MATH. SCAND. 45 (1979), 289–304

ACTION MOYENNABLE D'UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT SUR UNE ALGEBRE DE VON NEUMANN

C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE

Abstract.

We introduce and study a notion of amenability for an action of a locally compact group on a von Neumann algebra. As a special case, when the group is discrete and the von Neumann algebra commutative, we find the notion of amenability defined by R. J. Zimmer and some of his results.

Introduction.

A toute action continue α d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann M, une construction classique permet d'associer une nouvelle algèbre de von Neumann $W^*(M,G,\alpha)$, produit croisé de G et M relativement à α. Cette construction joue un rôle important dans la théorie des algèbres d'opérateurs, et il est natural d'étudier comment certaines propriétés de l'action ou de M se traduisent sur $W^*(M,G,\alpha)$, et réciproquement. A la suite de nombreux travaux ([1], [2], [5], [9], [12] etc. ...) une classe d'algèbres de von Neumann s'est révélée particulièrement intéressante, celle des algèbres de von Neumann injectives. Il est connu que si le groupe G est moyennable et si M est injective, alors $W^*(M,G,\alpha)$ est injective [2, proposition 6.8], mais on sait également que $W^*(M,G,\alpha)$ peut être injective sans que G soit moyennable [19]. Dans [17], R. J. Zimmer a introduit une notion de moyennabilité pour une action ergodique d'un groupe localement compact G sur un espace borélien standard X, laissant une mesure μ quasi-invariante. Cette notion, plus générale que celle d'action d'un groupe moyennable, se révèle très utile en théorie ergodique. En outre, R. J. Zimmer a montré ([18], [19]) que dans le cas où l'action est libre avec G discret, l'algèbre de von Neumann associée à cette action par la construction de Murray et von Neumann (et qui n'est autre que le produit croisé de G et $L^\infty(X,\mu)$) est injective si et seulement si l'action est moyennable. Par la suite ce résultat a été généralisé au cas des actions libres des groupes localement compacts quelconques (voir [5, p. 228] et [8, th. 2]).

Reçu le 16 mai 1979.

Dans cet article, nous introduisons une notion de moyennabilité pour une action continue d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann M. Notre définition est analogue à l'existence d'une moyenne G-invariante sur $L^\infty(G)$ pour les groupes moyennables, et se réduit d'ailleurs à cette propriété lorsque M est réduit aux opérateurs scalaires. Elle coïncide avec la définition de R. J. Zimmer dans le cas qu'il a considéré. Notons que si M est un facteur les seules actions moyennables sur M sont celles des groupes moyennables, (Remarque 3.7.b).

Nous étudions quelques propriétés de ces actions moyennables dans les paragraphes 3 et 4 et nous établissons en particulier que $W^*(M, G, \alpha)$ est injective dans le cas où M l'est et où l'action de G sur M est moyennable (proposition 3.12). Lorsque G est discret, ce résultat s'étend aux produits croisés tordus par un cocycle introduits par G. Zeller-Meier dans [16]; en outre, si un tel produit croisé est injectif, alors M est injective et l'action de G sur M est moyennable (corollaire 4.2). Comme cas particulier, nous obtenons que le produit croisé (tordu par un cocycle) d'un groupe discret G par un facteur M est une algèbre de von Neumann injective si et seulement si M est injective et G est moyennable. Par contre, si G n'est pas discret, $W^*(M, G, \alpha)$ peut être injective bien que l'action de G sur M ne soit pas moyennable (voir remarque 4.4.b). Toute cette étude repose de façon essentielle sur les résultats du paragraphe 2 relatifs aux projections de norme 1.

1. Preliminaires et notations.

1.1. On appelle *action continue* d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann M un homomorphisme $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}\,(M)$ tel que pour tout $x \in M$ l'application $g \mapsto \alpha_g(x)$ de G dans M soit ultrafaiblement continue; d'après [7, proposition 3.10] ceci revient à dire que pour tout élément φ du prédual M_* de M, l'application $g \mapsto \varphi \circ \alpha_g$ de G dans M_* est normiquement continue.

Rappelons que si M est sous forme standard dans un espace hilbertien H [7, déf. 2.1] il existe une représentation unitaire continue $g \mapsto u_g$ de G dans H telle que $\alpha_g(x) = u_g x u_g^*$ pour tout $g \in G$ et tout $x \in M$ [7, corollaire 3.11].

1.2. Soit G un groupe localement compact muni d'une mesure de Haar à gauche. Nous noterons $\lambda\colon g \mapsto \lambda(g)$ la représentation régulière gauche de G et $\varrho\colon g \mapsto \varrho(g)$ sa représentation régulière droite.

Soit α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann M qui opère dans un espace hilbertien H. Considérons la représentation covariante (Π_α, Λ) de (M, G, α) dans l'espace hilbertien $L^2(G, H) = L^2(G) \otimes H$ définie par

$$[\Pi_\alpha(x)\varphi](g) = \alpha_g^{-1}(x)\varphi(g) \qquad (x \in M, \varphi \in L^2(G, H), g \in G)$$

$$\Lambda(g) = \lambda(g) \otimes 1_H \qquad (g \in G)\,.$$

Le produit croisé de M et G relativement à α, c'est-à-dire l'algèbre de von Neumann engendrée par $\Pi_\alpha(M)$ et $\Lambda(G)$ (voir [14, déf. 3.3]), sera noté $W^*(M,G,\alpha)$. Remarquons que Π_α est un isomorphisme de M sur la sous-algèbre de von Neumann $\Pi_\alpha(M)$ de $W^*(M,G,\alpha)$. Par ailleurs, $W^*(M,G,\alpha)$ est l'ensembles des $x \in \mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ tels que $[(\mathrm{Ad}\,\varrho(g))\otimes\alpha_g]\ (x)=x$ pour tout $g \in G$ [3, th. 3.14].

Rappelons que $W^*(M,G,\alpha)$ ne dépend pas de la représentation concrète de M: si β est une action continue de G sur une algèbre de von Neumann N opérant dans un espace hilbertien K et s'il existe un isomorphisme ψ de M sur N tel que $\psi\circ\alpha_g=\beta_g\circ\psi$ pour tout $g \in G$, alors il existe un isomorphisme de $W^*(M,G,\alpha)$ sur $W^*(N,G,\beta)$ qui transporte les opérateurs $\Pi_\alpha(x)$ et $\lambda(g)\otimes 1_H$ sur les opérateurs $\Pi_\beta(\psi(x))$ et $\lambda(g)\otimes 1_K$ correspondants dans $W^*(N,G,\beta)$ [14, prop. 3.4.].

