

# INTEGRATION SEPARAT STETIGER FUNKTIONEN

ARNOLD JANSSEN

## Abstract.

This present paper extends a famous result of Glicksberg who deals with the integration of separately continuous functions on locally compact spaces. Our main theorem deals with separately continuous functions on completely regular spaces. This result proves the existence of the convolution of tight measures on completely regular semitopological semigroups. Finally a counterexample shows that in general the convolution product of two tight measures with compact support is not tight.

Die meisten Untersuchungen über die Integration separat stetiger Funktionen werden auf lokalkompakten Räumen geführt. Mit Hilfe tiefliegender Resultate von Grothendieck zeigt Glicksberg [2, 1.2] die Stetigkeit der Funktion  $y \mapsto \int h(x, y)\mu(dx)$  für beschränkte Radon-Maße  $\mu$  und separat stetige, beschränkte, komplexe Funktionen  $h$  auf dem Produkt lokalkompakter Räume  $X \times Y$ . Diese Arbeit gab den Anlaß für weitere Publikationen zu diesem Thema, z. B. [5], [13]. Auf lokalkompakten, halbtologischen Halbgruppen, in denen per Definition die Verknüpfung nur separat stetig ist, läßt sich damit das Faltungsprodukt von Radon-Maßen erklären [13].

Anstelle lokalkompakter Räume werden in dieser Arbeit vollständig reguläre Räume und straffe Maße untersucht. Obwohl das obige Resultat von Glicksberg nicht mehr gültig bleibt (Beispiel 8), gelingt es, ein (verallgemeinertes) Faltungsmaß  $\varrho$  zweier straffer Maße zu definieren. Anstatt mit einer stetigen Abbildung  $\psi$  zu beginnen (Vgl. [11]), wählen wir eine separat stetige Abbildung  $\psi: X \times Y \rightarrow Z$  und straffe Borel-Maße  $\mu$  und  $\nu$  auf  $X$  und  $Y$ . Für vollständig reguläre Räume und  $A \in \mathfrak{B}(Z)$  läßt sich das verallgemeinerte Faltungsmaß

$$\varrho(A) = \iint I_A(\psi(x, y))\mu(dx)\nu(dy)$$

definieren, das im allgemeinen nur noch  $\tau$ -glatt und nicht mehr straff ist.

Insbesondere lassen sich damit straffe Maße auf vollständig regulären, halbtologischen Halbgruppen falten. Alle Maße seien im folgenden als beschränkte, signierte Maße auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra eines topologischen Raumes vorausgesetzt. Die vorliegenden Ergebnisse stellen eine Erweiterung einiger Resultate auf der Dissertation des Autors dar [4].

Sei  $(X, \mathcal{T})$  stets ein topologischer Raum, der zunächst nicht notwendig als Hausdorffsch vorausgesetzt wird.  $\mathfrak{B}(X, \mathcal{T})$  bezeichne die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  und  $M(X, \mathcal{T})$  die Menge der beschränkten, signierten Borel-Maße auf  $X$ , kurz  $\mathfrak{B}(X)$  und  $M(X)$ . Jedes signierte Maß  $\mu \in M(X)$  läßt sich eindeutig in die Summe zweier positiver Maße  $\mu^+$  und  $\mu^-$  zerlegen, genannt Positiv- und Negativteil von  $\mu$ , so daß  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  gilt. Das Maß  $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$  heißt die Totalvariation von  $\mu$ . Ein Maß  $\mu \in M(X)$  heißt regulär, wenn für alle  $B \in \mathfrak{B}(X)$

$$|\mu|(B) = \sup \{ |\mu|(A) : A \subset B, A \text{ abgeschlossen} \}$$

gilt,  $\tau$ -glatt, wenn für jedes nach oben filtrierende Netz offener Mengen  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$

$$|\mu|\left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right) = \sup \{ |\mu|(U_\alpha) : \alpha \in I \}$$

gilt. Auf Hausdorffschen Räumen heißt  $\mu$  straff, wenn für alle  $B \in \mathfrak{B}(X)$  die Beziehung

