider ist die in der Folgerung angegebene Komplementeigenschaft nicht charakteristisch für quasi-separabel (siehe das Beispiel nach 3.5). Unter der Zusatzbedingung » $T(M)$ teilbar«, die auch im folgenden immer wieder auftritt, erhält man aber eine Reihe von Äquivalenzen, unter denen Punkt (iv) (zusammen mit der vorhergehenden Folgerung) die in der Einleitung mit A1 bezeichnete Kennzeichnung der Quasi-Separabilität liefert:

SATZ 1.5. Gilt für den Modul M , daß $T(M)$ teilbar ist, so sind äquivalent:

- (i) M ist quasi-separabel
- (ii) Besitzt ein Untermodul ein schwaches Komplement in M , so hat er bereits ein Komplement in M
- (iii) Jedes Komplement ist direkter Summand in M
- (iv) Jeder zyklische Untermodul von M hat ein Komplement in M .

BEWEIS. Vorbemerkung: Weil $T(M)$ teilbar ist, gilt für jeden reinen Untermodul U von M : Hat U ein Komplement in M , so ist U bereits direkter Summand. Mit $U_*/U = T(M/U)$ folgt nämlich

$$T(M)+U = U_*, \quad T(U)\oplus X = T(M), \quad U\oplus X = U_*,$$

und weil nach (1.3,d) auch U_* ein Komplement in M hat, ist U_* sogar direkter Summand in M (weil M/U_* torsionsfrei, also auch U).

(ii \rightarrow iii) Sei V ein Komplement in M . Weil $T(M)$ teilbar, ist V nicht nur neat, sondern sogar rein in M , und nach Voraussetzung hat V ein Komplement in M , ist also nach der Vorbemerkung direkter Summand.

(iii \rightarrow iv) Sei $U \subset M$ zyklisch. Falls $U \subset \text{Ra}(M)$, ist man fertig; falls aber $U \not\subset \text{Ra}(M)$, ist U ein Komplement in M , also nach Voraussetzung direkter Summand.

(iv \rightarrow i) Nach (1.2) ist das Abspalten nur für zyklische reine Untermoduln zu prüfen. Die haben aber nach Voraussetzung ein Komplement, sind also nach der Vorbemerkung direkte Summanden.

(i \rightarrow ii) Dafür genügt es, daß M quasi-separabel und $T(M)$ direkter Summand in $\Delta(M)$ ist. Hat nämlich U ein schwaches Komplement in M , so zeigen wir im 1. Schritt, daß U in $U+D(M)$ sogar ein Komplement hat (bei beliebigem M): Wir behaupten, daß $U \cap D(M)$ radikal-komplementiert ist, und betrachten dazu $X+U=M$, $A=X \cap U$ klein in M , $A_0/A=D(M/A)$. Klar ist $D(M) \subset A_0$ und $D(U/A)=(U \cap A_0)/A$, insbesondere $U \cap A_0$ radikal-komplementiert; weil aber $U \cap A_0/U \cap D(M)$ reduziert ist, folgt nach [10, Lemma 3.2] die Behauptung. Damit hat $U \cap D(M)$ ein Komplement in $D(M)$, also auch U in $U+D(M)$. Falls wir nun im 2. Schritt zeigen können, daß $U+D(M)$ ein Komplement in M hat, sind wir fertig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dazu $D(M)=0$, so daß unsere Voraussetzung über M jetzt bedeutet, daß $M/T(M)$ separabel ist. Zu einem schwachen Komplement X von U in M sei wie früher $X_*/X=T(M/X)$ definiert, und weil der tors.freie Rang von $X_* \cap U$ gleich dem von $X \cap U$, also endlich ist, ist $X_* \cap U$ zerfallend, hat also nach dem ersten Beweisschritt der letzten Folgerung ein Komplement in X_* , das dann auch ein Komplement von U in M ist.

BEMERKUNG. Die Moduln mit der Eigenschaft (iii) lassen sich jetzt mit den Resultaten aus [9, Abschnitt 4] leicht beschreiben: Genau dann ist in M jedes Komplement direkter Summand, wenn entweder $T(M)$ teilbar und M quasi-separabel ist, oder

$$M \cong R/(p^t)^{(I)} \times R/(p^{t+1})^{(J)} \quad \text{für ein } t \geq 1 .$$

Um für quasi-separable Moduln weitere Komplementeigenschaften herzuleiten, müssen wir das folgende Ergebnis von R. S. Pierce in [7, Lemma 16.5] verallgemeinern: Ist G eine p -Gruppe und H eine Untergruppe von endlichem Index, so gibt es eine Untergruppe K von H , die immer noch endlichen Index in G hat und zusätzlich direkter Summand ist.