1.3. Soit α une action d'un groupe discret G sur une algèbre de von Neumann M. Par restriction nous obtenons une action de G sur le groupe unitaire $Z_u(M)$ du centre $Z(M)$ de M. Nous noterons $Z^2(G,Z_u(M))$ l'ensemble des 2-cocycles sur G à valeurs dans le G-module $Z_u(M)$, c'est à dire l'ensemble des applications θ de $G\times G$ dans $Z_u(M)$ telles que pour tous $g,h,k \in G$, on ait

$$\alpha_g[\theta(h,k)]\theta(g,hk) = \theta(gh,k)\theta(g,h)\,. \tag{1}$$

Supposons que M opère dans un espace hilbertien H et soit $\theta \in Z^2(G,Z_u(M))$ un 2-cocycle normalisé, c'est à dire tel que $\theta(g,h)=1$ si g ou h est égal à l'élément neutre e de G. A une telle donnée, on peut associer la représentation $(\Pi_\alpha,\Lambda_\theta)$ de (M,G,α,θ) dans $L^2(G,H)$ (au sens de [16, déf. 2.6]), où Π_α est définie comme en 1.2 et où

$$[\Lambda_\theta(g)\varphi](h) = \theta(h^{-1},g)\varphi(g^{-1}h) \qquad (\varphi \in L^2(G,H), h \in G)\,.$$

Le produit croisé de G et M pour θ relativement à α est l'algèbre de von Neumann engendrée par $\Pi_\alpha(M)$ et $\Lambda_\theta(G)$ [16, déf. 8.1]; il sera noté $W^*_\theta(M,G,\alpha)$. Signalons que $W^*_\theta(M,G,\alpha)$ ne dépend pas, à isomorphismes près de la réalisation concrète de M (voir [16, 8.6]).

Soit $(\varepsilon_g)_{g\in G}$ la base orthonormale canonique de $L^2(G)$ et pour tout $g \in G$, notons J_g l'isométrie $\xi \to \varepsilon_g\otimes\xi$ de H dans $L^2(G)\otimes H$. Tout élément x de $\mathscr{B}(L^2(G)\otimes H)$ admet la représentation matricielle $(x_{g,h})_{g,h\in G}$ avec $x_{g,h}=J_g^*xJ_h \in \mathscr{B}(H)$. Alors $W^*_\theta(M,G,\alpha)$ est l'ensemble des $x \in \mathscr{B}(L^2(G)\otimes H)$ dont la matrice $(x_{g,h})$ est de la forme $x_{g,h}=\alpha_g^{-1}(x_{gh^{-1}})\theta(g^{-1},gh^{-1})$ avec $x_k \in M$ pour tout $k \in G$.

L'application $x \mapsto \Pi_\alpha(x_{e,e})$ est une projection de norme 1, ultrafaiblement continue et fidèle de $W^*_\theta(M,G,\alpha)$ sur $\Pi_\alpha(M)$. Nous noterons E_M l'application de $W^*_\theta(M,G,\alpha)$ sur M telle que $E_M(x)=x_{e,e}$ pour tout $x \in W^*_\theta(M,G,\alpha)$. On a

$E_M(\Lambda_\theta(g)x\Lambda_\theta(g)^*)=\alpha_g(E_M(x))$ pour tout $x \in W_\theta^*(M,G,\alpha)$ et tout $g \in G$ (voir [16, prop. 8.4] pour tous ces résultats).

1.4. Nous aurons besoin du résultat suivant, analogue à [3, th. 3.14]

LEMME. *Conservons les données de* 1.3. *Pour tout $g \in G$, notons v_g l'opérateur unitaire de $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ tel que $(v_g)_{h,k}=0$ si $h \neq k$ et $(v_g)_{h,h}=\theta(g,g^{-1}h^{-1})^*$. Alors $W_\theta^*(M,G,\alpha)$ est égal à l'ensemble des $x \in \mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ tels que*

$$(\mathrm{Ad}\, v_g)\circ[(\mathrm{Ad}\, \varrho(g))\otimes\alpha_g](x) = x$$

pour tout $g \in G$.

Nous pouvons supposer que α est défini par la représentation unitaire $g \mapsto u_g$ de G dans H. Posons $w_g=v_g(\varrho(g)\otimes u_g)$. La matrice de w_g est telle que

$$(w_g)_{h,k} = 0 \text{ si } h^{-1}k \neq g \quad \text{ et } (w_g)_{h,hg} = \theta(g,g^{-1}h^{-1})^*u_g\,.$$

Soit $x \in W_\theta^*(M,G,\alpha)$; sa matrice est de la forme

$$x_{h,k} = \alpha_h^{-1}(x_{hk^{-1}})\theta(h^{-1},hk^{-1}) \qquad \text{avec } x_{hk^{-1}} \in M\,.$$

On a

$$(xw_g)_{h,k} =\alpha_h^{-1}(x_{hgk^{-1}})\theta(h^{-1},hgk^{-1})\theta(g,k^{-1})^*u_g$$

et

$$\begin{aligned}(w_gx)_{h,k} &= \theta(g,g^{-1}h^{-1})^*u_g\alpha_{hg}^{-1}(x_{hgk^{-1}})\theta(g^{-1}h^{-1},hgk^{-1})\\ &= \theta(g,g^{-1}h^{-1})^*\alpha_h^{-1}(x_{hgk^{-1}})u_g\theta(g^{-1}h^{-1},hgk^{-1})\\ &= \alpha_h^{-1}(x_{hgk^{-1}})\theta(g,g^{-1}h^{-1})^*\alpha_g[\theta(g^{-1}h^{-1},hgk^{-1})]u_g\,.\end{aligned}$$

La condition (1) nous donne l'égalité

$$\theta(g,g^{-1}h^{-1})^*\alpha_g[\theta(g^{-1}h^{-1},hgk^{-1})] = \theta(h^{-1},hgk^{-1})\theta(g,k^{-1})^*\,.$$

Ceci entraîne que $(xw_g)_{h,k}=(w_gx)_{h,k}$ pour tous $h,k \in G$. Ainsi x commute avec tous les w_g.

