MATH. SCAND. 44 (1979), 345–356

PROPRIETES DE RADON–NIKODYM POUR LES CÔNES POSITIFS DE MESURES

A. GOLDMAN et M. TALAGRAND

Introduction.

Nous poursuivons l'étude amorcée dans (5) sur la propriété de Radon–Nikodym pour l'espace $M_\sigma^+(T)$ des mesures de Baire positives sur un espace complètement régulier T. Dans tout ce travail, $(\boldsymbol{m},\mu)$ désigne un couple constitué d'une mesure vectorielle $\boldsymbol{m}\colon \Sigma \to M_\sigma^+(T)$ définie sur une tribu Σ de parties d'un ensemble Ω, et d'une probabilité μ définie sur l'espace mesuré (Ω,Σ). Le rang relatif

$$S_\Omega = \left\{\frac{\boldsymbol{m}(A)}{\mu(A)}\ ;\ A \in \Sigma,\ \mu(A)>0\right\}$$

est toujours supposé borné dans l'espace $M_\sigma^+(T)$ (muni de la topologie étroite de la convergence simple sur l'espace $C^\infty(T)$ des fonctions continues et bornées sur T). En particulier, la mesure $\boldsymbol{m}$ est absolument continue par rapport à μ (en abrégé, on note $\boldsymbol{m} \ll \mu$).

Soit $N_n=\{x_1',\ldots,x_n'\}$ une suite finie d'éléments de $C^\infty(T)$; on désigne par π_N l'application $M_\sigma^+(T) \to \mathsf{R}^n$ définie par $\pi_N(v)=(v(x_i'))$, $1\leqq i\leqq n$. Pour tout i, $1\leqq i \leqq n$, soit $f_{x_i'}$ la densité scalaire de la mesure $x_i'\circ\boldsymbol{m}$ par rapport à μ (i.e. $x_i'\circ\boldsymbol{m} = f_{x_i'}\cdot\mu$); au couple $(\boldsymbol{m},\mu)$ on associe alors la mesure cylindrique λ sur $M_\sigma^+(T)$ définie par

$$\lambda(\pi_N^{-1}(B)) = \mu\{\omega \in \Omega\ ;\ (f_{x_i'}(\omega))_i \in B,\ 1\leqq i\leqq n\}\ ,$$

pour tout entier n, tout $N_n=(x_i')_i$ et tout borélien B de R^n. Il est clair que s'il existe une densité faible $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to M_\sigma^+(T)$ (c'est-à-dire, que pour tout $x' \in C^\infty(T)$, $x'\circ\boldsymbol{f}$ est une densité scalaire associée au couple $(x'\circ\boldsymbol{m},\mu)$), alors la mesure cylindrique λ coïncide avec la mesure image $\boldsymbol{f}(\mu)$.

On dira que l'espace $M_\sigma^+(T)$ vérifie la propriété de Radon–Nikodym lorsque, pour tout couple $(\boldsymbol{m},\mu)$ il existe une densité faible $\boldsymbol{f}$ associée. Rappelons encore le fait suivant bien connu: si vT désigne le repleté de l'espace complètement régulier T (voir [4]), alors on a $M_\sigma(T)=M_\sigma(vT)$.

Le premier des auteurs a obtenu dans [5], les résultats suivants:

Reçu le 1. mai, 1978.

1) L'espace $M_t^+(T)$ des mesures de Radon positives sur T possède toujours la propriété de Radon–Nikodym. De plus, pour tout couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$, la mesure cylindrique associée λ est de Radon et elle est concentrée à ε-près sur les compacts de Prokhorov [1] de l'espace $M_t^+(T)$.

2) Si pour tout couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$, la mesure cylindrique λ est de Radon, alors l'espace νT est universellement Radon-mesurable.

3) Dans le cas particulier où l'espace T est métrisable séparable, l'espace $M_\sigma^+(T)$ vérifie la propriété de Radon–Nikodym si et seulement si pour tout couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$ la mesure cylindrique associée λ est de Radon, ce qui équivaut encore à dire qu'on a l'égalité $M_\sigma(T) = M_t(T)$.

Dans le présent travail, on explicite complètement les relations qui existent entre la propriété de Radon–Nikodym, la mesurabilité universelle de νT dans le compactifié de Stone–Čech βT de T, et le fait que la mesure cylindrique λ soit de Radon; on étend par exemple le résultat 3) énoncé ci-dessus au cas des espaces métriques quelconques, on obtient la réciproque du résultat 2), etc. ...