HILFSSATZ 1.6. Sei U ein Untermodul von M . Dann gilt:

- (a) Ist $T(M) + U = M$ und M/U einfach, so hat U ein starkes Komplement in M .
- (b) Ist $T(M) + U = M$ und M/U endlich erzeugt, so gibt es ein $U' \subset U$ mit der Eigenschaft, daß U' direkter Summand in M ist und M/U' endlich erzeugt und torsionsvoll.
- (c) Ist M/U endlich erzeugt, so sind äquivalent:
 - (i) Es gibt ein $U' \subset U$ mit der Eigenschaft, daß U' direkter Summand in M ist und M/U' endlich erzeugt
 - (ii) $T(M) + U$ hat ein starkes Komplement in M
 - (iii) Jedes Komplement von $T(M) + U$ in M ist bereits ein starkes Komplement
 - (iv) Für die induzierte Abbildung $\iota^*: \text{Ext}_R^1(M, R) \rightarrow \text{Ext}_R^1(U, R)$ gilt, daß $\text{Ker } \iota^* \cap D(\text{Ext}_R^1(M, R)) = 0$ ist.

BEWEIS. (a) Wir zeigen im 1. Schritt: Ist A ein maximaler Untermodul von B , $T(B) \neq 0$, und umfaßt A keinen reinen Untermodul von B , so ist B bereits zyklisch. Zum Beweis betrachte man die Untermoduln

$$B[p^n] = \{x \in B \mid xp^n = 0\}$$

für all $n \geq 1$, und weil $D(B) \subset A$, also $D(B) = 0$, also $T(B)$ nicht teilbar ist, gibt es ein kleinstes n_0 mit $B[p^{n_0}] \not\subset \text{Ra}(B)$. Dazu existiert ein direkter Summand B_0 von B mit $B_0 \cong R/(p^{n_0})$, und weil B_0 nicht in A liegen darf, folgt $A + B_0 = B$. Sei A' ein Komplement von B_0 in B , mit $A' \subset A$: Aus $A'p = A' \cap Bp$ folgt wegen der Minimalität von n_0 sogar $A'p^i = A' \cap Bp^i$ für alle $i \leq n_0$; aber für alle $i \geq n_0$ ist sogar $A'p^i = Bp^i$, d.h. insgesamt A' rein in B (ja sogar direkter Summand, weil B/A' zyklisch ist), so daß folgt $A' = 0$, $B_0 = B$. Sei nun im 2. Schritt U in M wie angegeben. Dann hat die Menge $\{Y \subset U \mid Y \text{ rein in } M\}$

ein maximales Element U' , und die Maximalität bedeutet, daß U/U' keinen reinen Untermodul von M/U' umfaßt. Aus $T(M) \not\subset U$ folgt $T(M/U') \neq 0$, so daß nach dem 1. Schritt M/U' zyklisch ist, weiterhin $V \oplus U' = M$, und weil V zyklisch ist, ist es auch ein Komplement von U in M .

(b) Weil M/U auch torsionsvoll, also von endlicher Länge ist, können wir den Beweis durch Induktion über $n = \text{Lä}(M/U)$ führen. Für $n=0$ wähle man $U' = M$, und bei $n \rightarrow n+1$ wähle man zuerst einen maximalen Untermodul M' von M mit $U \subset M'$. Aus $T(M') + U = M'$ und $\text{Lä}(M'/U) = n$ folgt nach Induktionsvoraussetzung $X \oplus Y = M'$ mit $Y \subset U$, X endlich erzeugt und torsionsvoll. Klar ist $T(M/X) \not\subset M'/X$, so daß es nach (a) eine Zerlegung $A/X \oplus B/X = M/X$ gibt mit $B \subset M'$, A/X zyklisch und torsionsvoll. Damit ist auch A endlich erzeugt und torsionsvoll, und $U' = B \cap Y$ ein Untermodul von U mit $A \oplus U' = M$.

(c) (i \rightarrow iii) Die Menge $\{U' \subset Y \subset T(M) + U \mid Y \text{ rein in } M\}$ hat ein maximales Element Y_0 , und wir behaupten, daß die Komplemente von $T(M) + U$ in M genau die direkten Komplemente von Y_0 in M sind. Klar ist $T(M) \subset Y_0$, also M/Y_0 endlich erzeugt und frei; und weil $(T(M) + U)/Y_0$ keine reinen Untermoduln von M/Y_0 umfaßt, ist es sogar klein in M/Y_0 . Für jedes Komplement V von $T(M) + U$ in M ist also $V \rightarrow M/Y_0$ ein wesentlicher Epimorphismus, ja sogar ein Isomorphismus, d.h. $V \oplus Y_0 = M$.

Weil $T(M) + U$ ein Komplement in M hat (sogar genügend viele), ist (iii \rightarrow ii) klar, so daß wir als nächstes (ii \rightarrow i) zeigen:

Das starke Komplement liefert einen Zwischenmodul $T(M) \subset M' \subset T(M) + U$ mit M/M' endlich erzeugt und frei, und wegen $T(M') + (U \cap M') = M'$ hat man nach (b) auch noch ein $U' \subset U \cap M'$, so daß U' direkter Summand in M' ist und M'/U' endlich erzeugt. Dann leistet aber U' auch bezüglich M das Gewünschte.

