MATH. SCAND. 45 (1979), 103–117

SUR LA REPRODUCTIBILITE DES ESPACES l_p

C. SAMUEL

Résumé.

Dans ce travail on étudie les propriétés de reproductibilité des espaces l_p dans les produits tensoriels topologiques d'espaces de Banach.

1. Introduction.

Deux espaces de Banach E et F sont isomorphes s'il existe une application linéaire T de E sur F et deux réels $0<a\leqq b$ tels que pour tout $x \in E$

$$a\|x\| \leqq \|T(x)\| \leqq b\|x\| .$$

Si E est un espace de Banach nous notons B_E la boule unité fermée de E et nous notons E' le dual topologique de E.

Rappelons que si E et F sont deux espaces de Banach, la norme ε sur $E\otimes F$ est définie par

$$\|u\|_\varepsilon = \sup\{|\varphi\otimes\psi(u)| \ ; \ \varphi \in B_{E'} \text{ et } \psi \in B_{F'}\}$$

et la norme π est définie par

$$\|u\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| \ ; \ u=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i\right\} .$$

Nous notons $E\otimes_\varepsilon F$ l'espace $E\otimes F$ muni de la norme ε, $E\hat{\hat{\otimes}}F$ le complété de $E\otimes_\varepsilon F$, $E\otimes_\pi F$ l'espace $E\otimes F$ muni de la norme π et $E\hat{\otimes}F$ le complété de $E\otimes_\pi F$.

Le symbole l_∞ notera ici l'espace des suites de scalaires qui convergent vers 0 muni de la norme sup. (habituellement noté c_0).

L'objet de ce travail est de montrer que si pour un espace de Banach E, $l_p\hat{\otimes}E$ contient un sous-espace isomorphe à l_q, $1\leqq p<q\leqq\infty$, alors E'' a un sous-espace isomorphe à l_q et si $l_p\hat{\hat{\otimes}}E$ contient un sous-espace isomorphe à l_r, $1\leqq r<p$, alors E contient un sous-espace isomorphe à l_r. Pour obtenir ces résultats nous donnons tout d'abord une interprétation de $l_p\hat{\hat{\otimes}}E$ comme espace de suites d'éléments de E. Nous caractérisons ensuite les r pour lesquels l_r est isomorphe à un sous-espace de $l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q$. De cette caractérisation nous déduisons que les

Reçu le 12. juillet, 1978.

résultats précédents ne peuvent pas être améliorés. Nous établissons ensuite que si pour ordinal dénombrable α et un espace de Banach E, l'espace $C(\alpha; E)$ des fonctions continues de $\langle 1, \alpha \rangle$ dans E contient un sous-espace isomorphe à l_q, $1 \leqq q < \infty$, alors E contient un sous-espace isomorphe à l_q.

Etant donné $1 \leqq p < \infty$ nous convenons de noter p' le réel défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

avec la convention $p' = \infty$ si $p = 1$ et $p' = 1$ si $p = \infty$.

Si $(x_n)_n$ est une suite d'un espace de Banach E, on note $[x_n]_{n=1}^{\infty}$, le sous-espace fermé engendré par les vecteurs x_n, $n = 1, 2, \ldots$

Pour les définitions et propriétés classiques on pourra se reporter à [5] et [9].

2. Etude de $l_p \hat{\hat{\otimes}} E$.

Soient E un espace de Banach et $1 \leqq p \leqq \infty$; on note pour $1 \leqq p < \infty$

$$sl_p(E) = \left\{ x = (x_n)_n \ ; \ \forall n \quad x_n \in E \text{ et } \forall \varphi \in E' \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty \right\}$$

et pour $p = \infty$

$$sl_\infty(E) = \left\{ x = (x_n)_n \ ; \ \forall n \quad x_n \in E \text{ et } \forall \varphi \in E' \lim_{n \to \infty} \varphi(x_n) = 0 \right\}.$$

Il est immédiat que pour $1 \leqq p \leqq \infty$ $sl_p(E)$ est un espace vectoriel.

Remarques. 1) Pour tout $x = (x_n)_n \in sl_p(E)$ on a

$$\sup \left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{1/p} \ ; \ \varphi \in B_{E'} \right\} < \infty \quad \text{si } 1 \leqq p < \infty$$

et

$$\sup \{ |\varphi(x_n)| \ ; \ \varphi \in B_{E'} \text{ et } n = 1, 2, \ldots \} < \infty \quad \text{si } p = \infty.$$

Supposons $1 \leqq p < \infty$, le cas $p = \infty$ se traite avec des modifications évidentes. Pour chaque entier m nous notons

$$U_m = \left\{ \varphi \in B_{E'} \ ; \ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{1/p} \leqq m \right\}.$$

Il est immédiat de vérifier que U_m est un sous-ensemble absolument convexe et fermé de $B_{E'}$ et que $B_{E'} = \bigcup_m U_m$; il est clair, d'après le théorème de Baire, que O est point intérieur de U_m d'où le résultat.

