MATH. SCAND. 47 (1980), 247–250

SUR LES SOUS-ESPACES DE $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$

C. SAMUEL

Résumé.

On démontre que si X est un sous-espace fermé de dimension infinie de $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$ alors X contient un sous-espace complémenté isomorphe à l_r avec $r=p$ ou $r=q$ ou $r=1/(1/p+1/q-1)$ si $p'>q$ ou un sous-espace isomorphe à c_0 si $p' \leqq q$.

Introduction.

Une application linéaire T d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est un plongement s'il existe deux réels $0<a \leqq b$ tels que pour tout $x \in E$

$$a\|x\| \leqq \|T(x)\| \leqq b\|x\| .$$

Un plongement surjectif est un isomorphisme.

Soient E et F deux espaces de Banach, la norme ε sur $E \otimes F$ est définie par:

$$\|u\|_\varepsilon = \sup \{|(\Phi \otimes \Psi)(u)| \; ; \; \Phi \in E', \; \|\Phi\| \leqq 1 \text{ et } \Psi \in F', \; \|\Psi\| \leqq 1\} ,$$

nous notons $E \hat{\hat{\otimes}} F$ le complété de $E \otimes F$ muni de la norme ε. Le symbole l_∞ notera ici l'espace des suites de scalaires qui converge vers 0 muni de la norme sup. (habituellement noté c_0). Nous avons caractérisé dans [4] les valeurs du réel r pour lesquelles l_r est isomorphe à un sous-espace de $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$; le but de ce travail est de démontrer que tout sous-espace fermé de dimension infinie de $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$ contient un sous-espace complémenté dans $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$ et isomorphe à l_r pour les mêmes valeurs de r. Etant donné une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un espace de Banach E nous notons $[x_i]_{i \in I}$ le sous-espace fermé de E engendré par $(x_i)_{i \in I}$.

Sous-espaces de $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$.

Rappelons la présentation de $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$ utilisée dans [4]. Notons pour

$$1 \leqq p < \infty \quad \mathrm{sl}_p(l_q) = \{x=(x_n)_n \; ; \; \forall n, x_n \in l_q \text{ et } \forall \varphi \in (l_q)' \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < +\infty\}$$

Reçu le 4. septembre, 1979.

$$p = \infty \qquad \mathrm{sl}_\infty(l_q) = \{x=(x_n)_n \ ; \ \forall n, x_n \in l_q \text{ et } \forall \varphi \in (l_q)' \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n)=0\}\ ,$$

Nous définissons alors une structure d'espace de Banach sur $\mathrm{sl}_p(l_q)$ en posant pour $x=(x_n)_n \in \mathrm{sl}_p(l_q)$

$$\|x\| = \sup\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{1/p} ; \varphi \in (l_q)' \text{ et } \|\varphi\| \leqq 1\right\} \quad \text{si } 1 \leqq p < \infty$$

et

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x_n)| \ ; n=1,2,\ldots \text{ et } \varphi \in (l_q)' \text{ et } \|\varphi\| \leqq 1\} \quad \text{si } p=\infty\ .$$

Nous notons, pour chaque entier n, U_n: $l_q \to l_q$ l'opérateur qui à $\xi=(\xi_i)_i \in l_q$ associe $U_n(\xi)=(\zeta_i)_i$ avec $\zeta_i=\xi_i$ si $1 \leqq i \leqq n$ et $\zeta_i=0$ si $i>n$; nous notons, pour chaque entier n, P_n: $\mathrm{sl}_p(l_q) \to \mathrm{sl}_p(l_q)$ l'opérateur qui à $x=(x_i)_i \in \mathrm{sl}_p(l_q)$ associe $P_n(x)=(y_i)_i$ avec $x_i=y_i$ si $1 \leqq i \leqq n$ et $y_i=0$ si $i>n$; nous notons aussi pour chaque entier m, Q_m: $\mathrm{sl}_p(l_q) \to \mathrm{sl}_p(l_q)$ l'opérateur qui à $x=(x_i)_i \in \mathrm{sl}_p(l_q)$ associe $Q_m(x)=(U_m(x_i))_i$. Il est démontré dans [4] que $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$ est isométrique à $\{x \in \mathrm{sl}_p(l_q) \ ; x=\lim_{n\to\infty} P_n(x)\}$. Il est clair que, pour chaque paire d'entiers n et m, $P_n \circ Q_m = Q_m \circ P_n$ et que $Q_m(l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q) \subset l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$.

LEMME. *Soient $(n_k)_k$ et $(m_k)_k$ deux suites strictement croissantes d'entiers; on suppose que $n_0=m_0=0$ et soit $(V_k)_k$ une suite normalisée de $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$ telle que pour tout entier k,*

$$V_k = (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(V_k) = (Q_{m_k} - Q_{m_{k-1}})(V_k);$$

alors il existe une projection de norme 1 de $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$ sur $[V_k]_{k=1}^{\infty}$.