$$|\mu|(B) = \sup \{ |\mu|(K) : K \subset B, K \text{ kompakt} \}$$

gilt. Ein signiertes Maß ist offenbar genau dann regulär (bzw.  $\tau$ -glatt oder straff), wenn Positiv- und Negativteil diese Eigenschaft besitzen.  $M(X, r)$ ,  $M(X, \tau)$  und  $M(X, t)$  bezeichne die Menge der regulären, der  $\tau$ -glatten und der straffen, signierten Borel-Maße,  $M_1(X, \cdot)$  (bzw.  $M_+(X, \cdot)$ ) die Teilmenge der Wahrscheinlichkeitsmaße (bzw. den positiven Kegel von  $M(X, \cdot)$ ). Bekanntlich gilt  $M(X, t) \subset M(X, \tau) \cap M(X, r)$  für Hausdorffsche Räume. Ferner ist auf regulären Räumen  $X$  jedes  $\tau$ -glatte Maß regulär, [10, P. 15]. Auf polnischen Räumen ist jedes Maß  $\mu \in M(X)$  straff. Überdies ist auf lokalkompakten Räumen jedes  $\tau$ -glatte Maß straff.

Die schwache Topologie auf  $M_+(X)$  ist der größte Topologie, so daß für alle unterhalbstetigen, beschränkten, reellwertigen Funktionen  $f$  die Abbildungen  $\mu \mapsto \mu(f) = \int f d\mu$  unterhalbstetig werden. Die Menge der stetigen, reellwertigen, beschränkten Funktionen auf  $(X, \mathcal{T})$  werde mit  $C_b(X, \mathcal{T})$  oder kurz mit  $C_b(X)$  bezeichnet. Ferner sei  $\sigma(M(X, \tau), C_b(X))$  die größte Topologie auf  $M(X, \tau)$ , so daß alle Abbildungen  $\mu \mapsto \mu(f)$  für  $f \in C_b(X)$  stetig sind. Die Spurtopologie dieser Topologie auf dem positiven Kegel werde mit  $\sigma(M_+(X, \tau), C_b(X))$  bezeichnet. Für vollständig reguläre Räume ist die letztgenannte Topologie identisch mit der Spurtopologie der schwachen Topologie auf  $M_+(X, \tau)$ , [10, 8.1]. Eine Teilmenge  $\mathcal{M} \subset M_+(X, t)$

heißt gleichstraff, wenn für jedes  $\varepsilon > 0$  eine kompakte Menge  $K$  existiert, so daß für alle  $\mu \in \mathcal{M}$   $\mu(X - K) < \varepsilon$  gilt und die Beziehung  $\sup_{\mu \in \mathcal{M}} \mu(X) < \infty$  erfüllt ist.

Für vollständig reguläre Räume ist bekanntlich jede gleichstraffe Menge schwach relativkompakt in  $M_+(X, t)$ . Ist umgekehrt auf einem vollständig regulären Raum  $X$  jede schwach kompakte Teilmenge von  $M_+(X, t)$  gleichstraff, so heißt  $X$  Prohorovraum. Polnische Räume und lokalkompakte Räume sind Beispiele für Prohorovräume, jedoch besitzt nicht jeder vollständig reguläre Raum diese Eigenschaft. Prohorovräume werden z. B. in der Arbeit von Mosiman und Wheeler [6] studiert.

Sei  $A \subset X$  eine Teilmenge eines topologischen Raumes, dann bezeichnet  $A^-$  den Abschluß von  $A$ ,  $A^c$  das Komplement von  $A$  in  $X$  und  $I_A$  die Indikatorfunktion der Menge  $A$ . Zu jedem  $\tau$ -glatten Maß  $\mu \in M_+(X, \tau)$  existiert der Träger, bezeichnet mit  $\text{supp } \mu$ . Der Träger von  $\mu$  ist die kleinste abgeschlossene Menge, die die gesamte Masse trägt. Ein Element  $x \in X$  liegt bekanntlich genau dann im Träger von  $\mu$ , wenn jede offene Umgebung von  $x$  positives Maß besitzt.