2) Pour $x=(x_n)_n \in sl_p(E)$ notons

$$\|x\| = \sup\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{1/p} ; \ \varphi \in B_{E'}\right\} \qquad \text{si } 1 \leqq p < \infty$$

et

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x_n)| ; \ \varphi \in B_{E'} \text{ et } n=1,2,\ldots\} \qquad \text{si } p=\infty;$$

on définit ainsi une norme sur $sl_p(E)$. Il est immédiat de vérifier que, muni de cette norme, $sl_p(E)$ est un espace de Banach. On trouve une étude des espaces $sl_p(E)$ dans [7, exposé n° 9].

3) $l_p \otimes_\varepsilon E$ est isométrique à un sous-espace de $sl_p(E)$. Notons $(e_m)_m$ la base canonique de l_p. Donnons-nous

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i \in l_p \otimes E .$$

Nous avons pour $i=1,2,\ldots,m$

$$a_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_i(m) e_i .$$

Soit $\psi \in B_{E'}$, nous avons alors

$$\sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i)\psi(y_i)\right| ; \ \varphi \in B_{l_{p'}}\right\}$$

$$= \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} \psi(y_i)\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_i(m)\varphi(e_m)\right)\right| ; \ \varphi \in B_{l_{p'}}\right\}$$

$$= \sup\left\{\left|\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(m)\psi(y_i)\right)\varphi(e_m)\right| ; \ \varphi \in B_{l_{p'}}\right\}$$

$$= \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i(m)\psi(y_i)\right|^p\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqq p < \infty . \\ \sup\left\{\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(m)\psi(y_i)\right| ; m=1,2,\ldots\right\} & \text{si } p=\infty . \end{cases}$$

Il est à remarquer que $\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i(m) y_i = 0$ donc

$$\|u\|_\varepsilon = \left\|\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(m) y_i\right)_m\right\|$$

Nous concluons alors que nous définissons bien une application

$$T: l_p \otimes_\varepsilon E \to sl_p(E)$$

en posant pour $u=\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i$, $T(u)=(\sum_{i=1}^{n} a_i(m)y_i)_m$ et que T ainsi définie est linéaire et isométrique. Par cette application nous identifions $l_p \otimes_\varepsilon E$ a un sous-espace de $sl_p(E)$.

4) Pour chaque entier $n=0,1,2,\ldots$ notons

$$P^n\colon sl_p(E) \to sl_p(E)$$

l'application linéaire continue qui à $x=(x_i) \in sl_p(E)$ associe $P^n(x)=(y_i)_i$ où $y_i=0$ pour $i=1,2,\ldots,n$ et $y_i=x_i$ pour $i \geqq n+1$. Notons aussi $P_n=1-P^n$. On note:

$$F_p = \left\{ x \in sl_p(E) \; ; \; \lim_{n\to\infty} P^n(x)=0 \right\},$$

F_p est visiblement un sous-espace fermé de $sl_p(E)$. Nous allons établir que $l_p \otimes E$ est dense dans F_p. Vérifions tout d'abord que $l_p \otimes E \subset F_p$. Soit

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i \in l_p \otimes E;$$

pour chaque entier m et pour chaque $i=1,2,\ldots,n$ nous notons:

$$a_i^m = \sum_{l=m+1}^{\infty} a_i(l) e_l ,$$

nous avons alors clairement pour $m=0,1,2,\ldots$

$$P^m(T(u)) = T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^m \otimes y_i\right)$$

donc

$$\|P^m(T(u))\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i^m \otimes y_i\right\|_\varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{n} \|a_i^m\| \, \|y_i\|$$

d'où le résultat. Pour achever de prouver que $l_p \otimes E$ est dense dans F_p il suffit de remarquer qu'étant donné $x=(x_1,\ldots,x_M,0,\ldots) \in F_p$ on peut toujours trouver un entier k, $a_1,\ldots,a_k \in l_p$ et $y_1,\ldots,y_k \in E$ tels que

$$T\left(\sum_{l=1}^{k} a_l \otimes y_l\right) = x .$$

L'application T se prolonge en une application linéaire et isométrique de $l_p \hat{\hat{\otimes}} E$ sur F_p.

3. Etude de $l_q \hat{\otimes} X$.

Soit X un espace de Banach. Rappelons que $(l_q \hat{\otimes} X)' = B(l_q, X)$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $l_q \times X$ (cf. [3]) et qu'il existe une identification canonique entre $B(l_q, X)$ et $\mathscr{L}(l_q, X')$ l'espace des applications linéaires continues de l_q dans X', rappelons aussi que pour $1<q\leqq\infty$

$$sl_{q'}(X') = \mathscr{L}(l_q, X')$$

(cf. [7, exposé n° 9]). Soient pour $i=1,2,\ldots,n$, $b_i=(b_i(m))_m \in l_q$, $x_i \in X$, $u=\sum_{i=1}^n b_i\otimes x_i$ et soit $\varphi=(\varphi_m)_m \in \mathrm{sl}_{q'}(X')$, $1<q\leqq\infty$; la dualité canonique s'exprime alors par:

$$\varphi(u) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} b_i(m)\varphi_m(x_i)\,.$$

THÉORÈME. *Soient* $1\leqq q\leqq\infty$ *et* X *un espace de Banach, alors pour tout* $u \in l_q\otimes X$ *on a*

$$\|u\|_\pi = \sup\{|\varphi(u)| \ ; \ \varphi \in B_{l_{q'}\hat{\hat{\otimes}}X'}\}\,.$$

Le résultat est bien connu pour $q=1$ car nous savons que:

$$l_1\hat{\otimes}X = (X\oplus X\oplus\ldots)_{l_1} \qquad \text{et} \qquad c_0\hat{\hat{\otimes}}X' = (X'\oplus X'\oplus\ldots)_{c_0}$$

(cf. [3]). Dans ce qui suit nous supposons $1<q\leqq\infty$. Soit $u \in l_q\otimes X$ tel que $\|u\|_\pi=1$ et soit $\delta>0$ un réel arbitraire, il existe $\varphi \in sl_{q'}(X')$ tel que $\|\varphi\|=1$ et $\varphi(u)=1$. Pour N assez grand on a $|P^N(\varphi)(u)|\leqq\delta$ d'où le résultat puisque $\|\varphi-P^N(\varphi)\|\leqq 1$. On déduit du théorème que $l_q\hat{\otimes}X$ est canoniquement isométriquement isomorphe à un sous-espace de $(l_{q'}\hat{\hat{\otimes}}X')'$.

4. Reproductibilité des espaces l_q.

Le premier théorème que nous allons établir semble bien connu, comme nous n'avons pas de référence pour ce résultat que nous serons amenés à utiliser, nous en donnons une preuve rapide.

Soient E et F deux espaces de Banach, on munit $E\times F$ de la norme $\|(u,v)\| = \max(\|u\|, \|v\|)$.

THÉORÈME 1. *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* $1\leqq q\leqq\infty$. *E ou F contient un sous-espace isomorphe à l_q si et seulement si $E\times F$ contient un sous-espace isomorphe à l_q.*

Nous traitons le cas $1\leqq q<\infty$, pour le cas $q=\infty$ il suffit de faire des modifications évidentes.

Nous notons P_1 (respectivement P_2) l'application $(u,v) \in E\times F \to u \in E$ (respectivement $(u,v) \in E\times F \to v \in F$). Supposons que $E\times F$ ait un sous-espace isomorphe à l_q, il existe alors $(f_i)_i$ une suite de $E\times F$ et deux réels $0<a$

$\leqq b$ tels que pour tout entier n et toute famille $a_1,\ldots,a_n$ de scalaires nous ayons

$$a\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{1/q} \leqq \left\|\sum_{i=1}^{n}a_if_i\right\| \leqq b\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{1/q}.$$

Supposons en outre que E ne contienne pas de sous-espace isomorphe à l_q, on peut alors trouver $(X_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(f_i)_i$ telle que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|P_1(X_k)\|^{q'}\right)^{1/q'} \leqq \frac{a}{2b} \quad \text{si } q>1$$

et

$$\sup_k\|P_1(X_k)\| \leqq \frac{a}{2b} \quad \text{si } q=1 .$$

Nous aurons alors pour tout entier n et toute famille $a_1,\ldots,a_n$ de scalaires,

$$\left\|P_1\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)\right\| \leqq \sum_{i=1}^{n}|a_i|\,\|P_1(X_i)\| \leqq \frac{a}{2b}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{1/q} \quad \text{(inégalité de Hölder)}$$

donc

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}a_iP_2(X_i)\right\| \geqq \frac{a}{b}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^q\right)^{1/q},$$

nous avons ainsi prouvé que F contient un sous-espace isomorphe à l_q.

REMARQUE. Nous avons prouvé que si $E\times F$ contient une suite-base $(f_n)_n$ équivalente à la base canonique de l_q alors il existe $(X_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(f_n)_n$ telle que $(P_1(X_k))_k$ ou $(P_2(X_k))_k$ soit équivalente à la base canonique de l_q.

THÉORÈME 2. *Soient E et F deux espaces de Banach et $1\leqq q\leqq\infty$. E ou F a un quotient isomorphe à l_q si et seulement si $E\times F$ a un quotient isomorphe à l_q.*

Supposons que $E\times F$ a un quotient isomorphe à l_q; soit $Q\colon E\times F\to l_q$ une application linéaire continue surjective, alors $T=Q'\colon l_{q'}\to E'\times F'$ est un plongements. Notons $i_E\colon E\to E\times F$ et $i_F\colon F\to E\times F$ les injections canoniques respectives. D'après la remarque précédente, il est toujours possible de trouver $(\varphi_n)_n$ une suite-base bloc normalisée de la base canonique de $l_{q'}$ telle que par exemple:

$$i'_E\circ T\colon [\varphi_n]_{n=1}^{\infty}\to E'$$

soit un plongement. Notons, pour $n=1,2,\ldots$, $f_n=i'_E(T(\varphi_n))$; il suffit alors d'appliquer un résultat de W. B. Johnson et H. P. Rosenthal (cf. [4]) qui affirme que si le dual E' contient une suite normalisée $(f_n)_n$ équivalente à la base canonique $l_{q'}$ et si $\lim_{n\to\infty} f_n=0$ pour la topologie $\sigma(E',E)$ alors E a un quotient isomorphe à l_q.