1. Caracterisation des propriétés de mesurabilité universelle de νT en termes de mesures vectorielles.

(1.1) THEOREME. *Soit T un espace topologique complètement régulier; les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) *Pour tout couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$ où $\boldsymbol{m}$ est une mesure vectorielle $\Sigma \to M_\sigma^+(T)$, la mesure cylindrique associée λ est de Radon;*

b) *On a $M_\sigma(\nu T) = M_t(\nu T)$.*

PREUVE. b) $\Rightarrow$ a). C'est le théorème (4.2) de [5].

a) $\Rightarrow$ b). Soit $\mu \in M_\sigma^+(\nu T)$ et désignons par $\check{\mu}$ la mesure image sur βT définie par $\check{\mu}(B) = \mu(B \cap \nu T)$ pour toute partie de Baire $B \in \mathscr{B}a(\beta T)$. Considérons la mesure vectorielle $\boldsymbol{m}$: $(\beta T, \mathscr{B}a(\beta T), \mu) \to M_\sigma^+(\nu T)$ définie par $\langle \boldsymbol{m}(A), B \rangle = \mu(A \cap B)$, pour tout couple (A, B) appartenant à $\mathscr{B}a(\beta T) \otimes \mathscr{B}a(\nu T)$. Pour tout $A \in \mathscr{B}a(\beta T)$, on a $\|\boldsymbol{m}(A)\| \leqq \check{\mu}(A)$, ainsi le rang relatif associé au couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$ est borné dans $M_\sigma^+(\nu T)$. Comme la mesure cylindrique λ est de Radon, d'après le théorème (2.1) de (5), il existe, pour tout entier $n \geqq 1$, un compact $A_n \in \mathscr{B}a(\beta T)$ tel que l'on ait $\check{\mu}(A_n) \geqq 1 - 1/n$ et tel que l'ensemble

$$S_{A_n} = \left\{ \frac{\boldsymbol{m}(B)}{\mu(B)}\ ;\ B \in \mathscr{B}a(A_n),\ \mu(B) > 0 \right\}$$

soit relativement compact dans l'espace $M_\sigma^+(\nu T)$. Fixons un entier $n \geqq 1$ et soit K_n le support de la mesure induite $\check{\mu}_{A_n}$. Alors K_n est inclus dans νT; en effet, dans le cas contraire, il existe une fonction $f \in C^{\infty}(T), f>0$ sur νT, et un point $x \in K_n \setminus \nu T$ tels que l'on ait $f(x)=0$. Pour tout entier $p \geqq 1$, posons

$$F_p = \{y \in K_n\,,\ |f(y)| \leqq 1/p\};$$

on a d'une part $\check{\mu}(F_p)>0$ et d'autre part

$$\nu_p(F_p) = \frac{\langle \boldsymbol{m}(F_p), F_p\rangle}{\check{\mu}(F_p)} = 1\,.$$

Evidemment ceci est absurde puisque la suite $(\nu_p) \subset S_{A_n}$ est relativement compacte dans $M_\sigma^+(\nu T)$, et que la suite décroissante $(F_p)_{p \geqq 1}$ est d'intersection vide sur νT. Il résulte de tout ceci que la mesure $\check{\mu}$ est concentrée sur νT, mais cela signifie exactement que μ est de Radon sur νT.

La même méthode permet de donner une caractérisation analogue pour l'espace $M_\tau(T)$ des mesures τ-régulières (voir [8]), sous la forme suivante:

(1.2) THEOREME. *Soit T un espace topologique complètement régulier; les assertions suivantes sont équivalentes*:

a) *Pour tout couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$ où $\boldsymbol{m}$ est une mesure vectorielle à valeurs dans l'espace $M_\tau^+(T)$, la mesure cylindrique associée λ est de Radon.*

b) *On a $M_\tau(T) = M_t(T)$, c'est-à-dire que l'espace T est universellement Radon-mesurable.*

PREUVE. b) $\Rightarrow$ a). Voir [5, théorème (5.2)].

a) $\Rightarrow$ b). Soit $\mu \in M_\tau^+(T)$ et désignons par μ sa mesure image sur βT définie par $\mu(B) = \mu(B \cap T)$, pour tout borélien $B \in \mathscr{B}(\beta T)$. Par un argument identique à celui développé dans la preuve de (1.1), il existe un compact $A_n \subset \beta T$ tel que l'on ait $\mu(A_n) \geqq 1-1/n$ et tel que l'ensemble

$$S_{A_n} = \left\{\frac{\boldsymbol{m}(B)}{\mu(B)}\,,\ B \in \mathscr{B}(A_n),\ \mu(B)>0\right\}$$

soit relativement compact dans $M_\tau^+(T)$; $\boldsymbol{m}$ désigne bien sûr la mesure vectorielle $(\beta T, \mathscr{B}(\beta T), \mu) \to M^+(T)$ définie par $\langle \boldsymbol{m}(A), B\rangle = \check{\mu}(A \cap B)$, pour tout couple (A,B) appartenant à $\mathscr{B}(\beta T) \otimes \mathscr{B}(T)$. En fait, on peut même supposer que A_n est le support de la mesure induite $\check{\mu}_{A_n}$. Fixons $n \geqq 1$ et montrons que A_n est inclus dans T. Sinon, il existe un point $x \in A_n \setminus T$; si $\mathscr{V}(x)$ désigne l'ensemble des voisinages fermés de x, pour tout $V \in \mathscr{V}(x)$, on pose

$$\nu_V = \frac{\boldsymbol{m}(V \cap A_n)}{\check{\mu}(V \cap A_n)}\,;$$

on a alors $\nu_V(V)=1$, pour tout $V \in \mathscr{V}(x)$, $(\bigcap_{V \in \mathscr{V}(x)} V) \cap T = \varnothing$, et la famille

$(\nu_V)_V \subset S_{A_n}$ est relativement compacte. Compte tenu de la caractérisation des parties compactes de $M_\tau^+(T)$, on obtient évidemment une contradiction. Il en résulte que la mesure $\check{\mu}$ est concentrée sur T, ce qui suffit.