(i \rightarrow iv). $\text{Ke } \iota^*$ ist enthalten im Kern von $\text{Ext}_R^1(M, R) \rightarrow \text{Ext}_R^1(U', R)$, und der ist sogar endlich erzeugter direkter Summand.

(iv \rightarrow ii). Sei $U_1 = T(M) + U$ und ι_1 die Inklusion in M . Dann ist

$$\text{Ke } \iota_1^* = \text{Ke } \iota^* \cap D(\text{Ext}_R^1(M, R)),$$

also nach Voraussetzung ι_1^* injektiv, d.h.

$$v_1^*: \text{Ext}_R^1(M/U_1, R) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, R)$$

die Nullabbildung. Zu einem Epimorphismus $\beta: R^n \rightarrow M/U_1$ ist dann auch

$$v_1^\circ: \text{Ext}_R^1(M/U_1, \text{Ke } \beta) \rightarrow \text{Ext}_R^1(M, \text{Ke } \beta)$$

trivial, so daß es insbesondere ein $\alpha: M \rightarrow R^n$ gibt mit $\beta\alpha = v_1$. Damit ist $\text{Ke } \alpha \subset U_1$ und $M/\text{Ke } \alpha$ endlich erzeugt und frei, so daß (i \rightarrow ii) mit U_1 statt U die Behauptung liefert.

FOLGERUNG 1.7. *Ist M quasi-separabel und M/U endlich erzeugt, so gibt es ein Komplement von U in M , das in M absplattet.*

BEWEIS. U und $\text{Ra}(M) + U$ haben dieselben Komplemente in M , so daß wir gleich M/U als Vektorraum über $R/(p)$ auffassen können, von endlicher Dimension n . Für $n=0$ ist nichts zu zeigen. Für $n=1$ (d.h. M/U einfach) sind, wie noch häufig im folgenden, zwei Fälle zu unterscheiden: Ist $T(M) \not\subseteq U$, so hat U nach (a) sogar ein starkes Komplement in M : ist $T(M) \subset U$, so gilt für jedes Komplement V von U , daß $V \cong R$ und V rein in M ist, also wegen quasi-separabel absplattet. Für $n \rightarrow n+1$ wähle man einen maximalen Untermodul M' von M mit $U \subset M'$, und nach eben gibt es ein Komplement X von M' in M , das in M absplattet. Weil M/X wieder quasi-separabel ist und $\dim(M/(U+X))=n$, hat man nach Induktionsvoraussetzung ein Komplement A/X von $(U+X)/X$ in M/X , so daß A/X direkter Summand in M/X ist. Schreibt man $A = X \oplus A'$, so ist A' ein Komplement von $U+X$ in M , und A' direkter Summand in M . Falls $A' + U = M$, ist man schon fertig: falls aber $A' + U \not\subseteq M$, ist X ein Komplement von $A' + U$ in M , also dann A selbst ein Komplement von U in M .

BEMERKUNG. Mit einem ähnlichen Induktionsbeweis wie eben läßt sich für einen beliebigen Modul M zeigen: Genau dann hat M die in der Folgerung betrachtete Komplementeigenschaft, wenn entweder M quasi-separabel ist, oder R^n für jede natürliche Zahl n direkter Summand in M ist.

Der folgende Satz enthält die in der Einleitung unter B1 angegebene Charakterisierung von quasi-separablen Moduln. Er zeigt obendrein, daß die äquivalenten Bedingungen in (1.6. c) z.B. dann erfüllt sind, wenn U quasi-separabel ist.

SATZ 1.8. *Für einen Modul M sind äquivalent:*

- (i) M ist quasi-separabel
- (ii) M hat in jeder Erweiterung N , mit N/M einfach, ein starkes Komplement
- (iii) Ist $M \subset N$ und N/M endlich erzeugt, so gibt es ein $M' \subset M$ mit der Eigenschaft, daß M' direkter Summand in N ist und N/M' endlich erzeugt.

BEWEIS. (i \rightarrow ii) Falls $T(N) \not\subseteq M$, ist man wieder mit (1.6. a) fertig: falls aber $T(N) \subset M$, gilt für jedes Komplement W von M in N , daß $W \cong R$ ist und $W \cap M$ rein in M (weil $N/(W \oplus T(N)) \cong M/(W \cap M \oplus T(N))$ torsionsfrei ist), also $W \cap M$ im quasi-separablen M absplattet.

(ii \rightarrow i) Zu einem reinen Untermodul U von M , mit $U \cong R$, wähle man eine

maximale wesentliche Erweiterung von U in der injektiven Hülle von M , sagen wir B . Dann ist U sowohl rein als auch groß in $M \cap B$, also $U = M \cap B$. außerdem $T(M+B) = T(M)$, $B \cong K$, $(M+B)/M \cong K/R$. Es gibt also (genau) einen Zwischenmodul $M \subset N \subset M+B$, so daß N/M einfach ist, und dafür gilt $T(N) \subset M$. Nach Voraussetzung gibt es ein $M' \subset M$ mit $N/M' \cong R$, und wir behaupten, daß M' ein direktes Komplement von U in M ist: Aus $M+B=N$ + B folgt

$$(M/M') + (M' + N \cap B)/M' = N/M'$$

also $M' + N \cap B = N$, d.h. $M' + U = M$: und $U/M' \cap U \cong M/M' \cong R$ liefert $M' \oplus U = M$.

