MATH. SCAND. 44 (1979), 339–344

ÜBER DIE GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNG ERSTER ORDNUNG

HENRIK L. SELBERG

1.

Indem G ein Gebiet der komplexen z-Ebene ist, betrachten wir eine Differentialgleichung

$$w' = \frac{U(z,w)}{V(z,w)} \tag{1}$$

wo U und V für alle z in G und alle komplexe w analytisch in z, w sind. Es sei

$$w = S(z;\alpha,\gamma) = \gamma + c_1(z-\alpha) + c_2(z-\alpha)^2 + \ldots \tag{2}$$

eine Lösung von (1) in der Umgebung eines Punktes $\alpha \in G$, wo $V(\alpha,\gamma) \neq 0$. Von α ausgehend setzen wir $S(z;\alpha,\gamma)$ längs allen in G gelegenen Wegen analytisch fort und erhalten dadurch die Funktion $w(z;\alpha,\gamma)$. Wir werden hier beweisen:

Satz. *Es sei* $|U(z,w)| + |V(z,w)| > 0$ *für alle* $z \in G$ *und alle komplexe* w. *Gibt es dann eine Lösung*

$$W(z) = w(z;\alpha_0,\gamma_0)$$

von (1) *und ein endliches* N, *so dass* $W(z)$ *für kein* $z \in G$ *mehr als* N *verschiedene Zweige hat, so hat* $W(z)$ *höchstens algebraische Singularitäten in* G.

2.

Der Beweis macht Gebrauch von einigen Eigenschaften der Lösungen von (1). Wir betrachten die mit (1) äquivalente Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dw} = \frac{V(z,w)}{U(z,w)}. \tag{3}$$

Ist $U(\alpha,\gamma) \neq 0$ $(\alpha \in G)$, so gibt eine Lösung von (3)

$$z = T(w;\alpha,\gamma) = \alpha + a_1(w-\gamma) + a_2(w-\gamma)^2 + \ldots \tag{4}$$

Eingegangen am 26. Oktober, 1978.

welche in der Umgebung von γ regulär ist. Ist $V(\alpha,\gamma)\neq 0$, so gibt die Umkehrung die Lösung (2) der Gleichung (1). Diese Lösung ist regulär in α. Ist dagegen $V(\alpha,\gamma)=0$, so gibt (4) durch Umkehrung eine Lösung

$$w = \gamma + c_1\sqrt[p]{z-\alpha} + c_2(\sqrt[p]{z-\alpha})^2 + \dots$$

der Differentialgleichung (1), welche in $z=\alpha$ eine algebraische Singularität und zwar einen Verzweigungspunkt der Ordnung $p-1$ hat. Dabei ist p eine ganze Zahl >1.

Der folgende Hilfssatz geht im Prinzip auf Cauchy zurück und kann mit Hilfe von *Calcul des limites* leicht hergeleitet werden (siehe z.B. Goursat [1]).

HILFSSATZ 1. *Sind E_α und E_γ kompakte Teilmengen von beziehungsweise G und der komplexen w-Ebene, so gibt es für jedes $\varepsilon>0$ ein $\varrho>0$ und ein endliches M, so dass folgendes stattfindet:*

Zu jedem (α,γ) in $E_\alpha\times E_\gamma$, das der Bedingung $|V(\alpha,\gamma)|\geqq\varepsilon$ genügt, gehört eine Lösung (2) der Differentialgleichung (1), welche in $|z-\alpha|<\varrho$ regulär ist, und deren Koeffizienten den Ungleichungen

$$|c_\nu| \leqq \frac{M}{\varrho^\nu} \qquad (\nu=1,2,\dots)$$

genügen.

Zu jedem (α,γ) in $E_\alpha\times E_\gamma$, das der Bedingung $|U(\alpha,\gamma)|\geqq\varepsilon$ genügt, gehört ein Lösung (4) der Differentialgleichung (3), welche in $|w-\gamma|<\varrho$ regulär ist, und deren Koeffizienten den Ungleichungen

$$|a_\nu| \leqq \frac{M}{\varrho^\nu} \qquad (\nu=1,2,..)$$

genügen.

Es seien $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$ zwei unendlichen Folgen und

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \alpha^* \in G, \qquad \lim_{n\to\infty}\gamma_n = \gamma^* \neq \infty .$$

Indem wir $V(\alpha_n,\gamma_n)\neq 0$ $(n=1,2,\dots)$ annehmen, betrachten wir die Lösungen

$$w = S(z;\,\alpha_n,\gamma_n)$$

der Gleichung (1). Ist ϱ_n der Konvergenzradius von $S(z;\,\alpha_n,\gamma_n)$, so gilt zunächst wegen Hilfssatz 1 (Painlevé [3]).