REMARQUE. Notons qu'il est possible de donner une démonstration plus directe de (1.1) et (1.2), en faisant appel à un resultat récent de G. A. Edgar [2]. Montrons par exemple (1.1) (le théorème (1.2) s'établissant d'une manière identique).

L'espace νT s'identifie à un sous-espace fermé de l'espace $M_\sigma(T)$, muni de la topologie étroite. Fixons une probabilité $\lambda \in M_\sigma^+(T)$; elle induit sur $M_\sigma(T)$ une mesure cylindrique, notée λ. Il est clair que λ provient d'un couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$, ainsi la mesure cylindrique λ est de Radon sur $M_\sigma(T)$. Pour toute partie de Baire $B \supset \nu T$ appartenant à la tribu engendrée par les formes linéaires continues, on a $\lambda(B)=1$. Mais d'aprés ([2, p. 10]), la tribu de Baire d'un espace faible coïncide avec la tribu engendrée par les formes linéaires continues, donc on a $\lambda(\nu T)=1$ et la mesure λ est de Radon sur l'espace νT.

La démonstration ci-dessus nous a été indiquée par J. K. Pachl, qui nous a également proposé le contre-exemple suivant:

EXEMPLE (1.3). Soit I l'intervalle $[0, 1[$ muni de la topologie usuelle et soit T le même intervalle muni de la topologie engendrée par les intervalles de la forme $[a, b[$, $0 \leqq a \leqq b < 1$, (cf. [8, exemple 3, p. 250] et [3 1.2.2]). L'espace T vérifie les propriétés suivantes:

a) Pour tout couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$ où $\boldsymbol{m}$ est une mesure vectorielle à valeurs dans $M_\sigma^+(T)$, il existe une densité faible à valeurs dans $M_\tau^+(T)$.

b) L'espace T est replet et n'est pas Radon-universellement mesurable.

PREUVE. D'après [3, 3.8.14, p. 68], l'espace T est de Lindelöf, donc il est replet et on a $M_\sigma(T)=M_\tau(T)$. Les espaces I et T ont les mêmes tribus boréliennes; ainsi, la mesure de Lebesgue sur I définit une mesure appartenant à l'espace $M_\sigma(T)$, qui n'est pas de Radon car toute partie compacte de T est dénombrable (voir [3, 3.1.B]). L'assertion a) s'obtient en utilisant la même proprieté de l'espace I: si $\boldsymbol{m}$ est une mesure à valeurs dans $M_\sigma^+(T)$ et si $\boldsymbol{f}$ est la densité faible associée (à valeurs dans $M_\sigma^+(I)$), alors $\boldsymbol{f}$ est encore une densité faible de $\boldsymbol{m}$, considérée à valeurs dans $M_\sigma^+(T)$, puisque les espace I et T ont les mêmes parties de Baire.

2. Le cas metrisable.

Dans le cas particulier où l'espace T est métrisable, le théorème (1.2) peut être complété de la manière suivante:

(2.1) THEOREME. *Soit T un espace métrisable. Si pour tout couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$, où $\boldsymbol{m}$ est une mesure vectorielle à valeurs dans l'espace $M_\tau^+(T)$, il existe une densité faible $\boldsymbol{f}$ à valeurs dans l'espace $M_\sigma^+(T)$, on a alors l'égalité $M_\tau(T) = M_t(T)$ (c'est-à-dire encore, l'espace T est universellement Radon-mesurable et la mesure cylindrique λ associée au couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$ est de Radon).*

PREUVE. Soient μ un élément de $M_\tau^+(T)$, $\check{\mu}$ la mesure borélienne sur $(\beta T, \mathscr{B}(\beta T))$ définie par $\check{\mu}(B) = \mu(B \cap T)$ et considérons la mesure vectorielle $\boldsymbol{m}$: $(\beta T, \mathscr{B}(\beta T), \check{\mu}) \to M_\tau^+(T)$ définie par $\langle \boldsymbol{m}(A), B \rangle = \mu(A \cap B)$, pour tout couple (A, B) appartenant à $\mathscr{B}(\beta T) \otimes \mathscr{B}(T)$. Comme la mesure $\check{\mu}$ est elle-même régulière, elle est de Radon; soit S son support dans βT et désignons par $\boldsymbol{f}$: $\beta T \to M_\sigma^+(T)$ la densité faible associée au couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$. On a alors:

$$\langle \boldsymbol{m}(S), T \rangle = \check{\mu}(S) = 1 = \int_{\beta T} f(\omega)(S \cap T)\, d\check{\mu}(\omega) .$$

Ainsi $f(\omega)(S \cap T) = 1$, $\check{\mu}$-presque partout. Par ailleurs, on a $S = \overline{S \cap T}$, puisque tout ouvert de βT disjoint de T est de mesure nulle. Finalement, comme l'espace $S \cap T$ est métrisable séparable (voir par exemple [5], proposition (4.9)), on est ramené au cadre de la démonstration de (4.7) de [5], ce qui suffit.