(i \rightarrow iii) Wir zeigen zuerst durch Induktion über n : Ist M quasi-separabel und N/M endlich erzeugt und torsionsvoll von der Länge n , so gibt es ein M' wie verlangt. Dazu wähle man bei $n \rightarrow n+1$ einen Zwischenmodul $M \subset N' \subset N$ mit N'/N' einfach, und nach Induktionsvoraussetzung eine Zerlegung $X \oplus Y = N'$ mit X endlich erzeugt, $Y \subset M$. Nun ist N'/X bis auf Isomorphie direkter Summand von M , also wieder quasi-separabel, so daß es nach (i \rightarrow ii) eine Zerlegung $A/X \oplus B/X = N'/X$ gibt mit $B \subset N'$ und A/X zyklisch. Damit ist auch A endlich erzeugt und $M' = B \cap Y$ enthalten in M mit $A \oplus M' = N$. — Ist aber N/M nur endlich erzeugt, so gibt es zu $M_*/M = T(N/M)$ ein $M' \subset M$, so daß M' direkter Summand in M_* ist und M_*/M' endlich erzeugt. Weil N/M_* endlich erzeugt und frei ist, leistet M' sogar bezüglich N das Gewünschte.

(iii \rightarrow ii) klar mit (1.6, a und c).

FOLGERUNG 1.9. *Ist M quasi-separabel und N/M endlich erzeugt, so ist auch N quasi-separabel.*

Aus dem Beispiel des nächsten Abschnittes folgt, daß für geeignetes R der separable Modul $M = R^N$ eine Erweiterung $M \subset N$ hat, so daß $N/M \cong R/(p)^{(N)}$ ist, aber N nicht quasi-separabel ist.

2. Koseparable Moduln.

In diesem Abschnitt werden die koseparablen Moduln durch die Existenz von genügend vielen bzw. starken Komplementen charakterisiert, entsprechend den in der Einleitung angegebenen Punkten A2 und B2. Mit den in (1.6) und (1.8) bereitgestellten Hilfsmitteln ist nicht mehr viel zu beweisen. Zunächst folgt aus (1.8) sofort, daß ein Modul, in dem alle Untermoduln quasi-separabel sind, bereits koseparabel ist. Insbesondere sind über einem vollständigen Ring alle Moduln koseparabel.

Jeder koseparable Modul M ist quasi-separabel, denn ist V rein in M und V

$\cong R$, so folgt $V \not\subseteq \text{Ra}(M) + T(M)$, d.h. es gibt einen maximalen Untermodul U von M mit $T(M) \subset U$, $V \not\subseteq U$; weil dann V ein Komplement von U in M ist, ist es nach (1.6, c) sogar ein starkes Komplement, insbesondere direkter Summand in M .

Die Umkehrung gilt nicht, wie aus Punkt (a) des nächsten Beispiels folgt, das im Fall der abelschen Gruppen auf Nunke (siehe [1, p. 683]) zurückgeht:

BEISPIEL. Sei $R = \mathbb{Z}_p$, die Lokalisierung des Ringes der ganzen Zahlen bei einer Primzahl p . Sei $S = R^{(\mathbb{N})}$, $P = R^{\mathbb{N}}$ und $S \subset U \subset P$. Dann gilt:

- (a) Ist U quasi-separabel und P/U beschränkt, so folgt $U = P$.
- (b) Hat U ein schwaches Komplement in P , so ist P/U endlich erzeugt und torsionsvoll.
- (c) Hat U ein starkes Komplement in P , so folgt $U = P$.

Zum Beweis benützen wir die beiden Tatsachen, daß für jedes $f \in P^\circ = \text{Hom}_R(P, R)$ fast alle $f(e_i)$ gleich Null sind ($e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ mit 1 an der i -ten Stelle), und daß $(P/S)^\circ = 0$ ist. Ist dann U wie in (a) verlangt, so gelten die eben angegebenen Tatsachen auch mit U statt P , so daß die kan. Abbildung $P^\circ \rightarrow U^\circ$ ein Isomorphismus ist. Nach [1, Proposition 2.2] ist nun, weil U quasi-separabel ist,

$$\text{Kok}(U \rightarrow U^{\circ\circ}) \cong P/U$$

torsionsfrei, also Null wie behauptet. Ist nun die Situation von (b) gegeben, so hat U nach (1.5) sogar ein Komplement in P , also ist $T(P/U) = U_*/U$ nach der zweiten Bemerkung zu (1.1) endlich erzeugt und U_* direkter Summand in P . Aus $(P/U_*)^\circ = 0$ folgt $U_* = P$. Im Fall (c) ist nach eben P/U endlich erzeugt und torsionsvoll, wegen des starken Komplementes aber auch U quasi-separabel, so daß (a) die Behauptung liefert.