THÉORÈME 3. *Soient E un espace de Banach et $1\leqq q<p\leqq\infty$. Alors E contient un sous-espace isomorphe à l_q si et seulement si $l_p\hat{\hat{\otimes}}E$ contient un sous-espace isomorphe l_q.*

Nous conservons les notations du 2. Nous supposons que F_p contient un sous-espace isomorphe à l_q, il existe alors $(X_i)_i$ une suite de F_p et deux réels $0<\lambda\leqq\mu$ tels que pour tout entier n et toute famille $a_1,\ldots,a_n$ de scalaires

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q} \leqq \left\|\sum_{i=1}^n a_iX_i\right\| \leqq \mu\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q}.$$

Nous supposons que E ne contient pas de sous-espace isomorphe à l_q, alors, d'après le théorème 1, pour chaque entier $m, E\times\ldots\times E$ (m fois E) ne contient pas de sous-espace isomorphe à l_q.

Soit $0<\varepsilon<\lambda/\mu$; puisque $(X_i)_i$ est équivalente à la base canonique de l_q et puisque $X_i\in F_p$ pour $i=1,2,\ldots$, nous pouvons construire par récurrence $(Y_k)_k$ une suite-base bloc normalisé de $(X_i)_i$ et $n_0=0<n_1<\ldots<n_k<\ldots$ une suite strictement croissante d'entiers tels que pour $k=1,2,\ldots$

$$\|Y_k-(P_{n_k}-P_{n_{k-1}})(Y_k)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Soit, pour $k=1,2,\ldots$

$$Z_k = (P_{n_k}-P_{n_{k-1}})(Y_k),$$

$(Z_k)_k$ est une suite-base semi-normalisée de F_p équivalente à la base canonique de l_q (cf. [1, théorème 1]). Notons $K=\sup_k\|Z_k\|$ et pour $k=1,2,\ldots$, notons $Z_k=(Z_{k,l})_l$ nous avons $Z_{k,l}=0$ pour $l=1,2,\ldots,n_{k-1}$ et $l\geqq n_k+1$. Soit m un entier et $a_1,\ldots,a_m$ des scalaires, alors

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^m a_iZ_i\right\| &= \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^m |a_i|^p\left(\sum_{l=n_{i-1}+1}^{n_i} |\varphi(Z_{i,l})|^p\right)\right)^{1/p} ;\ \varphi\in B_{E'}\right\}\\ &\leqq K\left(\sum_{i=1}^m |a_i|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

d'où une contradiction puisque $(Z_i)_i$ est équivalente à la base canonique de l_q.

THÉORÈME 4. *Soient E un espace de Banach et $1\leqq q<p\leqq\infty$. Alors E a un quotient isomorphe à l_q si et seulement si $l_p\hat{\hat{\otimes}}E$ a un quotient isomorphe à l_q.*

Soit $T\colon l_p\hat{\hat{\otimes}}E \to l_q$ une application linéaire continue surjective et soit

$$r(T) = \inf\{r>0,\ \forall y \in l_q\ \exists x \in l_p\hat{\hat{\otimes}}E,\ T(x)=y \text{ et } \|x\| \leqq r\|y\|\} .$$

Supposons que E n'a aucun quotient isomorphe à l_q, nous allons établir que

(1) $$\forall r > r(T),\ \forall \varepsilon \in]0,1[,\ \forall n,\ \exists x \in l_p\hat{\hat{\otimes}}E ,$$
$$x = P^n(x) \textit{ et } \|x\| \leqq r \textit{ et } \|T(x)\| \geqq \varepsilon .$$

Dans le cas contraire, il existe $r>r(T)$, $\varepsilon_0 \in]0,1[$ et un entier n_0 tels que pour $x \in l_p\hat{\hat{\otimes}}E$, $x=P^{n_0}(x)$ et $\|x\|\leqq r$ entraîne $\|T(x)\|<\varepsilon_0$. Soit $y \in B_{l_q}$, puisque $r>r(T)$ il existe $t \in l_p\hat{\hat{\otimes}}E$ tel que $\|t\|\leqq r$ et $T(t)=y$. Notons $x=P_{n_0}(t)$ et $u=P^{n_0}(t)$, visiblement $P^{n_0}(u)=u$ et $\|u\|\leqq\|t\|\leqq r$ donc:

$$\|y-T(x)\| = \|T(u)\| < \varepsilon_0 .$$

Nous avons établi qu'il existe $\varepsilon_0 \in]0,1[$, un réel $r>0$ et un entier n_0 tel que pour tout $y \in B_{l_q}$ il existe $x \in l_p\hat{\hat{\otimes}}E$ vérifiant $\|x\|\leqq r$, $x=P_{n_0}(x)$ et $\|y-T(x)\|<\varepsilon_0$; il est bien connu que cette propriété entraîne que $T(\mathrm{Im}\,(P_{n_0}))=l_q$ ce qui est contradictoire avec notre hypothèse sur E (cf. Théorème 3). L'affirmation (1) est bien établie.

De l'affirmation (1) on déduit immédiatement:

(2) $\forall r > r(T)$, $\forall n$, $\exists x \in l_p\hat{\hat{\otimes}}E$, $\exists m > n$ tels que $x = (P_m-P_n)(x)$, $\|x\| \leqq r$ et $\|T(x)\| \geqq \frac{1}{2}$.

Notons pour $m=0,1,\ldots,Q^m$ l'application linéaire de l_q dans l_q qui à $a=(\alpha_i)_i \in l_q$ associe $Q^m(a)=(\beta_j)_j$ où $\beta_j=0$ pour $1\leqq j\leqq m$ et $\beta_j=\alpha_j$ pour $j=m+1, m+2,\ldots$; nous notons aussi $Q_m=1-Q^m$.

Fixons $r>r(T)$. On peut alors construire par récurrence $(n_k)_k$, $(m_k)_k$ deux suites strictement croissantes d'entiers, $(x_k)_k$ une suite d'éléments de $l_p\hat{\hat{\otimes}}E$ tels que $m_0=n_0=0$ et

(3) $\|x_k\| \leqq r$ pour $k=1,2,\ldots$

(4) $x_k = (P_{n_k}-P_{n_{k-1}})(x_k)$ pour $k=1,2,\ldots$

(5) $\|Q^{m_{k-1}}(T(x_k))\| \geqq \frac{1}{2}$ et $\|Q^{m_k}(T(x_k))\| \leqq \dfrac{1}{2^2}$ pour $k=1,2,\ldots.$

Supposons $(n_i)_{0\leqq i\leqq k}$, $(m_i)_{0\leqq i\leqq k}$ et $(x_i)_{1\leqq i\leqq k}$ construits et vérifiant (3), (4) et (5); montrons que nous pouvons poursuivre. L'application $Q^{m_k}\circ T$ est une application linéaire continue surjective de $l_p\hat{\hat{\otimes}}E$ sur un espace de Banach isométrique à l_q et $r(Q^{m_k}\circ T)\leqq r(T)$; en substituant $Q^{m_k}\circ T$ à T dans (2) nous déduisons qu'il existe $x_{k+1} \in l_p\hat{\hat{\otimes}}E$ et $n_{k+1}>n_k$ tels que

$$\|x_{k+1}\| \leqq r, \quad x_{k+1} = (P_{n_{k+1}}-P_{n_k})(x_{k+1}) \quad \text{et} \quad \|Q^{m_k}\circ T(x_{k+1})\| \geqq \tfrac{1}{2} .$$

Nous fixons alors $m_{k+1} > m_k$ tels que $\|Q^{m_{k+1}}(T(x_{k+1}))\| \leqq 1/2^2$. Notons pour chaque entier k, $y_k = T(x_k)$.

Quitte à extraire une sous-suite de $(y_k)_k$ on peut supposer que $(y_k)_k$ est une suite de Cauchy pour la topologie $\sigma(l_q, l_{q'})$. Notons pour $k = 1, 2, \ldots$

$$z_k = y_{2k-1} - y_{2k} \quad \text{et} \quad v_k = x_{2k-1} - x_{2k}$$

on a $\lim_{k \to \infty} z_k = 0$ pour la topologie $\sigma(l_q, l_{q'})$ et pour $k = 1, 2, \ldots$

$$\|z_k\| \geqq \|Q^{m_{2k-1}}(y_{2k-1} - y_{2k})\| \geqq \|Q^{m_{2k-1}}(y_{2k})\| - \|Q^{m_{2k-1}}(y_{2k-1})\| \geqq \frac{1}{2^2}$$

d'après (5).

Quitte à extraire de $(z_k)_k$ une sous-suite on peut supposer que $(z_k)_k$ est équivalente à la base canonique de l_q. Il existe alors $C > 0$ tel que pour tout entier n et toute famille $a_1, \ldots, a_n$ de scalaires on a:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i z_i \right\| \geqq C \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q \right)^{1/q} .$$

De (3) et (4) nous déduisons que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right\| \leqq 2r \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p}$$

donc, puisque $T(v_i) = z_i$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q \right)^{1/q} \leqq \frac{2r\|T\|}{C} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{1/p}.$$

ce qui est impossible car $p > q$; nous concluons alors que E a un quotient isomorphe à l_q.

THÉORÈME 5. *Soient E un espace de Banach et $1 \leqq p < q \leqq \infty$. Si $l_p \hat{\otimes} E$ a un sous-espace isomorphe à l_q alors E'' a un sous-espace isomorphe à l_q.*

Supposons que $l_p \hat{\otimes} E$ a une suite-base $(f_n)_n$ équivalente à la base canonique de l_q, $p < q \leqq \infty$. De la dualité $\langle l_p \hat{\otimes} E, l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} E' \rangle$ et du théorème du 3 nous déduisons que $(f_n)_n$ est une suite-base de $(l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} E')'$ équivalente à la base canonique de l_q. On a clairement $\lim_{n \to \infty} f_n = 0$ pour la topologie $\sigma((l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} E')', l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} E')$ donc $l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} E'$ a un quotient isomorphe à $l_{q'}$, $1 \leqq q' < p'$ et par conséquent E' a un quotient isomorphe à $l_{q'}$ d'où le résultat.

Soit α un ordinal dénombrable, $\langle 1, \alpha \rangle$ note l'ensemble des ordinaux $1 \leqq \gamma \leqq \alpha$ muni de la topologie d'intervalle; $C(\alpha)$ note l'espace de Banach des applications numériques continues sur $\langle 1, \alpha \rangle$ muni de la norme uniforme; soit E un espace de Banach, $C(\alpha; E)$ note l'espace de Banach des applications continues de $\langle 1,\alpha\rangle$ dans E muni de la norme uniforme. Nous savons que $C(\alpha; E)$ est isométrique à $C(\alpha)\hat{\hat{\otimes}}E$ (cf. [3]).

Nous notons

$$C_0(\alpha; E) = \{f \in C(\alpha; E)\ ;\ f(\alpha)=0\}\ ,$$

nous savons que pour $\alpha \geqq \omega$, $C_0(\alpha; E)$ est isomorphe à $C(\alpha; E)$ (cf. [2]).

THÉORÈME 6. *Soient α un ordinal dénombrable, E un espace de Banach et $1 \leqq q < \infty$; alors E contient un sous-espace isomorphe à l_q si et seulement si $C(\alpha; E)$ contient un sous-espace isomorphe à l_q.*

Fixons $1 \leqq q < \infty$. D'après le résultat classique de C. Bessaga et A. Pelczynski (cf. [2]) il suffit de prouver le théorème pour les ordinaux ω^{ω^λ} où λ est un ordinal dénombrable; nous allons établir le théorème par une récurrence transfinie sur λ.

Le résultat a déjà été établi dans le cas $\lambda=0$ (théorème 3). Soit donc λ un ordinal dénombrable >0 et supposons que pour tout ordinal $\beta<\lambda$ la propriété l_q isomorphe à un sous-espace de $C(\omega^{\omega^\beta}; E)$ entraîne l_q isomorphe à un sous-espace de E. Supposons que l_q soit isomorphe à un sous-espace de $C(\omega^{\omega^\lambda}; E)$ donc de $C_0(\omega^{\omega^\lambda}; E)$ et que l_q ne soit pas isomorphe à un sous-espace de E. Rappelons que pour tout ordinal $\alpha<\omega^{\omega^\lambda}$ il existe un ordinal $\beta<\lambda$ tel que $C(\alpha)$ et $C(\omega^{\omega^\beta})$ soient isomorphes (cf. [2] et [8]); alors, pour tout ordinal $\alpha<\omega^{\omega^\lambda}$, l_q n'est pas isomorphe à un sous-espace de $C(\alpha; E)$.

Soit $(f_n)_n$ une suite-base normalisée de $C_0(\omega^{\omega^\lambda}; E)$ équivalente à la base canonique de l_q. Il est possible de construire par récurrence $(g_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(f_n)_n$ et $\alpha_0=0<\alpha_1<\ldots<\alpha_k<\ldots<\omega^{\omega^\lambda}$ une suite strictement croissante d'ordinaux tels que pour $k=1,2,\ldots$

$$\forall\,\gamma \in \langle 1,\omega^{\omega^\lambda}\rangle;\ \gamma \notin \langle \alpha_{k-1}+1,\alpha_k\rangle \Rightarrow \|g_k(\gamma)\| \leqq \frac{1}{2^k}\,,$$

mais alors, la suite $(g_k)_k$ est équivalente à la base canonique de c_0 (cf. [1]) d'où une contradiction.

5. Sous-espaces de $l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q$ isomorphes à l_r.

Nous considérons $l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q$ comme sous-espace de $sl_q(l_p)$. Notons $(e_n)_n$ la base canonique de l_p et $(f_n)_n$ la suite des formes coefficients de la base $(e_n)_n$; on note pour chaque entier m

$$Q_m\colon l_p \to l_p$$

l'application qui à $x=\sum_{l=1}^{\infty} a_l e_l \in l_p$ associe $Q_m(x)=\sum_{l=1}^{m} a_l e_l$. Il est clair que pour chaque entier m et $x=(x_i)_i \in sl_q(l_p)$ $\tilde{Q}_m(x)$ définie par

$$\tilde{Q}_m(x) = (Q_m(x_i))_i \in sl_q(l_p) \quad \text{vérifie } \|\tilde{Q}_m\| = 1$$

et que pour chaque entier n, $P^n \circ \tilde{Q}_m = \tilde{Q}_m \circ P^n$; on a alors visiblement

$$\tilde{Q}_m(l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q) \subset l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q .$$

LEMME 1. *Pour chaque entier m les espaces $\tilde{Q}_m(l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q)$ et l_q sont isomorphes.*

Notons $X=\{(x_i)_i \in sl_q(l_p) \ ; \ \exists n \ \ \forall i, \ \ i \geqq n \Rightarrow x_i=0 \ \text{ et } \ \forall j \ \ Q_m(x_j)=x_j\}$. Clairement X est un sous-espace dense de $\tilde{Q}_m(l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q)$. Pour $x=(x_i)_i \in X$ on a

$$\|x\|^q = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{m} f_j(x_i)\varphi(e_j)\right|^q \ ; \ \varphi \in B_{(l_p)'}\right\}$$

donc en particulier, puisque $f_1,\ldots,f_m \in B_{(l_p)'}$ on a

$$\|x\| \geqq \max_{1 \leqq k \leqq m} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_k(x_i)|^q\right)^{1/q} .$$

On a par ailleurs:

$$\|x\| \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} |f_j(x_i)|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} |f_j(x_i)|\right)^q\right)^{1/q}$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_j(x_i)|^q\right)^{1/q} \leqq m \max_{1 \leqq k \leqq m} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_k(x_i)|^q\right)^{1/q}$$

ce qui prouve que $\tilde{Q}_m(l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q)$ est isomorphe à un produit fini d'espaces l_q donc à l_q.

LEMME 2. *Pour tout $x \in l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$ on a* $\lim_{m \to \infty} \tilde{Q}_m(x)=x$.

Notons

$$Y = \{x=(x_i)_i \in sl_q(l_p) \ ; \ \exists n \ \forall i, \ i \geqq n \ \Rightarrow \ x_i=0\} .$$

Visiblement Y est un sous-espace dense de $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$. Soit $x=(x_i)_i \in Y$ et n un entier tel que $i \geqq n \Rightarrow x_i=0$. On a alors pour tout entier m

$$\|x-\tilde{Q}_m(x)\|^q = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=m+1}^{\infty} f_j(x_i)\varphi(e_j)\right|^q \ ; \ \varphi \in B_{(l_p)'}\right\}$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{n} \|x_i - Q_m(x_i)\|^q$$

donc $\lim_{m\to\infty} \tilde{Q}_m(x)=x$; la conclusion découle alors du théorème de Banach–Steinhaus.

Rappelons la proposition suivante de A. Tong (cf. [10]).

PROPOSITION. *Soient n un entier, $a_1,\ldots,a_n$ des scalaires et $T\colon l_s^n \to l_q^n$ l'opérateur qui à $x=(x_1,\ldots,x_n)\in l_s^n$ associe $T(x)=(a_1x_1,\ldots,a_nx_n)$. On a alors*

$$\|T\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{sq/s-q}\right)^{s-q/sq} \quad \text{si } s>q \qquad \text{et} \qquad \|T\| = \max_{1\leqq i\leqq n} |a_i| \text{ si } s\leqq q\,.$$

THÉORÈME. *Soient $1\leqq p, q\leqq\infty$; alors l_r est isomorphe à un sous-espace de $l_p\hat{\hat{\otimes}} l_q$ si et seulement si $r=p$, $r=q$ ou*

$$r = \frac{1}{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-1} \text{ si } q'\geqq p \qquad \text{ou} \qquad r=\infty \text{ si } q'\leqq p\,.$$

Nous conservons les notations du 2. On suppose $q<\infty$, le cas $q=\infty$ se traite avec des modifications évidentes. Supposons tout d'abord que l_r est isomorphe à un sous-espace de $l_p\hat{\hat{\otimes}} l_q$ et que $r\neq p$ et $r\neq q$; soit $(X_n)_n$ une suite-base normalisée de $l_p\hat{\hat{\otimes}} l_q$ équivalente à la base canonique de l_r. Soit $\varepsilon>0$; puisque $r\neq p$ on peut trouver $(n_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers et $(Y_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(X_n)_n$ telle que:

$$\|Y_k-(P_{n_k}-P_{n_{k-1}})(Y_k)\| \leqq \frac{\varepsilon}{2^k}$$

pour $k=1,2,\ldots$. Dès que $\varepsilon>0$ est assez petit, la suite

$$\left(Z_k = \frac{(P_{n_k}-P_{n_{k-1}})(Y_k)}{\|(P_{n_k}-P_{n_{k-1}})(Y_k)\|}\right)_k$$

est équivalente à la base canonique de l_r.

Soit δ un réel >0; puisque $r\neq q$ en utilisant les lemmes 1 et 2, on peut trouver $(m_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers et $(U_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(Z_k)_k$ telle que pour $k=1,2,\ldots$

$$\|U_k-(\tilde{Q}_{m_k}-\tilde{Q}_{m_{k-1}})(U_k)\| \leqq \frac{\delta}{2^k}\,.$$

Dès que $\delta>0$ est assez petit la suite $((\tilde{Q}_{m_k}-\tilde{Q}_{m_{k-1}})(U_k))_k$ est équivalente à la base canonique de l_r.

En résumé, on peut trouver une suite normalisée $(V_k)_k$ de $l_p\hat{\hat{\otimes}} l_q$ équivalente à la base canonique de l_r et deux suites strictement croissantes d'entiers $(N_k)_k$ et $(M_k)_k$ telles que:

$$V_k = (P_{N_k} - P_{N_{k-1}})(V_k) = (\tilde{Q}_{M_k} - \tilde{Q}_{M_{k-1}})(V_k)\,. \tag{1}$$

Pour chaque entier k, notons $V_k = (V_{k,i})_i$; nous pouvons fixer $\varphi_k \in [f_{M_{k-1}+1}, \dots, f_{M_k}]$ tel que

$$\|\varphi_k\| = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |\varphi_k(V_{k,i})|^q = 1\,.$$