Pour obtenir des résultats plus fins dans la même direction, nous aurons besoin des notions suivantes:

(2.2) DEFINITION. Un espace mesuré (X, Σ, μ) est dit parfait lorsque, pour toute application mesurable f: $X \to \mathsf{R}$ et pour toute partie $A \subset \mathsf{R}$ telle que $f^{-1}(A)$ appartienne à Σ, il existe une partie $B \subset A$, $B \in \mathscr{B}(\mathsf{R})$, vérifiant $\mu(f^{-1}(B)) = \mu(f^{-1}(A))$.

(2.3) DEFINITION. Un espace mesuré (X, Σ, μ) est dit compact lorsqu'il existe une sous-famille $\mathscr{C} \subset \Sigma$, appelée classe compacte, qui est stable par réunion finie, par intersection dénombrable, et telle que l'on ait:

a) Pour toute suite (C_n) d'élément de $\mathscr{C}$ telle $\bigcap_n C_n = \emptyset$, il existe une sous-suite finie d'intersection vide.

b) Pour tout $A \in \Sigma$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C \in \mathscr{C}$, $C \subset A$, vérifiant $\mu(C) \geqq \mu(A) - \varepsilon$.

J. K. Pachl a donné dans (6) le résultat suivant:

(2.4) THEOREME (Pachl). *Soient T un espace topologique complètement régulier, $\mu \in M_\sigma^+(T)$ une mesure de Baire positive sur T et soit $\check{\mu}$ la mesure induite sur βT. Si la mesure vectorielle*

$$\boldsymbol{m}\colon (\beta T, \mathscr{B}a(\beta T), \check{\mu}) \to M_\sigma^+(T)$$

canoniquement associée admet une densité faible, alors l'espace mesuré $(T, \mathscr{B}a(T), \mu)$ *est compact.*

Il est bien classique que tout espace mesuré compact est parfait (voir par exemple [8]). Si on suppose de plus que T est métrisable séparable, alors l'espace mesuré $(T, \mathscr{B}a(T), \mu)$ est parfait si et seulement si il est compact, ce qui équivaut encore au fait que μ soit de Radon sur T. Ainsi le théorème (2.4) redonne également le théorème (4.7) de [5].

Notons également que le théorème (2.4) joint au corollaire 1 du théorème 11 de [8, p. 251], permet de retrouver le théorème (2.1).

Pour terminer, donnons un résultat plus fin qui va permettre d'étendre le théorème (2.1) au cas d'un espace métrisable quelconque (on pourra consulter [7] pour le cas particulier où l'espace est replet).

(2.5) THEOREME. *Soient T un espace métrisable et $\mu \in M_\sigma^+(T)$, une mesure de Baire positive sur T. On suppose que l'espace mesuré $(T, \mathscr{B}a(T), \mu)$ est parfait, alors μ appartient à l'espace $M_t^+(vT)$, c'est-à-dire que μ est de Radon sur le replété vT.*

Déduisons tout de suite de ce théorème la conséquence annoncée ci-dessus:

(2.6) THEOREME. *Pour un espace métrisable T, les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) *Pour tout couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$, où $\boldsymbol{m}$ est une mesure vectorielle à valeurs dans $M_\sigma^+(T)$, il existe une densité faible associée $\boldsymbol{f}\colon \Omega \to M_\sigma^+(T)$.*

b) *Pour tout couple $(\boldsymbol{m}, \mu)$, où $\boldsymbol{m}$ est à valeurs dans l'espace $M_\sigma^+(T)$, la mesure cylindrique associée est de Radon sur $M_\sigma^+(T)$.*

c) *On a l'égalité: $M_\sigma(T) = M_t(vT)$.*

PREUVE DE (2.6). On a déjà établi les implications c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a). Le point a) $\Rightarrow$ c) résulte immédiatement de (2.4) et (2.5).

PREUVE DE (2.5). Commençons par établir ce résultat pour un espace T discret, le cas général résultant de cette situation privilégiée.