In der folgenden Charakterisierung der koseparablen Moduln ist die Äquivalenz (ii \leftrightarrow iv) für den Spezialfall » M torsionsfrei und reduziert« ein Teil des Theorems 4.2 aus [1]. Unser Beweis ist aber von dem dortigen unabhängig. Ein Vergleich mit (1.8) zeigt, daß die »äußeren« Eigenschaften von quasi-separablen Moduln jetzt, im koseparablen Fall, zu »inneren« werden.

SATZ 2.1. Für einen Modul M sind äquivalent:

- (i) M ist koseparabel
- (ii) Jeder maximale Untermodul von M ist quasi-separabel
- (iii) Jeder maximale Untermodul von M hat ein starkes Komplement in M

(iv) Der Torsionsuntermodul von $\text{Ext}_R^1(M, R)$ ist reduziert.

Falls $T(M)$ teilbar ist, ist das weiter äquivalent mit

(v) Jeder zyklische Untermodul von M hat genügend viele Komplemente in M .

BEWEIS. (i \rightarrow ii) Jeder Untermodul M_0 , mit M/M_0 endlich erzeugt, ist wieder koseparabel, insbesondere quasi-separabel.

(ii \rightarrow iii) Das wurde im ersten Beweisschritt von (1.8) gezeigt.

(iii \rightarrow iv) Es ist zu zeigen, daß

$$D(T(\text{Ext}_R^1(M, R))) = T(D(\text{Ext}_R^1(M, R))) \cong T(\text{Ext}_R^1(M/T(M), R))$$

gleich Null ist. Repräsentiere dazu

$$0 \rightarrow R \subset B \rightarrow M/T(M) \rightarrow 0$$

ein Element aus $\text{Ext}_R^1(M/T(M), R)$, das durch p annulliert wird. Dann gibt es einen Zwischenmodul $R \subset X \subset B$, so daß R direkter Summand in X ist und B/X einfach oder Null. Weil auch $B/R \cong M/T(M)$ die Bedingung (iii) erfüllt, gibt es jetzt einen Zwischenmodul $R \subset X' \subset X$ mit $B/X' \cong R$ oder Null, so daß R direkter Summand in B ist wie gewünscht.

(iv \rightarrow i) Ist M/U endlich erzeugt und

$$\iota^*: \text{Ext}_R^1(M, R) \rightarrow \text{Ext}_R^1(U, R)$$

die induzierte Abbildung, so ist $\text{Ke } \iota^*$ torsionsvoll, also nach Voraussetzung

$$\text{Ke } \iota^* \cap D(\text{Ext}_R^1(M, R)) = 0,$$

so daß nach (1.6, c) ein U' existiert wie verlangt.

(i \rightarrow v) Ohne weitere Voraussetzungen an M (siehe Folgerung 2.3) folgt aus $X + U = M$, U zyklisch, daß mit M auch X koseparabel ist, also $X \cap U$ im quasi-separablen X ein Komplement hat, das dann auch ein Komplement von U in M ist.

(v \rightarrow iii) Sei U ein maximaler Untermodul von M und V ein Komplement von U in M . Weil V zyklisch ist, gibt es nach Voraussetzung ein Komplement U' von V in M mit $U' \subset U$. Nun ist auch M/U' zyklisch, also $T(M) \subset D(M) \subset U'$, $M/U' \cong R$ und damit $V \oplus U' = M$ wie gewünscht.

BEMERKUNG. Aus (iii) folgt nicht, daß jeder Untermodul U von M , mit M/U zyklisch, ein starkes Komplement in M hat. Diese letztere Komplementeigenschaft ist nämlich äquivalent damit, daß entweder $T(M)$ teilbar und M koseparabel ist, oder

$$M/D(M) \cong R/(p^t)^{(l)} \times R/(p^{t+1})^{(j)} \quad \text{für ein } t \geq 1.$$

Weil für jedes koatomare C der Modul $\text{Ext}_R^1(C, R)$ beschränkt ist, erhält man aus (iv):

FOLGERUNG 2.2. *Ist M koseparabel und M/M_0 koatomar, so ist auch M_0 koseparabel.*

Dieselbe Argumentation wie bei (i \rightarrow v) liefert damit:

FOLGERUNG 2.3. *Ist M koseparabel, so hat jeder koatomare Untermodul von M genügend viele Komplemente in M .*

Überträgt man jetzt die Resultate über Unter- und Faktormoduln von quasi-separablen Moduln aus Abschnitt 1 auf den koseparablen Fall, so erhält man: Ist $M_0 \subset \Delta(M)$, so ist M/M_0 genau dann koseparabel, wenn es M selbst ist; Koseparabilität vererbt sich auf reine Untermoduln; und ist M_0 projektionsinvariant in M , oder hat M_0 ein schwaches Komplement in M , so ist mit M auch M/M_0 koseparabel.