HILFSSATZ 2. *Ist $V(\alpha^*,\gamma^*)\neq 0$, so ist*

$$\varliminf_{n\to\infty}\varrho_n>0 .$$

Es sei nun $V(\alpha^*, \gamma^*) = 0$. Es ist dann $U(\alpha^*, \gamma^*) \neq 0$. Wir betrachten daher die Lösungen $z = T(w; \alpha_n, \gamma_n)$ der Differentialgleichung (3), wobei wir n so gross annehmen, dass $U(\alpha_n, \gamma_n) \neq 0$ ist. Schreiben wir

$$T(w; \alpha_n, \gamma_n) = \alpha_n + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(n)} (w - \gamma_n)^\nu$$

$$T(w; \alpha^*, \gamma^*) = \alpha^* + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^* (w - \gamma^*)^\nu$$

so gilt für jedes $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} a_\nu^{(n)} = a_\nu^* . \tag{5}$$

Ausserdem gibt es nach Hilfssatz 1 ein $\varrho > 0$ und ein endliches M, so dass

$$|a_\nu^{(n)}| \leqq \frac{M}{\varrho^\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

für alle hinreichend grosse n stattfindet. Wegen $V(\alpha^*, \gamma^*) = 0$ verschwindet a_1^*. Ist

$$a_1^* = a_2^* = \ldots = a_{p-1}^*, \; a_p^* \neq 0$$

so kann $T(w; \alpha_n, \gamma_n)$ auch geschrieben werden

$$\begin{aligned} T(w; \alpha_n, \gamma_n) &= \alpha_n + a_p^* (w - \gamma_n)^p \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{p} (a_\nu^{(n)} - a_\nu^*)(w - \gamma_n)^\nu + \lambda_n(w) \end{aligned}$$

wo wegen (6)

$$|\lambda_n(w)| \leqq \frac{M \left| \dfrac{w - \gamma_n}{\varrho} \right|^{p+1}}{1 - \left| \dfrac{w - \gamma_n}{\varrho} \right|} \qquad (|w - \gamma_n| < \varrho) .$$

Mit Hilfe von (5) schliessen wir hieraus

Hilfssatz 3. *Ist $V(\alpha^*, \gamma^*) = 0$, so gibt es ein $\varrho^* > 0$, so dass die Reihe $S(z; \alpha_n, \gamma_n)$ für jedes hinreichend grosses n in $|z - \alpha_n| < \varrho^*$ bis auf algebraische Singularitäten überall analytisch fortsetzbar ist und dabei beschränkt mit endlich vielen Zweigen bleibt.*

3.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Beweis unseres Satzes. Wir nehmen an, dass $W(z)$ über dem Punkte z_1 ($\in G$) genau N verschiedene Zweige hat. Bezeichnet

$$K_R\colon |z-z_1| < R \qquad (0<R<\infty)$$

eine Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt z_1, welche einschliesslich ihres Randes in G gelegen ist, so genügt es offenbar zu zeigen, dass $W(z)$ über jeder Kreisscheibe K_R höchstens algebraische Singularitäten hat. Wir bestimmen zu diesem Zwecke D als das grösste in K_R enthaltene Gebiet, das den Punkt z_1 enthält, und wo zugleich W überall N verschiedene Zweige hat. Dabei sollen die algebraischen Singularitäten, wo W endlich bleibt, hinzugerechnet werden. Indem

$$W_1, W_2, \ldots, W_N \tag{7}$$

die N Zweige von W bezeichnen, betrachten wir den Rand von D. Derselbe zerfällt in zwei Punktmengden O und Q. Von denselben besteht Q aus allen Punkten ζ am Rande von D, wo nicht alle Zweige (7) durch Entwicklungen von der Form

$$\gamma + c_1\sqrt[p]{z-\zeta} + c_2(\sqrt[p]{z-\zeta})^2 + \ldots \qquad (p \geqq 1) \tag{8}$$

in der Umgebung von ζ dargestellt werden können. Die Menge O besteht aus denjenigen Randpunkten ζ auf $|\zeta - z_1| = R$, wo sämtliche Zweige (7) in der Umgebung von ζ Darstellungen von der Form (8) gestatten. Offenbar ist O eine offene, Q eine geschlossene Menge.

Wir betrachten nun das Produkt

$$\varphi = W_1 W_2 \ldots W_N .$$

Ist $\zeta \in Q$, so gilt

$$\lim_{z\to\zeta} |\varphi(z)| = \infty \qquad (z \in D)$$

wieso z gegen ζ strebt, ausser möglicherweise, wenn W mindestens einen Zweig hat, der in ζ eine Darstellung (8) hat und ausserdem in ζ verschwindet. Mit Hilfe der Hilfssätze 2 und 3 schliessen wir hieraus, das die Anzahl der Stellen $\zeta \in Q$, wo

$$\varliminf_{z\to\zeta} |\varphi(z)| < \infty \qquad (z \in D) \tag{9}$$

stattfindet, endlich ist. Findet für ein $\zeta \in Q$ die Ungleichung (9) statt, so gibt es eine ganze Zahl $\mu \geqq 1$, so dass

$$\lim_{z\to\zeta} \left| \frac{\varphi(z)}{(z-\zeta)^{\mu}} \right| = \infty$$

wie so z gegen ζ strebt. Insbesondere folgt hieraus, dass φ auf $D \cup O$ höchstens endlich viele Nullstellen hat.