(2.7) LEMME. *Soit T un espace discret et supposons que l'espace mesuré $(T, \mathscr{B}a(T), \mu)$ soit parfait (ici μ désigne une mesure de Baire positive et bornée sur T). Alors la mesure μ est atomique sur vT, c'est-à-dire de la forme $\sum_1^\infty \alpha_n \delta_{x_n}$, avec $(\alpha_n) \in l^1(\mathbf{N})$ et $(x_n) \subset vT$.*

PREUVE. Décomposons la mesure μ en sa partie atomique μ_a et sa partie diffuse μ_d. Il est clair que l'espace mesuré $(T, \mathscr{B}a(T), \mu_d)$ est encore parfait. Raisonnons par l'absurde en supposant la mesure μ_d non nulle, ce qui revient à supposer, sans restreindre la généralité du résultat que μ_d est une probabilité. Introduisons maintenant la notation suivante: si (A_n) est une suite de parties de T et $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ un élément de $K = \{-1, +1\}^{\mathbf{N}}$, i.e. une suite de nombres réels égaux à ± 1, on posera $\varepsilon_n A_n = A_n$ si $\varepsilon_n = +1$ et $\varepsilon_n A_n = T \setminus A_n$ si $\varepsilon_n = -1$.

La mesure μ_d étant diffuse, il existe une suite (A_n) de parties de T telle que l'on ait

$$\mu_d\left(\bigcap_{n=1}^{k} \varepsilon_n A_n\right) = 2^{-k}$$

pour tout $k \geqq 1$ et toute suite $(\varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^{\mathbf{N}}$. Considérons l'application $\varphi: T \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$ définie par $\varphi(t) = (1_{A_n}(t))_n$, où 1_{A_n} désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A_n. Il est facile de voir que la mesure image $v = \varphi(\mu_d)$ coïncide sur K avec la mesure de Haar canonique. Soit maintenant H une partie quelconque de K; l'ensemble $\varphi^{-1}(H)$ est trivialement une partie de Baire de T (puisque T est discret) et comme l'espace mesuré $(T, \mathscr{B}a(T), \mu_d)$ est supposé parfait, il existe deux boréliens B et B' de K, $B \subset H$, $B' \subset K \setminus H$, vérifiant $v(B) + v(B') = 1$. Mais cela implique que toute partie H de K est mesurable, ce qui est évidemment absurde. En conclusion, la mesure μ est atomique; mais sur un espace discret T, les deux mesures libres correspondent exactement aux points du repleté vT (voir [4]), et ainsi on obtient le résultat souhaité.

Pour étendre ce résultat au cas d'un espace métrique quelconque, on utilisera le lemme suivant (voir [9, lemme 3.3]).

(2.8) LEMME. *Soit T un espace métrisable; il existe alors:*

a) *Un système projectif dénombrable $(X_n, P_{n,m})$, $1 \leqq n < m$, d'espaces discrets;*

b) *Un espace X et une suite cohérente d'applications φ_n: $X \to X_n$;*

c) *Une application bijective θ: $X \to T$ telle que θ^{-1} soit mesurable (pour les tribus $\mathscr{B}(T)$ et $\mathscr{B}(X)$) et θ soit continue lorsque l'espace X est muni de la topologie initiale associée aux applications φ_n.*

Donnons maintenant les grandes lignes de la preuve du théorème (2.5). Notons tout d'abord que si l'espace $(T, \mathscr{B}(T), \mu)$ est parfait alors, en suivant les notations du lemme (2.8), il en est de même pour l'epace $(X, \mathscr{B}(X), \theta^{-1}(\mu))$. Comme l'image d'une mesure de Radon par une application continue est encore de Radon, et l'application θ étant precisément continue, pour conclure il suffit donc de prouver que la mesure $\check{\mu} = \theta^{-1}(\mu)$ est de Radon sur le repleté vX de X.

Reprenons l'espace métrique X, ainsi que le systeme projectif $\tau=(X_n, P_{n,p})$, $1 \leqq p \leqq n$, décrit dans le lemme (2.8). On a donc le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\varphi_p"'] & X_n \arrow[d, "P_{n,p}"] \\ & X_p \end{tikzcd}$$

On suppose pour simplifier que μ est une probabilité et on pose $\mu_n=\varphi_n(\check{\mu})$. Les espaces $(X_n, \mathscr{B}(X_n), \mu_n)$ étant parfaits, il résulte du lemme (2.7), que les mesures μ_n sont de Radon et atomiques sur les espaces respectifs vX_n, $n \geqq 1$.

On conviendra de noter encore par μ_n la mesure de Baire sur vX_n image de μ_n par l'injection canonique; de même on notera encore par $\check{\mu}$ la mesure $\check{\mu}$ lue sur vX. En prolongeant les applications aux replétés, on obtient le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} vX \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[dr, "\varphi_p"'] & vX_n \arrow[d, "P_{n,p}"] \\ & vX_p \end{tikzcd}$$

(par abus de notation on ecrira encore φ_n à la place de l'application prolongée φ_n^v).

La famille $\tau^v=(vX_n, P_{n,p})$, $1 \leqq p \leqq n$, est un systeme projectif dénombrable d'espaces topologiques; désignons par Y sa limite projective. En vertu du théorème de Kolmogoroff [1, p. 53], il existe une mesure $\tilde{\mu}$ sur Y qui est limite projective du systeme projectif de mesures (μ_n). Ainsi pour tout $\varepsilon>0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset Y$ tel que l'on ait $\tilde{\mu}(K_\varepsilon) \geqq 1-\varepsilon$.

Nous allons montrer que l'espace vX se plonge topologiquement dans Y puis, grace au fait que l'ensemble $F_\varepsilon=K_\varepsilon \cap vX$ est métrisable séparable, nous expliciterons un compact $K'_\varepsilon \subset F_\varepsilon$ vérifiant $\tilde{\mu}(K'_\varepsilon) \geqq 1-3\varepsilon$, ce qui terminera cette demonstration. Venons-en aux preuves.

(2.9) Proposition. *L'application J: $vX \to Y$ définie par $J(y)=(\varphi_n(y))$, $n \geqq 1$, est un isomorphisme de vX sur son image $J(vX)$. Autrement dit, l'application J réalise un plongement de vX dans Y.*

Preuve. Pour tout $n \geqq 1$, considérons l'application ψ_n: $X_n \to X$ vérifiant $\varphi_n \circ \psi_n = I_{X_n}$ (on a donc pour tout $x \in X_n$, $\psi_n(x) \in \varphi_n^{-1}(x)$). Pour toute fonction continue f sur X on a:

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(\psi_n(\varphi_n(x))) .$$

Ceci étant, nous allons montrer que l'application J est injective. Soient donc

$x \neq y$ deux points de νX et soit $f\colon \nu X \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \neq f(y)$. Notons par f_X la restriction de f à l'espace X et par h_n les fonctions continues $h_n = f_X \circ \psi_n \circ \varphi_n$. Finalement h_n^{ν} désigne le prolongement canonique de h_n à l'espace νX. Il existe deux points u et v appartenant à X qui vérifient $f(x) = f_X(u)$, $f(y) = f_X(v)$, $h_n(x) = h_n(u)$ pour tout $n \geqq 1$, $h_n(y) = h_n(v)$ pour tout $n \geqq 1$ (voir [4, p. 118]). Ainsi la condition $f(x) \neq f(y)$ implique l'existence d'un entier $n \geqq 1$ tel que l'on ait $\varphi_n(x) \neq \varphi_n(y)$, c'est-à-dire $J(x) \neq J(y)$.

Pour montrer que la topologie induite par Y coïncide avec celle de νX, nous allons établir que l'espace X est C^{∞}-plongé ([4, p. 17]) dans l'espace $Y_0 = J(\nu X)$, muni de la topologie induite par celle ce Y. Si ce point est acquis, l'espace X étant G_δ dense dans Y_0, il est nécessairement C-plongé ([4, p. 19]) donc les espaces de fonctions continues sur les espaces νX et Y_0 coïncident, ce qui suffit. Reste à prouver ce point.

(2.10) Lemme. *L'espace X est C^{∞}-plongé dans l'espace $Y_0 = J(\nu X)$.*

Preuve. Soient

$$A = \bigcap_n \varphi_n^{-1}(H_n), \qquad B = \bigcap_n \varphi_n^{-1}(K_n); \qquad H_n, K_n \subset X_n,\ n \geqq 1\ ,$$

deux fermés disjoints de X. Supposons qu'il existe un point $x \in \bar{A}^{Y_0} \cap \bar{B}^{Y_0}$, on a alors

$$(1_{\bar{K}_n^{\nu} X_n} \circ \varphi_n)(x) = (1_{\bar{H}_n^{\nu} X_n} \circ \varphi_n)(x) = 1$$

pour tout $n \geqq 1$. Les adhérences des ensembles K_n et H_n sont des ensembles à la fois ouverts et fermés dans νX_n. Les fonctions considérées ci-dessus sont donc toutes continues sur l'espace νX (pour la topologie du repleté νX), il existe donc un point $y \in X$ tel que l'on ait

$$(1_{K_n} \circ \varphi_n)(y) = (1_{H_n} \circ \varphi_n)(y) = 1$$

pour tout $n \geqq 1$, le point y appartient donc à A et B ce qui est évidemment absurde. En conclusion, deux fermés disjoints de X ont des adhérences disjointes dans Y_0, ce qui en vertu de [4, p. 84] prouve le lemme.

Nous identifierons désormais νX avec son image $J(\nu X)$. L'étape suivante va consister à montrer que l'on peut séparer tout point $x \in Y \setminus \nu X$ de l'espace νX, par un noyau de Y.