3. Komplemente für zyklische (endlich erzeugte, koatomare) Untermoduln.

Das Problem die Moduln zu charakterisieren, in denen die angegebenen Untermoduln ein Komplement (genügend viele Komplemente) haben, wurde in (1.5) bzw. (2.1) unter der Annahme » $T(M)$ teilbar« gelöst. Es soll in diesem letzten Abschnitt für beliebiges M untersucht werden.

SATZ 3.1. *Ist $T(M)$ nicht teilbar, so hat jeder zyklische Untermodul von M genügend viele Komplemente in M .*

BEWEIS. Wir zeigen im 1. Schritt, daß jeder zyklische Untermodul U von M ein Komplement in M hat. Nach (1.3, a) ist nur noch der Fall zu prüfen, daß $U \cong R$ und U rein in M ist. Weil nun $T(M/U) \cong T(M)$ nicht teilbar ist, gibt es eine Zerlegung

$$M/U = X/U \oplus M'/U$$

mit $X/U \cong R/(p^n)$, $n \geq 1$, so daß auch M' direkter Summand in M ist mit $M/M' \cong R/(p^n)$. Für jede Zerlegung

$$V/U p^n \oplus U/U p^n = M'/U p^n$$

gilt, daß V ein schwaches Komplement von U in M' ist mit $M'/V \cong R/(p^n)$. Ähnlich dem Lemma 6.1 in [11] zeigt man nun mit Hilfe der Diagonale $d: M' \ni x \mapsto (x, \bar{x}) \in M' \times (M'/V)$, daß Bild ein Komplement von $U \times 0$ in M'

$\times (M'/V)$ ist, so daß auch $U \times 0$ in $M' \times (M/M')$ ein Komplement hat, d.h. U in M . Um im 2. Schritt genügend viele Komplemente nachzuweisen, sei nun $X + U = M$, U zyklisch. Wieder nach (1.3, a) kann man $U \cong R$ und $X \cap U$ rein in X annehmen. Dann ist aber $T(X) = T(M)$ nicht teilbar, so daß es nach eben ein Komplement von $X \cap U$ in X gibt, das dann auch ein Komplement von U in M ist.

FOLGERUNG 3.2. *Ist U ein Untermodul von M mit p -Rang $(U) \leq n \leq p$ -Rang $(T(M))$, so hat U ein Komplement in M .*

BEWEIS. Nach (1.3, d) genügt es (via Basis-Untermodul), die Aussage für endlich erzeugte U zu zeigen, und für die weisen wir sogar genügend viele Komplemente nach: Beim Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$ schreibe man $U = \bigoplus_{i=1}^{n+1} U_i$ mit U_i zyklisch. Falls $U_i \subset \text{Ra}(M) + T(M)$ für alle i , ist man nach (1.3, a) fertig; falls etwa $U_1 \not\subset \text{Ra}(M) + T(M)$, folgt $U_1 \cong R$ und U_1 rein in M , außerdem

$$p\text{-Rang}(U/U_1) \leq n < p\text{-Rang}(T(M/U_1)).$$

Zu $X + U = M$ gibt es nach Induktionsvoraussetzung einen Zwischenmodul $U_1 \subset W \subset X + U_1$, so daß W/U_1 ein Komplement von U/U_1 in M/U_1 ist. Als Faktor von U/U_1 ist auch M/W endlich erzeugt vom p -Rang $\leq n$, so daß auch

$$p\text{-Rang}((T(M) + W)/W) \leq n$$

gilt, und weil in der exakten Folge

$$0 \rightarrow T(W) \subset T(M) \rightarrow (T(M) + W)/W \rightarrow 0$$

das mittlere Glied vom p -Rang $\geq n+1$ ist, kann $T(W)$ nicht teilbar sein. Damit gibt es zu $(W \cap X) + U_1 = W$ nach dem Satz ein in X enthaltenes Komplement von U_1 in W , das dann auch ein Komplement von U in M ist.

FOLGERUNG 3.3. *Hat U ein schwaches Komplement in M und ist p -Rang $(T(M/U)) \geq \aleph_0$, so hat U bereits ein Komplement in M .*

BEWEIS. Man kann gleich U koatomar annehmen, und weil dann $T(U)$ in jeder Erweiterung ein Komplement hat, sogar $T(U) = 0$, d.h. U endlich erzeugt und frei. Nach (1.3, b) ist p -Rang $(T(M)) \geq \aleph_0$, so daß (3.2) die Behauptung liefert.

FOLGERUNG 3.4. (a) *Ist p -Rang $(T(M)) \geq \aleph_0$, so hat jeder endlich erzeugte Untermodul von M genügend viele Komplemente in M .*

(b) *Ist p -Rang $(T(M)) < \aleph_0$ und hat jeder endlich erzeugte Untermodul von M*

ein Komplement (genügend viele Komplemente) in M , so ist M bereits quasi-separabel (koseparabel).