Soit $\psi = (\psi_i)_i \in (l_p)'$; pour chaque entier k notons

$$\psi^k = (0, \dots, 0, \psi_{M_{k-1}+1}, \dots, \psi_{M_k}, 0, \dots)\,.$$

Nous avons $\|\psi\| = (\sum_{k=1}^{\infty} \|\psi^k\|^{p'})^{1/p'}$ si $p \neq 1$ et $\|\psi\| = \sup_k \|\psi^k\|$ si $p = 1$. Pour chaque k et i il est clair d'après (1) que $\psi(V_{k,i}) = \psi^k(V_{k,i})$ donc

$$\sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |\psi(V_{k,i})|^q = \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |\psi^k(V_{k,i})|^q \leqq \|\psi^k\|^q\,. \tag{2}$$

Soit n un entier et $a_1, \dots, a_n$ des scalaires, on a alors d'après (2)

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{l=1}^n a_l V_l\right\| &= \sup\left\{\left(\sum_{l=1}^n |a_l|^q \sum_{i=N_{l-1}+1}^{N_l} |\psi(V_{l,i})|^q\right)^{1/q} ;\ \psi \in B_{(l_p)'}\right\} \\ &\leqq \sup\left\{\left(\sum_{l=1}^n |a_l|^q \|\psi^l\|^q\right)^{1/q} ;\ \psi \in B_{(l_p)'}\right\}. \end{aligned}$$

On a évidemment

$$\left\|\sum_{l=1}^n a_l V_l\right\| \geqq \sup\left\{\left(\sum_{l=1}^n |a_l|^q \sum_{i=N_{l-1}+1}^{N_l} |\psi(V_{l,i})|^q\right)^{1/q} ;\ \psi = \sum_{l=1}^n \lambda_l \varphi_l \text{ et } \sum_{l=1}^n |\lambda_l|^{p'} \leqq 1\right\}$$

donc

$$\left\|\sum_{l=1}^n a_l V_l\right\| = \sup\left\{\left(\sum_{l=1}^n |a_l|^q |\lambda_l|^q\right)^{1/q} ;\ \left(\sum_{l=1}^n |\lambda_l|^{p'}\right)^{1/p'} \leqq 1\right\}.$$

On conclut en utilisant la proposition précédente.

Notons $(\varepsilon_j)_j$ la base canonique de l_q. Soient n un entier et $a_1, \dots, a_n$ des scalaires, nous avons:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \otimes \varepsilon_i\right\|_\varepsilon = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \theta_i\right| \; ; \; (\lambda_i)_i \in B_{(l_p)'}, \; (\theta_i)_i \in B_{(l_q)'}\right\}$$

$$= \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q |\lambda_i|^q\right)^{1/q} \; ; \; (\lambda_i)_i \in B_{(l_p)'}\right\}$$

$$= \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^r\right)^{1/r} & \text{si } p' > q \text{ avec } r = \dfrac{p'q}{p'-q}. \\ \max\limits_{1 \leqq i \leqq n} |a_i| & \text{si } q \geqq p'. \end{cases}$$

donc $(e_i \otimes \varepsilon_i)_i$ est isométriquement équivalente à la base canonique de l_r.

COROLLAIRE. *Si $p \geqq q'$ l'espace $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$ n'est pas réflexif.*

COROLLAIRE. *Si $s \leqq r'$ l'espace $l_r \hat{\otimes} l_s$ contient un sous-espace isomorphe à l_1.*

Le résultat est évident si $1 = s$ ou $r' = \infty$; nous supposerons donc $1 < s \leqq r' < \infty$. Il est clair d'après 2 et 3 que l'espace $l_{r'} \hat{\hat{\otimes}} l_{s'}$ est isométrique à un sous-espace fermé de

$$sl_{s'}(l_{r'}) = \mathscr{L}(l_s, l_{r'}) = B(l_s, l_r) = (l_r \hat{\otimes} l_s)'.$$

D'après le théorème précédent l'espace $(l_r \hat{\otimes} l_s)'$ contient un sous-espace isomorphe à c_0, le résultat découle alors du théorème 4 de [1].

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Bessaga et A. Pelczynski, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math. 17 (1958), 151–164.
2. C. Bessaga et A. Pelczynski, *Spaces of continuous functions* IV, Studia Math. 19 (1960), 53–62.
3. A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).
4. W. B. Johnson et H. P. Rosenthal, *On w*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces*, Studia Math. 43 (1972), 77–92.
5. J. Lindenstrauss et L. Tzafrini, *Classical Banach Spaces* I (Ergebnisse Math. 92) Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1977.
6. A. Pelczynski, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. 19 (1960), 209–228.
7. Séminaire L. Schwartz, 1969–1970, École Polytechnique, Centre de Mathematiques, Paris, 1970.
8. W. Sierpinski, *Cardinal and ordinal numbers*, Paústwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1965.

9. I. Singer, *Basis in Banach spaces* I, (Grundlehren Math. Wissensch. 154), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1970.

10. A. Tong, *Diagonal nuclear operators on l_p-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 143 (1969), 235–247.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE-INFORMATIQUE
ET
LABORATORIE DE MATHÉMATIQUES DE MARSEILLE
(L.A. 225)
FACULTÉ DES SCIENCES DE LUMINY
70, ROUTE LÉON LACHAMP
13288 – MARSEILLE CEDEX 2