(2.11) Proposition. *Pour tout point $x \in Y \setminus \nu X$, il existe un ensemble Z de Y contenant le point x, tel que Z soit un G_δ de Y (intersection dénombrable d'ensembles ouverts de Y) et tel que $Z \cap \nu X = \emptyset$.*

Preuve. On procède de la même façon que dans la preuve ci-dessus. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un point $x \in Y \setminus vX$ tel que tout ensemble G_δ contenant le point x, rencontre vX; considérons l'espace $V = X \cup \{x\}$ muni de la topologie induite par celle de Y. Il est facile de voir que si (g_n), $n \geqq 1$, est une suite de fonction continues sur V, il existe un point $y \in X$ tel que l'on ait $g_n(x) = g_n(y)$ pour tout $n \geqq 1$. Cette proprieté implique à son tour que X est C^∞-plongé dans V, donc C-plongé puisque déja G_δ-dense dans V. Ceci est évidemment absurde puisque le point x n'appartient pas à vX.

Revenons à la mesure $\tilde{\mu} = \varprojlim \mu_n$ qui est de Radon sur $Y = \varprojlim vX_n$. Il est immediat que $\tilde{\mu}$ coïncide en tant que mesure de Baire avec la mesure image de $\check{\mu}$ par l'injection canonique.

Fixons $\varepsilon > 0$, comme les mesures μ_n sont atomique sur les espaces vX_n, il est facile de voir ([1, p. 53]), qu'il existe un compact métrisable $K_\varepsilon \subset Y$ vérifiant les propriétés suivantes:

a) $\tilde{\mu}(K_\varepsilon) \geqq 1 - \varepsilon$;
b) Pour tout $n \geqq 1$, l'ensemble $\varphi_n(K_\varepsilon) \subset vX_n$ est fini.

Posons

$$\varphi_n(K_\varepsilon) = \{x_n^1, \ldots, x_n^{k_n}\} \qquad \text{et} \qquad F_\varepsilon = K_\varepsilon \cap vX \,.$$

Supposons l'ensemble $K_\varepsilon \setminus F_\varepsilon$ non vide (dans le cas contraire il n'y aurait plus rien à démontrer). A tout point $x \in K_\varepsilon \setminus F_\varepsilon$, associons une suite (A_n^x), $n \geqq 1$, de parties de Y vérifiant les points suivants:

a) $A_n^x = \bar{\varphi}_n^1(B_n^x)$, où B_n^x est un ensemble à la fois ouvert et fermé dans vX_n;
b) $[\bigcap_{n \geqq 1} A_n^x] \cap vX = \varnothing$;
c) $x \in \bigcap_{n \geqq 1} A_n^x$.

Une telle construction est légitimée par (2.11). Fixons deux entiers n et k tels que $1 \leqq k \leqq k_n$ et posons

$$C_n^k = \bigcap_{x \in \varphi_n^{-1}(x_n^k)} B_n^x$$

(l'ensemble C_n^k pouvant être éventuellement vide).

Le lemme suivant est tout-à-fait essentiel dans la suite de la preuve.

(2.12) Lemme. *Les ensembles C_n^k sont à la fois ouverts et fermés dans les espaces respectifs vX_n.*

Preuve du lemme. Soit $u \in C_n^k$; un tel point définit une 2-mesure [4] sur X_n. Si μ_u est la mesure associée, on a $\mu_u(B_n^x \cap X_n) = 1$ pour tout point x de $K_\varepsilon \setminus F_\varepsilon$

vérifiant $\varphi_n(x)=x_n^k$. Par ailleurs le cardinal de K_ε est moderé (car card $(K_\varepsilon) \leqq 2^{\aleph_0}$), il en résulte ([4, p. 163]) que u appartient à l'adhérence, dans vX_n, de l'ensemble $X_n \cap (\bigcap_{x \in \varphi_n^{-1}(x_n^k)} B_n^x)$. On a donc prouvé que $C_n^k = \overline{C_n^k X_n^k}^{vX_n}$, c'est-à-dire que C_n^k est un « of » de vX_n.

Ce point étant acquis, construisons par récurrence une suite d'ensembles (D_n^k) satisfaisant aux conditions suivantes:

a) $D_n^k \subset C_n^k$ si $C_n^k \neq \varnothing$;
b) $x_n^k \in D_n^k$ pour tout $n \geqq 1$ *et tout* $1 \leqq k \leqq k_n$;
c) Pour tout $n \geqq 1$, les ensembles (D_n^k), $1 \leqq k \leqq k_n$, sont deux à deux disjoints;
d) Les ensembles (D_n^k) sont des « of » de vX_n;
e) Pour tout triplet (n,k',k) vérifiant $P_{n+1,n}(x_{n+1}^{k'})=x_n^k$, on a $P_{n+1,n}(D_{n+1}^{k'}) \subset D_n^k$.

Posons maintenant $M=\bigcap_n [\varphi_n^{-1}(\bigcup_k D_n^k)]$, puis $N=M \cap vX$. Les ensembles M et N sont respectivement des parties de Baire de Y et vX. Pour tout $t \in N$ il existe une unique suite (D_n^k) telle que l'on ait $\varphi_n(t) \in D_n^k$; le point $x=(x_n^k)$ correspondant appartient à F_ε. Soit $h\colon N \to F_\varepsilon$ l'application ainsi définie; remarquons que pour tout $x \in F_\varepsilon \subset N$ on a $h(x)=x$. Désignons par $\mathscr{B}a_N(vX)$ la trace de la tribu de Baire de vX sur N.