BEWEIS. Weil (a) aus dem Beweis von (3.2) folgt, bleibt nur noch (b) zu zeigen: Nach Voraussetzung hat man eine Zerlegung $T(M) = M_0 \oplus M_1$ mit M_0 endlich erzeugt und M_1 teilbar. Weil M/M_0 die entsprechende Komplementeigenschaft hat und $T(M/M_0)$ teilbar ist, folgt nach (1.5) bzw. (2.1), daß M/M_0 quasi-separabel bzw. koseparabel ist, also auch M .

BEISPIEL. Besitze M ein minimales Erzeugendensystem, d.h. ein Erzeugendensystem E , so daß jede echte Teilmenge von E nicht mehr M erzeugt. Dann hat jeder endlich erzeugte Untermodul von M genügend viele Komplemente in M . Zum Beweis überlegt man sich, daß es einen freien Modul F und einen Epimorphismus $f: F \rightarrow M$ gibt mit $\text{Ke } f \subset \text{Ra } (F)$, und daß für einen beliebigen Modul G gilt: Ist $G_0 \subset \text{Ra } (G)$ und hat in G jeder endlich erzeugte Untermodul ein Komplement (genügend viele Komplemente), so gilt das auch für G/G_0 .

Auf ähnliche Art wie die vorhergehende Folgerung beweist man:

FOLGERUNG 3.5. (a) *Ist $T(M)$ nicht radikal-komplementiert, so hat jeder koatomare Untermodul von M genügend viele Komplemente in M .*

(b) *Ist $T(M)$ radikal-komplementiert und hat jeder koatomare Untermodul von M ein Komplement (genügend viele Komplemente) in M , so ist M bereits quasi-separabel (koseparabel).*

BEISPIEL. Besitze M die Eigenschaft, daß jeder torsionsfreie Untermodul von M quasi-separabel ist. Dann hat jeder koatomare Untermodul von M genügend viele Komplemente in M . Zum Beweis sei U koatomar und $X + U = M$: Ist $T(X)$ nicht radikal-komplementiert, so hat $X \cap U$ nach eben ein Komplement in X ; ist aber $T(X)$ radikal-komplementiert, so ist X wegen unserer Annahme über M sogar quasi-separabel, so daß (1.4) die Behauptung liefert.

Der Beweis zeigte bei diesem M sogar für jeden Untermodul U : Hat U ein schwaches Komplement in M , so hat U bereits ein Komplement in M . Dabei mußte $M/T(M)$ keineswegs quasi-separabel sein, denn nach [4, Theorem 2.3] gibt es zu jedem torsionsfreien Modul G einen Modul M derart, daß $M/T(M) \cong G$ ist und in M jeder torsionsfreie Untermodul sogar frei ist.

Anhang.

Statt zu fragen, wann alle Untermoduln von M , die ein schwaches Komplement in M haben, bereits ein Komplement in M besitzen, kann man alle Erweiterungen von M betrachten (siehe die »äußere« bzw. »innere« Charakterisierung von Quasi-Separabilität bzw. Koseparabilität in (1.8) bzw. (2.1)). Obwohl das, wie sich zeigen wird, nichts mit Separabilität zu tun hat, wollen wir in diesem Anhang eine Kennzeichnung derjenigen Moduln geben, die in jeder Erweiterung, in der sie ein schwaches Komplement haben, bereits ein Komplement haben. Weil über einem vollständigen Ring jeder Modul diese Eigenschaft besitzt, wird man keine explizite Strukturaussage erwarten können.

SATZ. Sei R^* die Vervollständigung von R . Dann sind für einen R -Modul M äquivalent:

- (i) Ist $M \subset N$ und hat M ein schwaches Komplement in N , so hat M bereits ein Komplement in N
- (ii) Die kanonische Abbildung $\gamma: \text{Hom}_R(R^*, M) \rightarrow M$, mit $\gamma(\varphi) = \varphi(1)$, ist surjektiv
- (iii) R^* generiert M , d.h. es gibt einen Epimorphismus $R^{*(I)} \rightarrow M$
- (iv) M ist die Summe seiner Kotorsions-Untermoduln.

BEWEIS. (i \rightarrow ii) In der langen exakten Folge

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(R^*/R, M) \rightarrow \text{Hom}_R(R^*, M) \xrightarrow{\gamma} M \\ \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_R^1(R^*/R, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(R^*, M) \rightarrow 0$$

müssen wir $\delta = 0$ zeigen, und dazu sei $x \in M$, sowie $f: R \ni r \mapsto xr \in M$. Dann erhält man

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & R & \subset & R^* & \rightarrow & R^*/R & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow f' & & \parallel & & \\ \delta(x) \ni 0 & \rightarrow & M & \subset & N & \rightarrow & R^*/R & \rightarrow & 0, \end{array}$$

und weil R ein schwaches Komplement Y in R^* hat, ist $f'(Y)$ ein schwaches Komplement von M in N , so daß nach Voraussetzung M ein direktes Komplement in N hat (es ist ja N/M torsionsfrei), also $\delta(x) = 0$ ist.