Réciproquement, soit $x=(x_{h,k})$ un élément de $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ tel que $xw_g=w_gx$ pour tout $g \in G$. On a

$$(xw_g)_{h,k} = x_{h,kg^{-1}}\theta(g,k^{-1})^*u_g$$

et

$$(w_gx)_{h,k} = \theta(g,g^{-1}h^{-1})^*u_gx_{hg,k}$$

d'où

$$(2) \qquad x_{h,kg^{-1}}\theta(g,k^{-1})^*u_g = \theta(g,g^{-1}h^{-1})^*u_g x_{hg,k} \qquad (g,h,k \in G)\,.$$

Soient (t,s) et (t_1,s_1) deux couples d'éléments de G tels que $ts^{-1}=t_1s_1^{-1}$. D'après (2), on a

$$x_{t,s}\theta(t^{-1}t_1,s_1^{-1})^*u_{t^{-1}t_1} = \theta(t^{-1}t_1,t_1^{-1})^*u_{t^{-1}t_1}x_{t_1,s_1}$$

d'où

$$(3) \qquad \alpha_t(x_{t,s})\alpha_t[\theta(t^{-1}t_1,s_1^{-1})^*] = \alpha_{t_1}(x_{t_1,s_1})\alpha_t[\theta(t^{-1}t_1,t_1^{-1})^*]\,.$$

Par ailleurs, la condition (1) donne

$$\alpha_{t^{-1}t_1}[\theta(t_1^{-1},t_1s_1^{-1})]\theta(t^{-1}t_1,s_1^{-1})| = \theta(t^{-1}t_1,t_1^{-1})\theta(t^{-1},t_1s_1^{-1})$$

d'où

$$(4) \qquad \alpha_t[\theta(t^{-1}t_1,s_1^{-1})^*]$$
$$= \alpha_t[\theta(t^{-1},ts^{-1})^*]\alpha_t[\theta(t^{-1}t_1,t_1^{-1})^*]\alpha_{t_1}[\theta(t_1^{-1},t_1s_1^{-1})]\,,$$

compte-tenu de l'égalité $t_1s_1^{-1}=ts^{-1}$.

En utilisant (3) et (4) on obtient

$$\alpha_t[x_{t,s}\theta(t^{-1},ts^{-1})^*] = \alpha_{t_1}[x_{t_1,s_1}\theta(t_1^{-1},t_1s_1^{-1})^*]\,.$$

Ainsi $\alpha_t[x_{t,s}\theta(t^{-1},ts^{-1})^*]$ ne dépend que de ts^{-1}; notons le $x_{ts^{-1}}$. Nous avons alors

$$x_{t,s} = \alpha_t^{-1}(x_{ts^{-1}})\theta(t^{-1},ts^{-1})$$

pour tous $s,t \in G$, d'où $x \in W_\theta^*(M,G,\alpha)$.

1.5. Plaçons-nous dans la situation de 1.2, mais avec G non discret. Pour avoir des énoncés communs avec le cas discret, il sera commode de parler de 2-cocycles θ sur G, mais sur un tel groupe non discret, nous prendrons toujours θ trivial et nous poserons $W_\theta^*(M,G,\alpha)=W^*(M,G,\alpha)$.

1.6. Pour terminer, rappelons le résultat suivant qui nous sera utile dans la suite. Soient A une C*-algèbre avec unité, B une sous-C*-algèbre de A contenant l'unité de A et P une projection de norme 1 de A sur B. Alors P est une application positive de A sur B telle que $P(b_1xb_2)=b_1P(x)b_2$ pour tout $x \in A$ et tous $b_1,b_2 \in B$ [15, th. 3.1].

2. Projections de norme 1 et produits croises.

2.1. LEMME. *Soient M_1,M_2 deux algèbres de von Neumann, α une action continue d'un groupe localement compact G sur M_1 laissant stable une sous-*

algèbre de von Neumann N_1 *de* M_1, *et* β *une action continue de* G *sur* M_2 *laissant stable une sous-algèbre de von Neumann* N_2 *de* M_2. *Soient* P_1 *et* P_2 *des projections de norme* 1 *de* M_1 *sur* N_1 *et* M_2 *sur* N_2 *respectivement telles que* $P_1 \circ \alpha_g = \alpha_g \circ P_1$ *et* $P_2 \circ \beta_g = \beta_g \circ P_2$ *pour tout* $g \in G$. *Alors il existe une projection* P *de norme* 1 *de* $M_1 \otimes M_2$ *sur* $N_1 \otimes N_2$ *telle que*

i) $P(x_1 \otimes x_2) = P_1(x_1) \otimes P_2(x_2)$ *pour tout* $x_1 \in M_1$ *et tout* $x_2 \in M_2$;
ii) $P \circ (\alpha_g \otimes \beta_g) = (\alpha_g \otimes \beta_g) \circ P$ *pour tout* $g \in G$.

En outre, si P_1 *et* P_2 *sont ultrafaiblement continues, on peut prendre* P *ultrafaiblement continue, et* P *est alors déterminée de façon unique par la condition* i).

La difficulté de la démonstration réside dans le fait que les projections considérées ne sont pas nécessairement ultrafaiblement continues. Nous allons adapter la démonstration de [15, th. 5.1] à notre situation.

Puisque les notions qui interviennent dans le lemme sont stables par isomorphisme algébrique, nous pouvons supposer que M_1 et M_2 opèrent dans des espace hilbertiens H_1 et H_2 respectivement, de telle sorte que les actions α et β soient definies par les représentations unitaires continues $g \mapsto u_g$ et $g \mapsto v_g$ de G dans H_1 et H_2 respectivement. Nous noterons encore α et β les actions de G sur $\mathscr{B}(H_1)$ et $\mathscr{B}(H_2)$ respectivement, définies par ces représentations.

Prenons une base orthonormale de H_1 et considérons la famille $(e_i)_{i \in I}$ des projecteurs minimaux définis par cette base. Si J est une partie finie de I, posons $e_J = \sum_{i \in J} e_i$ et $H_1^J = e_j(H_1)$. Nous avons

$$(e_J \otimes 1)(\mathscr{B}(H_1) \otimes M_2)(e_J \otimes 1) = \mathscr{B}(H_1^J) \otimes M_2 ,$$

et comme H_1^J est de dimension finie, le produit tensoriel des algèbres de von Neumann $\mathscr{B}(H_1^J)$ et M_2 coïncide avec leur produit tensorel algébrique. Posons $P_J = 1_J \otimes P_2$ où 1_J désigne l'application identique de $\mathscr{B}(H_1^J)$. Alors P_J est une projection de norme 1 de $\mathscr{B}(H_1^J) \otimes M_2$ sur $\mathscr{B}(H_1^J) \otimes N_2$ (voir [15, lemme 5.1]) telle que

$$P_J \circ (1_J \otimes \beta_g) = (1_J \otimes \beta_g) \circ P_J$$

pour tout $g \in G$.

Définissons maintenant l'application P_J^2 de $\mathscr{B}(H_1) \otimes M_2$ dans $\mathscr{B}(H_1) \otimes N_2$ par

$$P_J^2(x) = P_J[(e_J \otimes 1)x(e_J \otimes 1)] \qquad (x \in \mathscr{B}(H_1) \otimes M_2) .$$

Nous obtenons ainsi une famille $(P_J^2)_J$ d'applications de $\mathscr{B}(H_1) \otimes M_2$ dans

$B(H_1)\otimes N_2$, indexée par l'ensemble des parties finies de I, telle que pour tout $x \in \mathscr{B}(H_1)\otimes M_2$ et toute partie finie J de I, nous ayons $\|P_J^2(x)\| \leqq \|x\|$.

Soit LIM une limite de Banach sur l'ensemble des suites généralisées bornées de nombres complexes, indexées par l'ensemble filtrant des parties finies de I. Si $x \in \mathscr{B}(H_1)\otimes M_2$, notons $P^2(x) = \mathrm{LIM}_J P_J^2(x)$ l'élément de $\mathscr{B}(H_1)\otimes N_2$ défini comme limite de Banach de la suite généralisée $(P_J^2(x))$, c'est à dire l'unique opérateur tel que

$$\langle P^2(x)\xi, \eta\rangle = \operatorname*{LIM}_J \langle P_J^2(x)\xi, \eta\rangle$$

pour tous $\xi, \eta \in H_1\otimes H_2$, (voir [12], et [15, p. 34]). Alors P^2 est une projection de norme 1 de $\mathscr{B}(H_1)\otimes M_2$ sur $\mathscr{B}(H_1)\otimes N_2$ telle que $P^2(x_1\otimes x_2) = x_1\otimes P_2(x_2)$ pour tout $x_1 \in \mathscr{B}(H_1)$ et tout $x_2 \in M_2$ (voir [15, dém. du th. 5.1]). En outre, pour tous $g \in G$, $x \in \mathscr{B}(H_1)\otimes M_2$, $\xi, \eta \in H_1\otimes H_2$, on a

$$\begin{aligned}
\langle P^2[(1\otimes\beta_g)(x)]\xi, \eta\rangle &= \operatorname*{LIM}_J \langle P_J^2[(1\otimes\beta_g)(x)]\xi, \eta\rangle \\
&= \operatorname*{LIM}_J \langle (1\otimes\beta_g)\circ P_J^2(x)\xi, \eta\rangle \\
&= \operatorname*{LIM}_J \langle P_J^2(x)(1\otimes v_g)^*\xi, (1\otimes v_g)^*\eta\rangle \\
&= \langle P^2(x)(1\otimes v_g)^*\xi, (1\otimes v_g)^*\eta\rangle \\
&= \langle (1\otimes\beta_g)\circ P^2(x)\xi, \eta\rangle .
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
P^2[(\alpha_g\otimes 1)(x)] &= P^2[(u_g\otimes 1)x(u_g\otimes 1)^*] \\
&= (u_g\otimes 1)P^2(x)(u_g\otimes 1)^* \quad \text{car } u_g\otimes 1 \in \mathscr{B}(H_1)\otimes M_2 \\
&= (\alpha_g\otimes 1)\circ P^2(x) .
\end{aligned}$$

Ainsi, P_2 est une projection de norme 1 de $\mathscr{B}(H_1)\otimes M_2$ sur $\mathscr{B}(H_1)\otimes N_2$ telle que $P^2(x_1\otimes x_2) = x_1\otimes P_2(x_2)$ pour tout $x_1 \in \mathscr{B}(H_1)$ et tout $x_2 \in M_2$, et telle que $P^2\circ(\alpha_g\otimes\beta_g) = (\alpha_g\otimes\beta_g)\circ P^2$ pour tout $g \in G$.

De même, on construit une projection P^1 de norme 1 de $M_1\otimes\mathscr{B}(H_2)$ sur $N_1\otimes\mathscr{B}(H_2)$ telle que $P^1(x_1\otimes x_2) = P_1(x_1)\otimes x_2$ pour tout $x_1 \in M_1$ et tout $x_2 \in \mathscr{B}(H_2)$, et telle que $P^1\circ(\alpha_g\otimes\beta_g) = (\alpha_g\otimes\beta_g)\circ P^1$ pour tout $g \in G$.

Si $x \in M_1\otimes M_2$, on voit facilement que $P^2(x)$ commute avec $M_1'\otimes 1$; d'où

$$P^2(x) \in [M_1\otimes\mathscr{B}(H_2)] \cap [\mathscr{B}(H_1)\otimes N_2] = M_1\otimes N_2 .$$

L'application P obtenue en composant la restriction de P^2 à $M_1\otimes M_2$ avec P^1 est une projection de norme 1 de $M_1\otimes M_2$ sur $N_1\otimes N_2$ (voir [15, dém. du th. 5.1]) qui vérifie les propriétés i) et ii) du lemme.

Si on s'intéresse uniquement aux projections ultrafaiblement continues, la conclusion est une conséquence directe de [15, th. 5.1] car ii) résulte de i) pour de telles projections.

2.2. Proposition. *Soit α une action continue d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann M, laissant stable une sous-algèbre de von Neumann N de M. Soit θ un 2-cocycle normalisé sur G à valeurs dans le groupe unitaire de $Z(M)\cap N$ (trivial si G n'est pas discret). Notons encore α l'action de G sur N obtenue par restriction et considérons les deux conditions suivantes:*

(i) *Il existe une projection P de norme 1 de M sur N telle que $P\circ\alpha_g=\alpha_g\circ P$ pour tout $g\in G$.*

ii) *Il existe une projection de norme 1 de $W_\theta^*(M,G,\alpha)$ sur $W_\theta^*(N,G,\alpha)$.*

La condition (i) *entraîne la condition* (ii). *En outre, si G est discret ces deux conditions sont équivalentes.*

Montrons que (i) $\Rightarrow$ (ii). Les propriétés (i) et (ii) étant invariantes par isomorphisme algébrique, nous pouvons supposer que $g\mapsto\alpha_g$ est défini par une représentation unitaire continue $g\mapsto u_g$ de G dans l'espace hilbertien H où opère M. Pour tout $g\in G$, notons β_g l'automorphisme de $\mathscr{B}(L^2(G))$ défini par l'unitaire $\varrho(g)$. D'après le lemme 2.1, si la condition (i) est vérifiée, il existe une projection E de norme 1 de $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ sur $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes N$ telle que $E(x_1\otimes x_2)=x_1\otimes P(x_2)$ pour tout $x_1\in\mathscr{B}(L^2(G))$ et tout $x_2\in M$, et telle que $E\circ(\beta_g\otimes\alpha_g)=(\beta_g\otimes\alpha_g)\circ E$ pour tout $g\in G$. Notons v_g l'opérateur défini comme dans le lemme 1.4 si G est discret, et l'application identique de $L^2(G)\otimes H$ si G n'est pas discret. Etant donné que $v_g\in\mathscr{B}(L^2(G))\otimes N$, on a $E\circ(\operatorname{Ad}v_g)=(\operatorname{Ad}v_g)\circ E$ pour tout $g\in G$, d'où

$$E\circ(\operatorname{Ad}v_g)\circ(\beta_g\otimes\alpha_g) = (\operatorname{Ad}v_g)\circ(\beta_g\otimes\alpha_g)\circ E$$

pour tout $g\in G$. Mais d'après 1.2 ou 1.4. $W_\theta^*(M,G,\alpha)$ est l'ensemble des $x\in\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ tels que $(\operatorname{Ad}v_g)\circ(\beta_g\otimes\alpha_g)(x)=x$ pour tout $g\in G$, et on a une propriété analogue pour $W_\theta^*(N,G,\alpha)$. Alors la restriction de E à $W_\theta^*(M,G,\alpha)$ donne une projection de norme 1 de $W_\theta^*(M,G,\alpha)$ sur $W_\theta^*(N,G,\alpha)$.

Supposons maintenant G discret et montrons ii) $\Rightarrow$ i). Soit E une projection de norme 1 de $W_\theta^*(M,G,\alpha)$ sur $W_\theta^*(N,G,\alpha)$. Notons P l'application de M dans N qui à $x\in M$ associe $E_N\circ E\circ\Pi_\alpha(x)$ où E_N est l'application canonique de $W_\theta^*(N,G,\alpha)$ sur N définie en 1.3. Il est clair que P est une projection de norme 1 de M sur N. En outre, pour tout $g\in G$ et tout $x\in M$, on a

$$\begin{aligned} P\circ\alpha_g(x) &= E_N\circ E\circ\Pi_\alpha(\alpha_g(x)) = E_N\circ E(\Lambda_\theta(g)\Pi_\alpha(x)\Lambda_\theta(g)^*)\\ &= E_N[\Lambda_\theta(g)(E\circ\Pi_\alpha(x))\Lambda_\theta(g)^*] \quad \text{car } \Lambda_\theta(g)\in W_\theta^*(N,G,\alpha)\\ &= \alpha_g\circ E_N\circ E\circ\Pi_\alpha(x) = \alpha_g\circ P(x)\,. \end{aligned}$$

3. Action moyennable d'un groupe sur une algèbre de von Neumann.

3.1. Soient M une algèbre de von Neumann et G un groupe localement compact. Nous noterons $L^\infty(G, M)$ l'algèbre de von Neumann formée par les fonctions essentiellement bornées, ultrafaiblement mesurables définies sur G à valeurs dans M. D'après ([10], [13]), $L^\infty(G, M)$ est canoniquement isomorphe à $L^\infty(G)\otimes M$ et nous identifierons parfois ces deux algèbres de von Neumann.

Considérons maintenant une action continue α de G sur M. Etant donné que pour tout $\varphi \in M_*$, la fonction $g \mapsto \varphi\circ\alpha_g$ de G dans M_* est normiquement continue, on voit que si f est ultrafaiblement mesurable de G dans M, alors $g \mapsto \alpha_g^{-1}(f(g))$ l'est aussi. En particulier, l'application Φ qui à $f \in L^\infty(G, M)$ associe $g \mapsto \alpha_g^{-1}(f(g))$ est un automorphisme $L^\infty(G, M)$.

3.2. Soit α une action continue d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann M. Pour tout $g \in G$, nous noterons τ_g l'automorphisme de $L^\infty(G)$ défini par

$$(\tau_g f)(h) = f(g^{-1}h) \qquad (f \in L^\infty(G),\ h \in G)$$

et nous noterons $\bar{\alpha}_g$ l'automorphisme $\tau_g\otimes\alpha_g$ de $L^\infty(G)\otimes M$. Alors $\bar{\alpha}\colon g \mapsto \bar{\alpha}_g$ est une action continue de G sur $L^\infty(G)\otimes M$. Comme il existe des projections de norme 1 de $L^\infty(G)\otimes M$ sur $1\otimes M$ (voir [15, th. 1.1]), on voit que le triplet $(L^\infty(G)\otimes M, G, \bar{\alpha})$ est une extension du triplet $(1\otimes M, G, \bar{\alpha}|_{1\otimes M})$ au sens de la définition 3.3 ci-dessous. Pour simplifier, nous identifierons parfois le triplet $(1\otimes M, G, \bar{\alpha}|_{1\otimes M})$ au triplet (M, G, α).

3.3. Définition. Soit α une action continue d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann M. Nous appellerons *extension de* (M, G, α) tout triplet (N, G, β) où

i) N est une algèbre de von Neumann contenant M comme sous-algèbre de von Neumann de telle sorte qu'il existe une projection de norme 1 de N sur M.

ii) β est une action continue de G sur N telle que $\beta_g(x)=\alpha_g(x)$ pour tout $x \in M$ et tout $g \in G$.

3.4. Définition. Soit α une action continue d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann M. Nous dirons que l'action α *est moyennable* s'il existe une projection P de norme 1 de $L^\infty(G)\otimes M$ sur M (identifiée à la sous-algèbre $1\otimes M$) telle que $P\circ\bar{\alpha}_g=\alpha_g\circ P$ pour tout $g \in G$.

3.5. Remarques. a) Dans le cas où M est réduit aux scalaires, l'action α de G sur M est moyennable si et seulement si il existe un état invariant à gauche sur $L^\infty(G)$, autrement dit si et seulement si le groupe G est moyennable (voir [6]).

b) Dans le cas où G est discret et où M est une algèbre de von Neumann commutative, la notion d'action moyennable définie ci-dessus coïncide avec celle introduite par Zimmer dans [17], comme le prouve la proposition 4.1 de [19].

c) Soit α une action moyennable d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann M et soit P comme dans la définition 3.4. Compte-tenu de la propriété des projections de norme 1 rappelée en 1.6, on voit que $P(f)$ appartient au centre $Z(M)$ de M pour tout $f \in L^\infty(G) \otimes Z(M)$. En considérant la restriction de P à $L^\infty(G) \otimes Z(M)$, on remarque donc que l'action de G sur $Z(M)$ obtenue par restriction de α est moyennable.

3.6. PROPOSITION. *Soit α une action continue d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann M. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *Le groupe G est moyennable*

ii) *L'action α de G sur M est moyennable et il existe un état G-invariant sur le centre $Z(M)$ de M.*

i) $\Rightarrow$ ii). Supposons G moyennable et montrons d'abord que l'action de α sur G est moyennable. Soit m un état sur $L^\infty(G)$ tel que $m \circ \tau_g = m$ pour tout $g \in G$. D'après le lemme 2.1, il existe une projection P de norme 1 de $L^\infty(G) \otimes M$ sur $1 \otimes M$ telle que $P(f \otimes x) = m(f) \otimes x$ pour tout $f \in L^\infty(G)$ et tout $x \in M$, et telle que $P \circ (\tau_g \otimes \alpha_g) = (\tau_g \otimes \alpha_g) \circ P$. On voit donc que l'action est moyennable.

Considérons maintenant un état Ψ sur $Z(M)$. Alors l'application qui à $x \in Z(M)$ fait correspondre la moyenne par m de la fonction $g \mapsto \Psi \circ \alpha_{g^{-1}}(x)$ est un état G-invariant sur $Z(M)$.

ii) $\Rightarrow$ i). Supposons les hypothèses de ii) réalisées. Soit φ un état G-invariant sur $Z(M)$ et soit P une projection de norme 1 de $L^\infty(G) \otimes M$ sur M telle que $P \circ \bar{\alpha}_g = \alpha_g \circ P$ pour tout $g \in G$. Etant donné que $P(f \otimes 1) \in Z(M)$ pour tout $f \in L^\infty(G)$, nous pouvons considérer l'état m sur $L^\infty(G)$ défini par

$$m(f) = \varphi \circ P(f \otimes 1) \qquad (f \in L^\infty(G)) .$$

Pour tout $g \in G$ et tout $f \in L^\infty(G)$, on a

$$\begin{aligned} m(\tau_g(f)) &= \varphi \circ P(\tau_g(f) \otimes 1) = \varphi \circ P[\bar{\alpha}_g(f \otimes 1)] \\ &= \varphi \circ \alpha_g \circ P(f \otimes 1) = \varphi \circ P(f \otimes 1) = m(f) . \end{aligned}$$

Ainsi m est état invariant à gauche sur $L^\infty(G)$, et par conséquent G est moyennable.

3.7. REMARQUES. a) Conservons les notations de 3.6 et considérons un état φ sur $Z(M)$ tel que le stabilisateur $G_\varphi = \{g \in G\ ;\ \varphi \circ \alpha_g = \varphi\}$ soit un sous-groupe ouvert de G. Si l'action α de G sur M est moyennable, alors G_φ est un groupe moyennable. Cela se voit comme dans la démonstration de 3.6, en plongeant $L^\infty(G_\varphi)$ dans $L^\infty(G)$ et en considérant la moyenne $f \mapsto \varphi \circ P(f \otimes 1)$ sur $L^\infty(G_\varphi)$.

b) Soit G un groupe discret. Notons P l'application de $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G) = L^\infty(G \times G)$ sur $L^\infty(G)$ définie par $P(f)(g) = f(g, g)$ pour tout $f \in L^\infty(G \times G)$ et tout $g \in G$. Il est clair que P est une projection de norme 1 de $L^\infty(G \times G)$ sur $L^\infty(G)$ (où on identifie $\varphi \in L^\infty(G)$ à l'élément $(g, h) \mapsto \varphi(h)$ de $L^\infty(G \times G)$). En outre, si $\bar{\tau}_g$ désigne l'automorphisme $\tau_g \otimes \tau_g$ de $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G) = L^\infty(G \times G)$, on a

$$[P \circ \bar{\tau}_g(f)](h) = \bar{\tau}_g(f)(h, h) = f(g^{-1}h, g^{-1}h) = [\tau_g \circ P(f)](h)$$

pour tout $f \in L^\infty(G \times G)$ et tous $g, h \in G$. Ainsi, $g \mapsto \tau_g$ est une action moyennable de G sur $L^\infty(G)$.

Ceci prouve que tout groupe discret, même non moyennable, peut agir de façon moyennable sur une algèbre de von Neumann commutative. Cela résulte également de la remarque 3.5.b, et de [17, th. 1.9]. Par contre, dans le cas où M est un facteur, on déduit immédiatement de la proposition 3.6 qu'un groupe localement compact G ne peut agir de façon moyennable sur M que s'il est moyennable.

3.8. Proposition. *Soit β une action continue d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann N, laissant stable une sous-algèbre de von Neumann M de N. On suppose qu'il existe une projection P de norme 1 de N sur M telle que $P \circ \beta_g = \beta_g \circ P$ pour tout $g \in G$. Si l'action β de G sur N est moyennable, alors l'action α de G sur M obtenue par restriction l'est aussi.*

Si l'action β est moyennable, il existe une projection E de norme 1 de $L^\infty(G) \otimes N$ sur N telle que $E \circ \bar{\beta}_g = \beta_g \circ E$ pour tout $g \in G$. La restriction de $P \circ E$ à $L^\infty(G) \otimes M$ donne alors une projection E' de norme 1 de $L^\infty(G) \otimes M$ sur M telle que $E' \circ \bar{\alpha}_g = \alpha_g \circ E'$ pour tout $g \in G$.

3.9. Proposition. *Soient G un groupe localement compact, α une action continue moyennable de G sur une algèbre de von Neumann M et β une action continue de G sur une algèbre de von Neumann N. Alors γ: $g \mapsto \gamma_g = \alpha_g \otimes \beta_g$ est une action continue moyennable de G sur $M \otimes N$.*

Pour tout $g \in G$, l'automorphisme $\bar{\gamma}_g = \tau_g \otimes \gamma_g$ de $L^\infty(G) \otimes M \otimes N$ est égal à $\bar{\alpha}_g \otimes \beta_g$. D'après le lemme 2.1, il existe une projection P de norme 1 de $L^\infty(G) \otimes M \otimes N$ sur $M \otimes N$ telle que $P \circ (\bar{\alpha}_g \otimes \beta_g) = (\alpha_g \otimes \beta_g) \circ P$ pour tout $g \in G$. Ceci prouve que γ est une action moyennable.

3.10. LEMME. *Soit α une action continue d'un groupe G localement compact sur une algèbre de von Neumann M et soit θ un 2-cocycle normalisé sur G à valeurs dans le groupe unitaire du centre de M (trivial si G n'est pas discret). Nous noterons encore θ ce cocycle considéré comme à valeurs dans le groupe unitaire du centre de $L^\infty(G)\otimes M$. Il existe un isomorphisme algébrique de $W_\theta^*(L^\infty(G)\otimes M, G, \bar{\alpha})$ sur $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ qui envoie $W_\theta^*(1\otimes M, G, \bar{\alpha}|_{1\otimes M})$ sur $W_\theta^*(M, G, \alpha)$.*

Nous ferons seulement la démonstration dans le cas discret. Elle est analogue et plus simple dans le cas non discret où θ est trivial (on peut d'ailleurs dans ce cas utiliser [11, th. 8.4]). Nous pouvons supposer que M opère dans un espace hilbertien H de telle sorte que α soit défini par la représentation unitaire $g \mapsto u_g$. L'algèbre de von Neumann $W_\theta^*(L^\infty(G)\otimes M, G, \bar{\alpha})$ agit dans $L^2(G, L^2(G, H)) = L^2(G\times G, H)$. Elle est engendrée par les opérateurs $\pi_{\bar{\alpha}}(f)$ avec $f \in L^\infty(G, M) = L^\infty(G)\otimes M$ et les opérateurs $\bar{\Lambda}_\theta(k)$ avec $k \in G$ définis par

$$[\Pi_{\bar{\alpha}}(f)\varphi](g,h) = \alpha_g^{-1}[f(gh)]\varphi(g,h) \qquad (\varphi \in L^2(G\times G, H);\ g,h \in G)$$

$$[\bar{\Lambda}_\theta(k)\varphi](g,h) = \theta(g^{-1},k)\varphi(k^{-1}g,h) \qquad (\varphi \in L^2(G\times G, H);\ g,h \in G)\,.$$

Notons U l'opérateur unitaire de $L^2(G\times G, H)$ dans lui-même tel que

$$(U\varphi)(g,h) = \theta(h^{-1}, hg^{-1})^* u_h^* \varphi(gh^{-1}, h)$$

pour tout $\varphi \in L^2(G\times G, H)$. On vérifie facilement que $U\bar{\Lambda}_\theta(k)U^* = \bar{\Lambda}_\theta(k)$ pour tout $k \in G$ et que

$$[U\Pi_{\bar{\alpha}}(f)U^*\varphi](g,h) = \alpha_g^{-1}(f(g))\varphi(g,h) \qquad (f \in L^\infty(G,M),\ \varphi \in L^2(G\times G, H))\,.$$

Ecrivons $L^2(G\times G, H) = L^2(G)\otimes L^2(G)\otimes H$ sous la forme $L^2(G)\otimes H\otimes L^2(G)$ grâce à l'isomorphisme qui envoie $\varphi\otimes\Psi\otimes\xi$ sur $\varphi\otimes\xi\otimes\Psi$. L'opérateur $U\Pi_{\bar{\alpha}}(f)U^*$ se met alors sous le forme $\tilde{\Pi}(f)\otimes 1_{L^2(G)}$ où $\tilde{\Pi}(f)$ agit dans $L^2(G,H)$ comme suit

$$[\tilde{\Pi}(f)\varphi](g) = \alpha_g^{-1}[f(g)]\varphi(g) = \Phi(f)(g)\varphi(g) \qquad (\varphi \in L^2(G,H))$$

(Φ étant l'automorphisme de $L^\infty(G,M)$ défini en 3.1). En particulier, lorsque f est la fonction constante qui vaut $x \in M$ sur tout G, l'opérateur $\tilde{\Pi}(f)$ n'est autre que $\Pi_\alpha(x)$. D'autre part, $\bar{\Lambda}_\theta(k)$ s'écrit $\Lambda_\theta(k)\otimes 1_{L^2(G)}$.

L'algèbre de von Neumann engendrée par $\tilde{\Pi}(f)$ lorsque f décrit $L^\infty(G)\otimes M$ est la sous-algèbre de von Neumann $T(L^\infty(G))\otimes M$ de $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$, où pour tout $f \in L^\infty(G)$, nous notons $T(f)$ l'opérateur de multiplication par f dans $L^2(G)$. Montrons que l'algèbre de von Neumann engendrée par $T(L^\infty(G))\otimes M$ et $\Lambda_\theta(G)$ est $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$, ou encore que

$$[T(L^\infty(G))\otimes M'] \cap \Lambda_\theta(G)' = 1\otimes M' .$$

Soient $f \in L^\infty(G)\otimes M'$, $T(f)$ l'opérateur correspondant dans $L^2(G)\otimes H$, et soit $g \in G$. Par un calcul immédiat, on voit que

$$\Lambda_\theta(g)T(f)\Lambda_\theta(g)^* = T[(\tau_g\otimes 1)(f)] .$$

Par conséquent, $T(f)$ appartient à $\Lambda_\theta(G)'$ si et seulement si f est constante.

Ainsi $W_\theta^*(L^\infty(G)\otimes M, G, \bar{\alpha})$ est isomorphe à $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M\otimes 1_{L^2(G)}$. De plus, il est clair que l'isomorphisme considéré ci-dessus envoie $W_\theta^*(1\otimes M, G, \bar{\alpha}|_{1\otimes M})$ sur $W_\theta^*(M, G, \alpha)\otimes 1_{L^2(G)}$.

3.11. Proposition. *Soit α une action continue moyennable d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann M et soit θ un 2-cocycle normalisé sur G à valeurs dans le groupe unitaire du centre de M (trivial si G n'est pas discret). Alors il existe une projection de norme 1 de $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ sur $W_\theta^*(M, G, \alpha)$.*

Soit P une projection de norme 1 de $L^\infty(G)\otimes M$ sur $1\otimes M$ telle que $P\circ\bar{\alpha}_g = \bar{\alpha}_g \circ P$ pour tout $g \in G$. D'après la proposition 2.2 il existe une projection de norme 1 de $W_\theta^*(L^\infty(G)\otimes M, G, \bar{\alpha})$ sur $W_\theta^*(1\otimes M, G, \bar{\alpha}|_{1\otimes M})$, et grâce au lemme 3.10, on obtient une projection de norme 1 de $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ sur $W_\theta^*(M, G, \alpha)$.

3.12. Rappelons qu'une algèbre de von Neumann M est dite injective (ou possède la propriété d'extension) si pour toute C*-algèbre A contenant M et ayant même unité que M, il existe une projection de norme 1 de A sur M ([9], [15, § 7] et [4, § 5]). Si M opère dans un espace hilbertien H, alors M est injective si et seulement si il existe une projection de norme 1 de $\mathscr{B}(H)$ sur M [15, th. 7.2].

Proposition. *Soit α une action continue moyennable d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann injective M et soit θ un 2-cocycle normalisé sur G à valeurs dans le groupe unitaire du centre de M (trivial si G n'est pas discret). Alors $W_\theta^*(M, G, \alpha)$ est une algèbre de von Neumann injective.*

D'après la proposition 3.11, il existe une projection E de norme 1 de $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ sur $W_\theta^*(M, G, \alpha)$. De plus, M étant injective, $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ est injective [15, th. 7.5]; par conséquent, si M opère dans H, il existe une projection E_1 de norme 1 de $\mathscr{B}(L^2(G)\otimes H)$ sur $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$. Alors $E\circ E_1$ est une projection de norme 1 de $\mathscr{B}(L^2(G)\otimes H)$ *sur* $W_\theta^*(M, G, \alpha)$, ce qui prouve que $W_\theta^*(M, G, \alpha)$ est injective.