Soient $r=1/(1/p+1/q-1)$ si $p'>q$ ou $r=\infty$ si $p' \leqq q$. Nous avons établi dans [4] que $(V_k)_k$ est isométriquement équivalente à la base canonique de l_r. Nous déduisons alors en utilisant la remarque 1 de [2, p. 21] que pour tout $x \in l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|(Q_{m_k} - Q_{m_{k-1}}) \circ (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(x)\|^r\right)^{1/r} \leqq \|x\|\ . \tag{1}$$

Pour chaque entier k nous fixons $\varphi_k \in (l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q)'$ tel que

$$\|\varphi_k\| = \|V_k\| = \varphi_k(V_k) = 1 \tag{2}$$

(théorème de Hahn–Banach); nous pouvons supposer en outre que pour tout entier k

$$\varphi_k = (P'_{n_k} - P'_{n_{k-1}})(\varphi_k) = (Q'_{m_k} - Q'_{m_{k-1}})(\varphi_k)\ . \tag{3}$$

Pour chaque $x \in l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q$ nous déduisons de (1), (2) et (3) que $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(x)|^r < \infty$; notons alors $P\colon l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q \to l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q$ l'application qui à $x \in l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q$ associe $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)V_k$, il est immédiat de vérifier que P est une projection de norme 1 de $l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q$ sur $[V_k]_{k=1}^{\infty}$.

THÉORÈME. *Soit X un sous-espace fermé de dimension infinie de $l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q$; alors X contient un sous-espace complémenté dans $l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q$ isomorphe à l_r avec $r=p$ ou $r=q$ ou $r=1/(1/p+1/q-1)$ si $p'>q$ ou $r=\infty$ si $p'\leqq q$.*

Nous envisageons deux éventualités:

1re ÉVENTUALITÉ. Il existe un entier N et un sous-espace fermé Y de X de dimension infinie tel que $P_N\,|\,_Y$ ou $Q_N\,|\,_Y$ est un plongement. Nous ne perdons pas de la généralité en supposant qu'il existe un entier N tel que $P_N|_X$ est un plongement; d'après [3] il existe une projection Q de $P_N(l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q)$ sur un sous-espace de $P_N(X)$ isomorphe à l_q; soit $R=(P_N|_X)^{-1}\circ Q\circ P_N$, il est immédiat de vérifier que R est une projection de $l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q$ sur un sous-espace de X isomorphe à l_q.

2e ÉVENTUALITÉ. Pour tout entier N et pour tout sous-espace fermé de dimension infinie Y de X, $P_N|_Y$ et $Q_N|_Y$ ne sont pas des plongements. Nous ne perdons pas de la généralité en supposant que X a une base normalisée $(x_n)_n$. Donnons-nous un réel $0<\varepsilon<1$ et soient deux réels $\varepsilon'>0$ et $\varepsilon''>0$ que nous fixerons plus loin. Puisque pour toute paire d'entiers n et m, $P_n|_{[x_i]_{i=m}^{\infty}}$ n'est pas un plongement nous pouvons trouver par récurrence une suite base-bloc normalisée $(y_k)_k$ de $(x_k)_k$ et une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$, $n_0=0$, tels que pour tout entier k

$$\|y_k-(P_{n_k}-P_{n_{k-1}})(y_k)\| \leqq \frac{\varepsilon'}{2^k}\,.$$

Nous notons $z_k=(P_{n_k}-P_{n_{k-1}})(y_k)$; pour $0<\varepsilon'$ assez petit ne dépendant que des données (cf. [1]) $(z_k)_k$ est une suite base de $l_p\hat{\hat{\otimes}}l_q$ telle que pour tout entier n, tout entier l et toute famille $a_1,\ldots,a_n$ de scalaires

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_{i+l}-\sum_{i=1}^{n} a_i z_{i+l}\right\| \leqq \frac{\varepsilon}{2^{l+1}}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_{i+l}\right\|. \tag{1}$$

Puisque pour toute paire d'entiers n et m, $Q_n|_{[y_i]_{i=m}^{\infty}}$ n'est pas un plongement nous pouvons trouver par récurrence, en utilisant (1), une suite-base bloc normalisée $(v_k)_k$ de $(z_k)_k$ et une suite strictement croissante d'entiers $(m_k)_k$ tels que $m_0=0$ et pour tout entier k

$$\|v_k-(Q_{m_k}-Q_{m_{k-1}})(v_k)\| \leqq \frac{\varepsilon''}{2^k}\,.$$

Nous notons $w_k = (Q_{m_k} - Q_{m_{k-1}})(v_k)$; pour $0 < \varepsilon''$ assez petit ne dépendant que des données (cf. [1]) $(w_k)_k$ est une suite-base de $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$ telle que pour tout entier n et toute famille $a_1, \ldots, a_n$ de scalaires

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i w_i - \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right\| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right\| .$$

En définitive, étant donné $0 < \varepsilon < 1$, il existe une suite-base $(w_k)_k$ de $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$, une suite-base $(u_k)_k$ de X et deux suites strictement croissantes d'entiers $(N_k)_k$ et $(M_k)_k$, $N_0 = M_0 = 0$, telles que pour tout entier k,

$$w_k = (P_{N_k} - P_{N_{k-1}})(w_k) = (Q_{M_k} - Q_{M_{k-1}})(w_k)$$

et pour tout entier n et toute famille $a_1, \ldots, a_n$ de scalaires

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i w_i - \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \right\| \leqq \varepsilon \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \right\| .$$

On conclut alors en utilisante le lemme et la méthode de perturbation.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Bessaga et A. Pelczynski, *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces*, Studia Math. 17 (1958), 151–164.
2. J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, *Classical Banach spaces* 1 (Ergebnisse Mathematik 92), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1977.
3. A. Pelczynski, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. 19 (1960), 209–228.
4. C. Samuel, *Sur la reproductibilité des espaces l_p*, Math. Scand. 45 (1979), 103–117.

MATHÉMATIQUE-INFORMATIQUE ET C.N.R.S. (LA 225)
FACULTÉ DES SCIENCES DE LUMINY
70, ROUTE LÉON LACHAMP
13288 - MARSEILLE CEDEX 2
FRANCE