Weil (ii \rightarrow iii \rightarrow iv) klar ist, bleibt (iv \rightarrow i) zu zeigen:

Ist Y ein schwaches Komplement von M in N , so ist das koatomare $Y \cap M$ nach Voraussetzung in einem Kotorsions-Untermodul M' von M enthalten. Man kann zusätzlich annehmen, daß $M'/Y \cap M$ teilbar ist, und dann ist M' radikal-komplementiert und kotorsion, hat also nach [10, Theorem 3.5] in

jeder Erweiterung ein Komplement, insbesondere in $Y + M'$, sagen wir W . Dieses W ist dann auch ein Komplement von M in N . (Man kann auch einen von [10] unabhängigen Beweis für $(iv \rightarrow i)$ geben und erhält dann eine Vereinfachung der dort geführten Argumente.)

Für jeden R -Modul M , der sich zu einem R^* -Modul machen läßt (so daß die R -Struktur fortgesetzt wird), ist natürlich γ surjektiv. Weil γ bei reduziertem M injektiv ist, erhält man so:

FOLGERUNG 1. *Ein reduzierter Modul erfüllt genau dann die Bedingung (i), wenn er sich zu einem R^* -Modul machen läßt.*

Wir wollen zeigen, daß die Eigenschaft (i) noch mit einer anderen Fragestellung zusammenhängt. Entsprechend [11] heiße eine kurze exakte Folge

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

κ -exakt (bzw. κ -Element in $\text{Ext}_R^1(C, M)$), wenn $\text{Bi } \alpha$ ein Komplement in N hat. Falls nun R unvollständig ist, kann man leicht Beispiele für Homomorphismen $g: C' \rightarrow C$ angeben, so daß die induzierte Abbildung

$$g^*: \text{Ext}_R^1(C, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(C', M)$$

nicht κ -Elemente erhält. Erfüllt aber M die Bedingung (i), so ist für jedes κ -Element aus $\text{Ext}_R^1(C, M)$ auch das Bild bei g^* ein κ -Element in $\text{Ext}_R^1(C', M)$.

Wir behaupten nun umgekehrt: Gilt für die spezielle Abbildung $v: K \rightarrow K/R$, daß

$$v^*: \text{Ext}_R^1(K/R, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(K, M)$$

κ -Elemente erhält, so besitzt M notwendig die Eigenschaft (iv). Zum Beweis können wir gleich M reduziert annehmen, und sei nun $U \subset M$ zyklisch. Nach (1.3, a) besteht $\text{Ext}_R^1(K/R, U)$ nur aus κ -Elementen, so daß in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & U & \rightarrow & \text{Ext}_R^1(K/R, U) & \rightarrow & \text{Ext}_R^1(K, U) \rightarrow 0 \\ & & \cap & & \searrow \varphi & & \downarrow i_* \\ & & & & & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{\delta} & \text{Ext}_R^1(K/R, M) & \xrightarrow{v^*} & \text{Ext}_R^1(K, M) \rightarrow 0 \end{array}$$

auch $\text{Bi } i_*$ nur aus κ -Elementen besteht, also nach Voraussetzung $v^*i_* = 0$ ist, es also ein φ gibt mit $\delta\varphi = i_*$. Damit ist $\text{Bi } \varphi$ ein Kotorsions-Untermodul von M , der, weil auch das obere Dreieck kommutiert, U enthält. Wir haben gezeigt:

FOLGERUNG 2. Genau dann erfüllt M die Bedingung (i), wenn für jeden Homomorphismus $g: C' \rightarrow C$ die induzierte Abbildung

$$g^*: \text{Ext}_R^1(C, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(C', M)$$

κ -Elemente erhält.

LITERATUR

1. S. U. Chase, *Locally free modules and a problem of Whitehead*, Illinois J. Math. 6 (1962), 682–699.
2. L. Fuchs, *Infinite abelian groups II*, Academic Press, New York, London, 1973.
3. Ph. Griffith, *Separability of torsion free groups and a problem of J. H. C. Whitehead*, Illinois J. Math. 12 (1968), 654–659.
4. Ph. Griffith, *A solution to the splitting mixed group problem of Baer*, Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 261–269.
5. Ph. Griffith, *Infinite abelian group theory*, University of Chicago Press, Chicago, London, 1970.
6. I. Kaplansky, *Infinite abelian groups*, University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, 1969.
7. R. S. Pierce, *Homomorphisms of primary abelian groups*, in *Topics in Abelian groups*, Chicago, Illinois, 1963, pp. 215–310.
8. B. Zimmermann–Huisgen, *Pure submodules of direct products of free modules*, Math. Ann. 224 (1976), 233–245.
9. H. Zöschinger, *Komplemente als direkte Summanden*, Arch. Math. (Basel) 25 (1974), 241–253.
10. H. Zöschinger, *Moduln die in jeder Erweiterung ein Komplement haben*, Math. Scand. 35 (1974), 267–287.
11. H. Zöschinger, *Über Torsions- und κ -Elemente von $\text{Ext}(C, A)$* , J. Algebra 50 (1978), 299–336.

MATHEMATISCHES INSTITUT
 DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
 THERESIENSTRASSE 39
 8 MÜNCHEN 2
 BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND