MATH. SCAND. 46 (1980), 54–60

ÜBER EINEN SATZ VON RELLICH

HENRIK L. SELBERG

1.

F. Rellich [2] hat den folgende Satz bewiesen:

Es sei $H(z,w)$ eine ganze Funktion von z,w (rational oder transzendent). Hat die Differentialgleichung

$$w' = H(z,w) \tag{1}$$

drei verschiedene Lösungen $w = h_0, h_1, h_2$, die ganze Funktionen sind, so ist

$$h_2 = (1-c)h_0 + ch_1 \tag{2}$$

wo c eine Konstante ist. Ist (1) keine lineare Gleichung, so bilden die Konstanten c, welche die rechte Seite von (2) zu Lösungen von (1) machen, eine Menge, die im Endlichen keinen Häufungspunkt hat.

Wir werden hier zeigen, dass das Resultat von Rellich in einigen etwas allgemeineren Sätzen enthalten ist.

2.

Indem G ein Gebiet der komplexen z-Ebene ist, betrachten wir die Differentialgleichung

$$w' = \frac{U(z,w)}{V(z,w)} = W(z,w) \tag{3}$$

wo U und V für alle komplexe w und alle $z \in G$ eindeutig und analytisch in z,w sind und für die nämlichen Werte von z,w der Bedingung

$$|U(z,w)| + |V(z,w)| > 0 \tag{4}$$

mitsamt

$$U \not\equiv 0,\ V \not\equiv 0 \tag{4a}$$

genügen. Die Bedingungen (4) und (4a) haben zur Folge:

Eingegangen am 5. März, 1979.

HILFSSATZ 1. *Zu jedem $\zeta \in G$ und jedem endlichen α gehört eine Lösung $w(z)$ von* (3), *die in ζ den Wert α annimmt. Ist $V(\zeta,\alpha)\neq 0$, so kann $w(z)$ in der Umgebung von ζ durch eine Potenzreihe*

$$\alpha+\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu(z-\zeta)^\nu$$

dargestellt werden. Ist $V(\zeta,\alpha)=0$, so ist $w(z)$ in dem Umgebung von ζ durch eine Entwicklung

$$\alpha+\alpha_1\sqrt[\lambda]{z-\zeta}+\alpha_2(\sqrt[\lambda]{z-\zeta})^2+\dots$$

darstellbar, wobei $\alpha_1\neq 0$ und λ ganzzahlig $\geqq 2$ ist.

HILFSSATZ 2. *Sind bei ganzzahligem $\lambda \geqq 1$*

$$w_1 = \beta+\beta_1\sqrt[\lambda]{z-\zeta}+\beta_2(\sqrt[\lambda]{z-\zeta})^2+\dots$$
$$w_2 = \gamma+\gamma_1\sqrt[\lambda]{z-\zeta}+\gamma_2(\sqrt[\lambda]{z-\zeta})^2+\dots$$

zwei Lösungen von (3) *in der Umgebung von $\zeta \in G$, die in ζ übereinstimmen ($\beta=\gamma$), so ist entweder $w_1\equiv w_2$, oder w_1 und w_2 sind verschiedene Zweige derselben analytischen Funktion, die im Punkte ζ zusammenhängen.*

Der erste Hilfssatz kann mit Hilfe von Cauchys Calcule des limites hergeleitet werden, der zweite ist eine Folge des Identitätssatzes für Potenzreihen.

Es seien $w=f_0$ und $w=f_1$ zwei Lösungen von (3), die in G bis auf algebraische Singularitäten, wo f_0 und f_1 endlich bleiben, überall analytisch fortsetzbar sind. f_0 und f_1 erscheinen bei analytischer Fortsetzung längs denselben Wegen (in G) eindeutig auf einer über G ausgebreiteten Riemannschen Fläche F, die zu G relativ unberandet ist. Wir nehmen an, dass f_0 und f_1 nicht identisch sind d.h. dass f_0 und f_1 entweder von verschiedenen analytischen Funktionen herrühren oder verschiedene Zweige derselben analytischen Funktion darstellen. Wir betrachten nun die Konstanten c, die

$$(1-c)f_0+cf_1$$

zu einer Lösung von (3) machen. Dieselben bilden eine Menge, die mit $E(f_0,f_1)$ bezeichnet werden soll.

SATZ 1. *Hat $E(f_0,f_1)$ einen Häufungspunkt im Endlichen, so ist*

$$W(z,w) = A(z)w+B(z)$$

wo A und B beide eindeutig und regulär in G sind.

Beweis. Es sei Ω eine schlichte Kreisscheibe auf F. Für jedes $c \in E(f_0, f_1)$ und jedes $z \in \Omega$ gilt dann

$$W(z, (1-c)f_0(z) + cf_1(z)) = (1-c)f'_0(z) + cf'_1(z)$$

oder

$$U(z, (1-c)f_0(z) + cf_1(z)) = \tag{6}$$
$$= ((1-c)f'_0(z) + cf'_1(z))V(z, (1-c)f_0(z) + cf_1(z)) .$$

Da $E(f_0, f_1)$ einen Häufungspunkt im Endlichen hat, geht die Gleichung (6) in eine Identität in c über. Wir bestimmen jetzt für $z \in \Omega$ und beliebiges w das c (von z und w abhängig) so, dass

$$(1-c)f_0(z) + cf_1(z) = w .$$

Wird dies in (6) eingetragen, so ergibt sich nach einigen Umformungen

$$U(z, w) = (A(z)w + B(z))V(z, w)$$

wo

$$A(z) = \frac{f'_0(z) - f'_1(z)}{f_0(z) - f_1(z)}$$

$$B(z) = \frac{f_0(z)f'_1(z) - f'_0(z)f_1(z)}{f_0(z) - f_1(z)}$$

Diese Gleichung, die zunächst nur für $z \in \Omega$ nachgewiesen worden ist, kann durch analytische Fortsetzung zu allen $z \in F$, die Windungspunkte ausgenommen, erweitert werden. Da die Stellen z in G, wo $V(z, w)$ für mindestens zwei verschiedene Werte w von Null verschieden ist, eine Menge bilden, die in G überall dicht ist, so schliesst man zunächst, dass A und B bis auf eventuelle isolierte Singularitäten eindeutig und regulär in G sind. Wäre $\zeta \in G$ ein singulärer Punkt von A oder B, so müsste f_0 und f_1 gemäss Hilfssatz 2 verschiedene Zweige derselben analytischen Funktion sein, die in jedem über ζ gelegenen Punkt ζ^* von F zusammenhängen. Es sei λ ($\geqq 2$) die Anzahl der verschiedenen Zweige, die in ζ^* zyklisch zusammenhängen. Infolge der Hilfssätze 1 und 2 gelten dann in der Umgebung von ζ^* die Entwicklungen

$$f_0(z) = f_0(\zeta^*) + \alpha_1 \sqrt[\lambda]{z - \zeta} + \ldots$$

$$f_1(z) - f_0(z) = \delta_1 \sqrt[\lambda]{z - \zeta} + \ldots$$

wo $\alpha_1 \neq 0$, $\delta_1 \neq 0$. Es folgt

$$\lim_{z \to \zeta} A(z)(z - \zeta) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\lim_{z \to \zeta} B(z)(z-\zeta) = -\frac{f_0(\zeta^*)}{\hat{\lambda}}.$$

Es wäre somit $V(\zeta, w)=0$ für alle $w \neq f_0(\zeta^*)$ und schliesslich

$$U(\zeta, w) = V(\zeta, w) = 0 \quad \text{für } w = f_0(\zeta^*).$$

Die letzte Gleichung steht im Widerspruch mit der Bedingung (4) und dies beweist unseren Satz.

3.

Wir kommen jetzt zum ersten Teil des Satzes von Rellich. Wir lassen Z eine endliche oder unendliche Menge

$$Z = \{z_1, z_2, \ldots\} \tag{7}$$

der z-Ebene sein, wobei die Bedingung

$$\lim_{\nu \to \infty} |z_\nu| = \infty$$

erfüllt sein soll, falls Z unendlich ist. Indem $n(r, Z)$ die Anzahl der im Kreise $|z| \leqq r$ gelegenen Punkte z_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ bezeichnet, setzen wir

$$N(r, Z) = \int_0^r [n(\varrho, Z) - n(0, Z)] \frac{d\varrho}{\varrho} + n(0, Z) \log r.$$

Sodann betrachten wir die Differentialgleichung (3), wobei wir annehmen, dass $U(z, w)$ und $V(z, w)$ für alle endliche Werte w und alle endliche $z \notin Z$ eindeutig und analytisch in z, w sind und ausserdem für die nämlichen Werte den Bedingungen (4) and (4a) genügen. Es seien $w = f_0$ und $w = f_1$ zwei Lösungen von (3), welche für alle endliche $z \notin Z$ bis auf algebraische Singularitäten, wo die Funktionen endlich bleiben, überall analytisch fortsetzbar sind. Wir nehmen an, dass f_0 und f_1 in dem Sinne verschieden sind, dass sie entweder zwei verschiedene analytische Funktionen repräsentieren oder bei analytischer Fortsetzung längs denselben Wegen als verschiedene Zweige derselben analytischen Funktion erscheinen. Unter diesen Voraussetzungen gilt der

SATZ 2. *Es sei $\varphi(z)$ eindeutig und regulär für alle endliche $z \notin Z$. Enthält $E(f_0, f_1)$ dann mindestens q $(\geqq 2)$ Elemente, so kann*

$$(1-\varphi) f_0 + \varphi f_1$$

nur dann eine Lösung von (3) *sein, wenn folgendes stattfindet*:

A. *Ist Z leer oder besteht Z aus einem einzigen Punkt, so muss φ eine Konstante sein.*

B. *Besteht Z aus μ $(2 \leqq \mu < \infty)$ Punkten, so muss φ eine rationale Funktion (ev. eine Konstante) sein, deren Zähler und Nenner vom Grade*

$$\leqq \frac{\mu - 1}{q - 1}$$

sind.