(2.13) Proposition. *L'application* $h\colon (N, \mathscr{B}a_N(vX)) \to (F_\varepsilon, \mathscr{B}(F_\varepsilon))$ *est mesurable (et même continue). De plus, si* μ_N *désigne la mesure induite par* $\check{\mu}$ *sur* $(N, \mathscr{B}a_N(vX))$ *et si* $h(\mu_N)$ *est la mesure image sur* F_ε *on a*

$$\mu_N(\varphi_n^{-1}(V)) \geqq h(\mu_N)[(\varphi_n^{-1}(V)) \cap F_\varepsilon] - \varepsilon ,$$

pour tout $n \geqq 1$ *et tout ensemble* V *à la fois ouvert et fermé dans l'espace* vX_n *correspondant.*

Preuve. Fixons un point $x=(x_n^k) \in F_\varepsilon$ ainsi qu'un voisinage élementaire U de x de la forme $U=\varphi_n^{-1}(x_n^k)$. On a

$$h^{-1}(U) = \varphi_n^{-1}(D_n^k) \cap N ,$$

ainsi $h^{-1}(U)$ est la trace sur N d'un « of » de vX. L'espace F_ε étant métrisable séparable la premiere assertion de la proposition en resulte.

Soit maintenant V un « of » de vX_n, notons $I_n=(k\ ;\ x_n^k \in V)$ puis

$$W = \bigcup_{k \in I_n} \varphi_n^{-1}(D_n^k) .$$

On obtient

$$\begin{aligned} h(\mu_N)(\varphi_n^{-1}(V)) &= \check{\mu}(W \cap N) \leqq \check{\mu}(\varphi_n^{-1}(V) \cap N) + \check{\mu}\left(\varphi_n^{-1}\left[\left(\bigcup_{k \in I_n} D_n^k\right) \setminus V\right]\right) \\ &\leqq \check{\mu}(\varphi_n^{-1}(V) \cap N) + \varepsilon , \end{aligned}$$

la derniere égalité résultant du fait que, lu dans Y, l'ensemble $\varphi_n^{-1}((\bigcup_{k\in I_n} D_n^k)\setminus V)$ est de Baire et disjoint de K_ε.

Fin de la preuve du theoreme (2.5). L'ensemble N appartenant à la tribu de Baire de vX, l'espace mesuré $(N, \mathscr{B}a_N(vX)), \mu_N)$ est parfait, donc l'espace mesuré $(F_\varepsilon, \mathscr{B}(F_\varepsilon), h(\mu_N)$ est parfait également (8). Comme l'ensemble F_ε est métrisable séparable il existe un compact $K'_\varepsilon \subset F_\varepsilon$ tel que l'on ait

$$h(\mu_N)(K'_\varepsilon) \geqq h(\mu_N)(F_\varepsilon) - \varepsilon \geqq 1 - 2\varepsilon\ .$$

Un systeme fondamental de voisinages ouverts de K'_ε dans Y est constitué par des ensembles de la forme $U = \bigcup_{n\geqq 1} \varphi_n^{-1}(V_n)$, les ensembles V_n étant des « of » de vX_n, et la suite $(\varphi_n^{-1}(\mathrm{V}_n))$ étant croissante. Pour un tel ensemble $U \supset K'_\varepsilon$ on a, en vertu de (2.13),

$$\tilde{\mu}(U) \geqq \check{\mu}(U \cap N) \geqq h(\mu_N)(U \cap F_\varepsilon) - \varepsilon \geqq 1 - 3\varepsilon\ ,$$

ainsi on a $\tilde{\mu}(K'_\varepsilon) \geqq 1 - 3\varepsilon$ et le resultat est acquis.

BIBLIOGRAPHIE

1. N. Bourbaki, *Intégration*, chap. IX (Act. Sci. Ind. 1343), Hermann, Paris, 1969.
2. G. A. Edgar, *Measurability in a Banach Space*, Indiana Univ. Math. J. 26 (1977), 663–677.
3. R. Engelking, *General Topology*, Warszawa, 1977.
4. L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, van Nostrand, Princeton, 1960.
5. A. Goldman, *Mesures cylindriques, mesures vectorielles et questions de concentration cylindrique*, Pacific J. Math. 69 (1977), 385–413.
6. J. K. Pachl, *Disintegration and compact measures*, Math. Scand. 43 (1978), 157–168.
7. J. K. Pachl, *Two classes of measures*, Københavns Universitet Matematisk Institut, Preprint Series 1977, n° 34.
8. V. V. Sazonov, *On perfect measures*, Amer. Math. Soc. Transl., (2), 48 (1965), 229–254.
9. A. H. Stone, *Non separable Borel sets*, Rozprawy Matematyczne, 28, 1962.

UNIVERSITÉ PARIS VI, FRANCE

ET

UNIVERSITÉ LYON 1, FRANCE