4. Action moyennable d'un groupe discret sur une algèbre de von Neumann.

4.1. PROPOSITION. *Soit α une action d'un groupe discret G sur une algèbre de von Neumann M et soit θ un 2-cocycle normalisé sur G à valeurs dans le groupe unitaire du centre de M. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *l'action α est moyennable;*

ii) *il existe une projection de norme 1 de $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ sur $W_\theta^*(M, G, \alpha)$;*

iii) *pour toute extension (N, G, β) de (M, G, α) telle que θ soit à valeurs dans le groupe unitaire de $Z(N)\cap M$, il existe une projection P de norme 1 de N sur M telle que $P\circ\beta_g=\alpha_g\circ P$ pour tout $g\in G$.*

i) $\Rightarrow$ ii) a été démontré en 3.11.

ii) $\Rightarrow$ iii). Soit E une projection de norme 1 de $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ sur $W_\theta^*(M, G, \alpha)$. Considérons une extension (N, G, β) de (M, G, α) (voir déf. 3.3) telle que θ soit à valeurs dans le groupe unitaire de $Z(N)\cap M$. Comme il existe une projection de norme 1 de N sur M, il existe aussi une projection E_1 de norme 1 de $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes N$ sur $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ (voir [15, th. 5.1]). La restriction de $E\circ E_1$ à $W_\theta^*(N, G, \beta)$ est une projection de norme 1 de $W_\theta^*(N, G, \alpha)$ sur $W_\theta^*(M, G, \alpha)$, et la conclusion résulte alors de la proposition 2.2.

iii) $\Rightarrow$ i) est évident car $(L^\infty(G)\otimes M, G, \bar{\alpha})$ est une extension de $(1\otimes M, G, \bar{\alpha}|_{1\otimes M})$ telle que le centre de $1\otimes M$ soit inclus dans celui de $L^\infty(G)\otimes M$.

4.2. COROLLAIRE. *Conservons les données de* 4.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *$W_\theta^*(M, G, \alpha)$ est une algèbre de von Neumann injective;*

ii) *M est injective et l'action α de G sur M est moyennable.*

ii) $\Rightarrow$ i) a été montré en 3.12.

i) $\Rightarrow$ ii). Supposons que M opère dans un espace hilbertien H. Si $W_\theta^*(M, G, \alpha)$ est injective, il existe une projection de norme 1 de $B(L^2(G)\otimes H)$ sur $W_\theta^*(M, G, \alpha)$, et par restriction on obtient une projection de norme 1 de $\mathscr{B}(L^2(G))\otimes M$ sur $W_\theta^*(M, G, \alpha)$. Ceci prouve que l'action α est moyennable. En outre M est injective puisqu'il existe une projection de norme 1 de $W_\theta^*(M, G, \alpha)$ sur $\Pi_\alpha(M)$ qui est isomorphe à M.

4.3. COROLLAIRE. *Conservons les données de* 4.1 *en supposant en outre que M est un facteur. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *$W_\theta^*(M, G, \alpha)$ est une algèbre de von Neumann injective;*

ii) *M est injective et G est moyennable.*

Cela résulte immédiatement du corollaire 4.2 et de la remarque 3.7.b).

4.4. REMARQUES. a) Conservons les notations de la proposition 4.1. Le corollaire 4.2 montre que si pour un 2-cocycle normalisé $\theta \in Z^2(G, Z_u(M))$, le produit croisé $W_\theta^*(M, G, \alpha)$ est une algèbre de von Neumann injective, alors $W_{\theta'}^*(M, G, \alpha)$ est injective pour tout 2-cocycle normalisé $\theta' \in Z^2(G, Z_u(M))$.

Ce résultat est à rapprocher de [8, th. 2], où P. Hahn montre la même propriété pour les algèbres de von Neumann associées aux représentations σ-régulières d'un groupoïde principal concret (i.e. défini par la relation d'équivalence mesurée provenant d'une action de groupe localement compact sur un espace de probabilité).

b) Les énoncés de la proposition 4.1 et de son corollaire ne s'étendent pas toujours aux cas des groupes localement compacts non discrets (avec θ trivial). En effet prenons un groupe G localement compact de type I non moyennable (par exemple SL $(2, \mathbf{C})$), agissant sur $M = \mathbf{C}$. Le produit croisé de G et M n'est autre dans ce cas que l'algèbre de von Neumann $\mathscr{L}(G)$ engendrée par la représentation régulière gauche de G. Cette algèbre de von Neumann est injective [4, th. 6.4], bien que l'action de G sur M ne soit pas moyennable.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Choi and E. Effros, *Injectivity and operator spaces*, J. Functional Analysis 24 (1977), 156–209.
2. A. Connes, *Classification of injective factors*, Ann. of Math. 104 (1976), 73–115.
3. T. Digernes, *Duality for weights on covariant systems and its applications*, Thesis, University of California, Los Angeles, 1975.
4. E. Effros and C. Lance, *Tensor products of operator algebras*, Advances in Math. 25 (1977), 1–34.
5. J. Feldman, P. Hahn and C. C. Moore, *Orbit structure and countable sections for actions of continuous groups*, Advances in Math. 28 (1978), 186–230.
6. F. P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups*, Van Nostrand, New York, 1969.
7. U. Haagerup, *The standard form of von Neumann algebras*, Math. Scand. 37 (1975), 271–283.
8. P. Hahn, *The σ-representations of amenable groupoids*, Preprint.
9. J. Hakeda and J. Tomiyama, *On some extension property of von Neumann algebras*, Tôhoku Math. J. 19 (1967), 315–323.
10. K. Murakami, *On the* W**-tensor product of* $L^\infty(G)$ *and* M, Preprint of Tokyo Inst. Tech. (1975).
11. Y. Nagakami, *Dual action on a von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 12 (1977), 727–775.
12. J. T. Schwartz, *Two finite, non hyperfinite, non isomorphic factors*, Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 19–26.
13. H. Takemoto, *On the weakly continuous constant field of Hilbert space and its application to the reduction theory of* W*-*algebras*, Tôhoku Math. J. 28 (1976), 479–496.
14. M. Takesaki, *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type* III, Acta Math. 131 (1973), 249–308.
15. J. Tomiyama, *Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras*, Lecture Notes, Mathematics Institute, Copenhagen University, 1970.

16. G. Zeller-Meier, *Produits croisés d'une C*-algèbre par une groupe d'automorphismes*, J. Math. Pures Appl. 47 (1968), 101–239.
17. R. J. Zimmer, *Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks*, J. Functional Analysis 27 (1978), 350–372.
18. R. J. Zimmer, *On the von Neumann algebra of an ergodic group action*, Proc. Amer. Math. Soc. 66 (1977), 289–293.
19. R. J. Zimmer, *Hyperfinite factors and amenable ergodic actions*, Invent. Math. 41 (1977), 23–31.
20. R. J. Zimmer, *Amenable pairs of groups and ergodic actions and the associated von Neumann algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ D'ORLÉANS
45045 ORLÉANS CÉDEX
FRANCE