C. *Ist Z eine unendliche Menge, so muss φ eine meromorphe Funkton (ev. eine Konstante) sein, deren charakteristischen Funktion $T(r, \varphi)$ nach Ausschluss einer Menge in r von endlichem Gesamtmass der Ungleichung*

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{T(r, \varphi)}{N(r, Z)} \leqq \frac{1}{q-1} \tag{8}$$

genügt.

Beweis. Is $c \in E(f_0, f_1)$, so ist entweder $\varphi \equiv c$, oder es ist $\varphi(z) \neq c$ für alle endliche $z \notin Z$. Denn ist $\varphi(\zeta) = c$ für ein endliches $\zeta \notin Z$, so schlieest man mit Hilfe von Hilfssatz 2, dass

$$(1-\varphi) f_0 + \varphi f_1 \quad \text{und} \quad (1-c) f_0 + c f_1 \, .$$

Zweige derselben analytischen Funktion sind, die entweder identisch sind oder in ζ zyklisch zusammenhängen. Daraus folgt weiter, dass

$$\varphi(f_1 - f_0) \quad \text{und} \quad c(f_1 - f_0)$$

entweder identisch sind oder verschiedene Zweige derselben analytischen Funktion repräsentieren, die in ζ zusammenhängen. In beiden Fällen muss offenbar $\varphi \equiv c$ sein.

Es sei nun

$$\{c_1, c_2, \ldots, c_q\} \subseteqq E(f_0, f_1) \qquad \text{und} \qquad \varphi \not\equiv c_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, q) \, .$$

Nach dem soeben gefundenen gilt dann

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi(z) \neq c_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, q) \\ \varphi(z) \neq \infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \forall z \notin Z \\ z \neq \infty \, . \end{array}$$

Ist Z eine endliche (ev. leere) Menge

$$Z = \{z_1 \, z_2, \ldots, z_\mu\}$$

so ist φ, wie man mit Hilfe des Picardschen Satzes einsieht, eine rationale Funktion, deren ev. $c_1, c_2, \ldots, c_q, \infty$-Stellen der Menge

$$\{z_1, z_2, \ldots, z_\mu, \infty\}$$

gehören. Ist die Anzahl der Elemente von Z nicht grösser als 1, so reduziert sich φ daher auf eine Konstante, und das beweist den ersten Teil unseres Satzes. Es sei jetzt $\mu \geqq 2$ und φ keine Konstante. Ist s bei beliebigem a die Anzahl der Wurzeln von $\varphi(z)=a$, so gilt infolge der Riemannschen Geschlechtsformel

$$\sum (\tau - 1) = 2s-2$$

wobei die Summe links über sämtliche mehrfache Stellen (∞ ev. einbegriffen) von φ zu erstrecken ist, und τ dabei die Multiplizität der betreffenden Stelle angibt. Wegen

$$\sum (\tau - 1) \geqq s(q+1)-(\mu+1)$$

folgt $s(q-1) \leqq \mu - 1$, und das beweist den zweiten Teil unseres Satzes.

Es sei schliesslich Z eine unendliche Menge. In diesem Falle schliessen wir mit Hilfe des Picardschen Satzes, dass φ eine meromorphe Funktion ist. Wir bezeichen mit $\bar{n}(r, \varphi = a)$ die Anzahl der a-Stellen von φ im Kreise $|z| \leqq r$, wobei mehrfache Stellen ohne Berücksichtigung ihrer Multiplizität zu rechnen sind, und setzen

$$\bar{N}(r, \varphi = a) = \int_0^r [\bar{n}(\varrho, \varphi = a) - \bar{n}(0, \varphi = a)] \frac{d\varrho}{\varrho} + \bar{n}(0, \varphi = a) \log r .$$

Ist φ eine nichtkonstante Funktion, so gilt zufolge des zweiten Hauptsatzes der Theorie der meromorphen Funktionen (R. Nevanlinna [1])

$$(q-1)T(r, \varphi) < \bar{N}(r, \varphi = \infty) + \sum_{\nu=1}^{q} \bar{N}(r, \varphi = c_\nu) +$$
$$+ O(\log T(r, \varphi)) + O(\log r)$$

nach Ausschluss einer Wertemenge in r von endlichem Gesamtmass. Wegen

$$\bar{N}(r, \varphi = \infty) + \sum_{\nu=1}^{q} \bar{N}(r, \varphi = c_\nu) \leqq N(r, Z) \qquad (r \geqq 1)$$

folgt hieraus die zu beweisende Abschätzung (8).

Der bewiesene Satz lässt sich mit den notwendigen Modificationen zu Funktionen φ übertragen, die mit einer endlichen Anzahl von Zweigen für endliche $z \notin Z$ bis auf algebraische Singularitäten überall analytisch fortsetzbar sind.

LITERATURVERZEICHNIS

1. R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 46), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1953.

2. F. Rellich, *Über die ganzen Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung*, Math. Ann. 117 (1940), 587–589.

STORA GRÅMUNKEGRÄND 1
11127 STOCKHOLM
SVERIGE