MATH. SCAND. 48 (1981), 39–40

REMARQUE SUR LA CONJECTURE DE WEYL

B. HELFFER et PHAM THE LAI

L'objet de cette remarque est de montrer qu'il existe un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2, $P(x,D_x)$, symétrique, positif et un ouvert C^∞ de $\mathbf{R}^2$ tel que le comportement asymptotique des valeurs propres du problème de Dirichlet

$$Pu = \lambda u \qquad u|\partial\Omega = 0 \tag{1}$$

ne satisfait pas à la conjecture de Weyl.

Si $N_P(\lambda)$ est la fonction $\sum_{\lambda_j \leqq \lambda} 1$, il est bien connu que

$$N_P(\lambda) = (2\pi)^{-n}\omega_n|\Omega|\lambda^{\frac{1}{2}n} + O(\lambda^{\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})}) \tag{2}$$

où $|\Omega|$ est la mesure de Ω et ω_n la mesure de la boule unité de $\mathbf{R}^n$.

Dans [5], Pham The Lai, généralisant un résultat de R. Seeley [6] montre que pour le Laplacien Δ dans un domaine borné C^∞ de $\mathbf{R}^n$, on a:

$$N_\Delta(\lambda) - (2\pi)^{-n}\omega_n|\Omega|\lambda^{\frac{1}{2}n} = O(\lambda^{\frac{1}{2}(n-1)}) . \tag{3}$$

Il conjecture qu'il existe une constante d_n (dont il donne l'expression) telle que:

$$N_\Delta(\lambda) - (2\pi)^{-n}\omega_n|\Omega|\lambda^{\frac{1}{2}n} = d_n\lambda^{\frac{1}{2}(n-1)} + o(\lambda^{\frac{1}{2}(n-1)}) . \tag{4}$$

Dans [1], P. Berard donne des exemples où cette conjecture est vérifiée pour des domaines très particuliers.

Récemment, V. Ivrii, dans [3] et R. Melrose dans [4] annoncent des résultats confirmant (4) pour le Laplacien–Beltrami d'une variété riemanienne compacte C^∞ à bord, sous une hypothèse restrictive sur les trajectoires périodiques du flot H_P associé au symbole principal p.

On donne ici un exemple d'un opérateur elliptique d'ordre 2 à coefficient C^∞ pour lequel les valeurs propres du problème de Dirichlet associé dans un cercle de $\mathbf{R}^2$ ne vérifient pas le comportement asymptotique (4), c'est-à-dire pour lequel la conjecture de Weyl n'est pas vérifié.

Il s'agit en fait simplement de montrer qu'un exemple de P. Berard et G.

Reçu le 12. décembre, 1980.

Besson correspondant à un problème de Dirichlet pour le Laplacien–Beltrami L de l'hémisphère Nord H^2 fournit l'exemple souhaité.

D'après [2], on a en effet:

$$N_L(\lambda) = \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda}(1+\theta(\sqrt{\lambda})) + o(\sqrt{\lambda}) \tag{5}$$

où $\theta(\mu) = 2F(\mu) - 1$ et $F(\mu)$ est la partie fractionnaire $k_0(\mu)$ qui est la plus grande solution de l'équation $k^2 + k - \mu^2 = 0$.

En effet, la projection stéréographique sur le plan équatorial fournit une carte C^∞ pour la sphère moins le pôle Sud et l'image de l'hémisphère Nord dans cette carte est le disque dans $\mathbf{R}^2$ que l'on note Ω.

Dans ces coordonnées, le Laplacien–Beltrami est un opérateur différentiel P de degré 2, à coefficients C^∞.

Si g est la densité de la mesure μ sur Ω provenant de la mesure canonique sur la sphère, il est clair que l'opérateur $\tilde{P} = \sqrt{g}P(\sqrt{g})^{-1}$ est symétrique, positif et on a $N_{\tilde{P}}(\lambda) = N_L(\lambda)$.

Le problème de Dirichlet pour $\tilde{P}$ fournit donc l'exemple souhaité car d'après (5), (4) n'est pas vérifié.

On peut montrer que l'hypothèse faite par Ivrii et Melrose n'est pas satisfaite car on vérifie facilement que le flot associé à H_P *est ici périodique*!

REFERENCES

1. P. H. Berard, *Spectres et groupes cristallographiques* I: *domaines euclidens*, Invent. Math. 58 (1980), 179–199.
2. P. H. Berard et G. Besson, *Spectrec et groupes cristallographiques* II: *domaines sphériques.* À paraître à Ann. Inst. Fourier (Grenoble).
3. V. Ivrii, *On the second term in the spectral asymptotic for the Laplace Beltrami operator on manifolds with boundary and for elliptic operators acting between vector bundles*, Dokl. Akad. Nauk. 250 (1980), 1300–1302.
4. R. Melrose, *Weyl conjecture for manifold with concave boundary*, Geometry of the Laplace operator (Proceedings of Symposia in Pure Math. 36), Amer. Math. Society, Providence, R.I., 1980.
5. Pham The Lai, *Meilleures estimations asymptotiques des restes de la fonction spectrale et des valeurs propres relatifs au Laplacien*, Math. Scand. 48 (1981), 5–38.
6. R. Seeley, *A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacien in a domain of* $\mathbf{R}^3$, Adv. in Math. 29 (1978), 244–269.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
B.P. 1044
44037 NANTES CEDEX
FRANCE