Nach dem hier bewiesenen kann man die Stellen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ in $O \cup Q$ und die dazu gehörenden ganzen Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ ($\geqq 1$) derartig bestimmen, dass die Funktion

$$\psi(z) = \frac{\varphi(z)}{\prod_{\nu=1}^{k} (z-\zeta_\nu)^{\mu_\nu}}$$

der Bedingung

$$\text{(10)} \qquad \lim |\psi(z)| = \infty \qquad (z \in D)$$

genügt, wie so z gegen die Punktmenge Q strebt (d.h. der Abstand gegen Null konvergiert), und dass ferner

$$\text{(11)} \qquad \underline{\lim}\, |\psi(z)| > 0 \qquad (z \in D)$$

wie so z gegen die Punktmenge O strebt.

Der erste Schritt nach diesen Vorbereitungen ist zu beweisen, dass D nach Hinzunahme eventueller Pole von ψ einfach zusammenhängend ist. Es sei Γ ein einfacher geschlossener Polygonzug in D, der in seinem Inneren eine nicht leere Teilmenge E von Q enthält. Wenn z ($\in D$) gegen E strebt, so gilt gleichmässig wegen (10)

$$\lim |\psi(z)| = \infty\,.$$

Man schliesst hieraus, dass die Kapazität von E gleich Null ist und daraus weiter, dass ψ im Inneren von Γ meromorph ist. Dies beweist die Behauptung.

Nach Hinzunahme der in D gelegenen Pole von ψ erhalten wir aus D ein einfach zusammenhängendes Gebiet D^*, wo ψ meromorph ist. Vermittels $z = z(\eta)$ bilden wir D^* umkehrbar eindeutig und konform auf die Kreisfläche $|\eta| < 1$ ab und betrachten die zusammengesetzte Funktion $f(\eta) = \psi(z(\eta))$. Nach dem oben gefundenen ((10) und (11)) ist

$$\text{(12)} \qquad \lim_{r\to 1} \inf_{r<|\eta|<1} |f(\eta)| > 0\,.$$

Ist $|\eta_0| = 1$, so trifft

$$\underline{\lim}_{\eta\to\eta_0} |f(\eta)| < \infty$$

dann und nur dann ein, wenn η_0 in der Bildmenge Ω von O vermöge $z = z(\eta)$ enthalten ist. Wäre D^* nicht mit K_R identisch, so wäre das Mass $m\Omega < 2\pi$ und somit wegen des Egoroffschen Satzes

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta = \infty\,.$$

Wegen (12) gilt anderseits

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left|\frac{1}{f(re^{i\vartheta})}\right| d\vartheta < \infty .$$

Da $f(\eta)$ höchstens endlich viele Nullstellen im Kreise $|\eta|<1$ hat, so folgt mit Hilfe des ersten Hauptsatzes (siehe R. Nevanlinna [2]), dass $m\Omega=2\pi$. D* ist demnach mit K_R identisch.

Aus dem hier bewiesenen geht hervor, dass die Menge $K_R \setminus D$ aus isolierten Punkten besteht. Es sei ζ ein Punkt in $K_R \setminus D$. Die Zweige $W_1, W_2, \ldots, W_k$ mögen in der Umgebung von ζ durch Entwicklungen von der Form (8) darstellbar sein, während dies für die übrigen Zweige

$$W_{k+1}, W_{k+2}, \ldots, W_N \tag{13}$$

nicht der Fall sei. Nach den Hilfssätzen 2 und 3 müssen die Zweige (13) dann alle gegen ∞ streben, wenn $z \to \zeta$. Die symmetrischen Grundfunktionen von

$$\frac{1}{W_{k+1}}, \frac{1}{W_{k+2}}, \ldots, \frac{1}{W_N}$$

müssen daher in ζ regulär sein. Die Zweige (13) haben somit algebraische Singularitäten in ζ, und dies beweist unseren Satz.

LITERATURVERZEICHNIS

1. E. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, t. II, 7. éd., Gauthier–Villars, Paris, 1949.
2. R. Nevanlinna, *Zur Theorie der meromorphen Funktionen*, Acta Math. 46 (1925), 1–99.
3. P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées a Stockholm*, Hermann, Paris, 1897.

STORA GRÅMUNKEGRÄND 1
11127 STOCKHOLM
SVERIGE