Für das Mischungsintegral  $\tau$ -glatter Wahrscheinlichkeitsmaße gilt das folgende

**LEMMA 1.** *Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $\nu \in M_1(Y, \tau)$  und  $F$  von  $Y$  in  $M_1(X, \tau)$  eine schwach stetige Abbildung. Dann ist das Maß  $\varrho(A) = \int F(y)(A)\nu(dy)$  (definiert für  $A \in \mathfrak{B}(X)$ )  $\tau$ -glatt und es gilt:*

$$\text{supp } \varrho = \left( \bigcup_{y \in \text{supp } \nu} \text{supp } F(y) \right)^-.$$

**BEWEIS.** Für offene Mengen  $U$  ist  $y \mapsto F(y)(U)$  unterhalbstetig, [10, 8.1]. Mit Hilfe eines Dynkinargumentes folgt für  $A \in \mathfrak{B}(X)$  die Meßbarkeit von  $y \mapsto F(y)(A)$ , wodurch  $\varrho$  wohldefiniert ist. Sei jetzt  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  ein nach oben gegen  $U$  filtrierendes System offener Mengen. Dann ist  $y \mapsto F(y)(U_\alpha)$  ein nach oben gegen  $y \mapsto F(y)(U)$  filtrierendes System unterhalbstetiger Funktionen, die durch 1 beschränkt sind.

Nach [10, P. 15] gilt:

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha} \{\varrho(U_\alpha)\} &= \sup_{\alpha} \left\{ \int F(y)(U_\alpha)\nu(dy) \right\} \\ &= \int \sup_{\alpha} \{F(y)(U_\alpha)\}\nu(dy) = \varrho(U). \end{aligned}$$

$\varrho$  ist deshalb  $\tau$ -glatt.

Um die Inklusion  $\supseteq$  zu beweisen, genügt es für  $y \in \text{supp } \nu$  die Beziehung

$\text{supp } \varrho \supset \text{supp } F(y)$  zu zeigen. Annahme: Es gibt ein  $y_0 \in \text{supp } \nu$  mit  $F(y_0)(\text{supp } \varrho^c) = \varepsilon > 0$ . Dann ist

$$V = \{y : F(y)(\text{supp } \varrho^c) > \varepsilon/2\}$$

eine offene Umgebung von  $y_0$ . Da  $y_0 \in \text{supp } \nu$  ist, gilt  $\nu(V) > 0$ . Das liefert den Widerspruch

$$\varrho(\text{supp } \varrho^c) \geq \int_V F(y)(\text{supp } \varrho^c) \nu(dy) \geq \frac{\varepsilon}{2} \nu(V) > 0.$$

» $\subset$ « ist trivial.

Für nicht negative Borel-meßbare Funktionen  $f$  oder  $f \in \mathcal{L}_1(\varrho)$  gilt die Desintegrationsformel

$$\varrho(f) = \int F(y)(f) \nu(dy).$$

Der Beweis benutzt den Aufbau der meßbaren Funktionen wie im Beweisgang des klassischen Satzes von Fubini.

Die topologischen Räume  $X$  und  $Y$  seien Hausdorffsch,  $\nu$  ein straffes Maß und es gelte die Beziehung  $F(Y) \subset M_1(X, t)$ . Das Beispiel 9 zeigt, daß das Mischungsmaß  $\varrho$  im allgemeinen nur  $\tau$ -glatt und nicht straff ist. Ist jedoch unter den obigen Voraussetzungen für jede kompakte Teilmenge  $K$  des Trägers von  $\nu$  die Menge der Maße  $\{F(y) : y \in K\}$  gleichstraff, so ist das Maß  $\varrho$  straff. Insbesondere ist für Prohorovräume  $X$  das Mischungsmaß  $\varrho$  straff. Der Beweis ist offensichtlich. (Man bedenke  $M(A, t) = M(A, \tau)$ , falls  $A \subset X$  kompakt ist.)

Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume. Eine Funktion  $\psi : X \times Y \rightarrow Z$  heißt separat stetig, wenn für alle  $y \in Y$   $x \mapsto \psi(x, y)$  und für alle  $x \in X$   $y \mapsto \psi(x, y)$  stetige Funktionen sind. Für lokalkompakte Räume  $X$  und  $Y$ , separat stetige, beschränkte, komplexe Funktionen  $h$  und ein beschränktes Radon-Maß  $\mu$  zeigt Glicksberg [2, 1.2] die Stetigkeit der Funktion  $y \mapsto \int h(x, y) \mu(dx)$ . Dieses Resultat ermöglicht es, die Faltung beschränkter Radon-Maße auf lokalkompakten halbtologischen Halbgruppen zu definieren, vergleiche z. B. Wong [13]. Eine Halbgruppe  $S$  heißt halbtologisch, wenn  $S$  eine Topologie trägt und die Verknüpfung in  $S$  als Abbildung von  $S \times S$  nach  $S$  separat stetig ist.

Für vollständig reguläre Räume bleibt die Aussage von Glicksberg nicht richtig, wie Beispiel 8 lehrt. Trotzdem läßt sich für straffe Borel-Maße auf vollständig regulären, halbtologischen Halbgruppen die Faltung erklären. Zu diesem Zweck ändern wir die ursprüngliche Topologie ab und gehen zu zwei feineren Topologien über. Diese Topologien sind zum einen noch so grob, daß sich jedes straffe Maß auf die größere Borel  $\sigma$ -Algebra fortsetzen läßt, zum

anderen aber die Stetigkeit von  $y \mapsto \int h(x, y)\mu(dx)$  für separat stetige, beschränkte, reellwertige Funktionen  $h$  gesichert ist.

Sei  $(X, \mathcal{T}_X)$  ein vollständig regulärer, topologischer Raum.  $\mathcal{S}_X$  bezeichne die Finaltopologie auf  $X$ , so daß alle Einbettungen  $K \hookrightarrow X$  für kompakte Mengen  $K \subset X$  stetig sind. Gebräuchlich ist auch der Name  $K$ -Topologie.  $K$ -Topologien sind im allgemeinen nicht wieder vollständig regulär [1, S. 127]. Nun gibt es aber eine vollständig reguläre Topologie  $\Gamma_X$ , die gröber als  $\mathcal{S}_X$  ist, aber dieselben stetigen, reellwertigen, beschränkten Funktionen  $C_b(X, \mathcal{S}_X)$  besitzt. Wähle als  $\Gamma_X$  die größte Topologie, so daß alle Funktionen  $f \in C_b(X, \mathcal{S}_X)$  stetig sind. (Die Konstruktion dieser Topologie taucht z. B. bei Varadarajan [12, S. 206] auf).  $\Gamma_X$  ist vollständig regulär, da die Funktionenmenge  $C_b(X, \mathcal{T}_X)$  schon die Punkte trennt. Weiter gilt: Besitzt die Topologie  $\mathcal{T}_X$  für jeden Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis oder ist die Topologie lokalkompakt, so gilt  $\mathcal{T}_X = \mathcal{S}_X$ , [3, S. 46]. Ist  $\mathcal{S}_X$  vollständig regulär, so folgt  $\Gamma_X = \mathcal{S}_X$ .

LEMMA 2. (a)  $\mathcal{T}_X \subset \Gamma_X \subset \mathcal{S}_X$ .

(b)  $(X, \Gamma_X)$  ist vollständig regulär.

(c)  $C_b(X, \mathcal{T}_X) \subset C_b(X, \Gamma_X) = C_b(X, \mathcal{S}_X)$ .

(d) Die kompakten Mengen stimmen in allen Topologien überein. Auf kompakten Mengen sind alle Spurtologien identisch.

Eine beschränkte Funktion  $f$  von  $X$  in die reellen Zahlen ist genau dann  $\Gamma_X$ -stetig, wenn die Restriktion auf jede kompakte Menge  $\mathcal{T}_X$ -stetig ist.

LEMMA 3. Seien  $(X, \mathcal{T}_X)$ ,  $(Z, \mathcal{T}_Z)$  vollständig reguläre Räume. Ist die Abbildung  $\varphi: X \rightarrow Z$

a)  $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Z)$ -stetig, so ist  $\varphi$   $(\mathcal{S}_X, \mathcal{S}_Z)$ -stetig,

b)  $(\mathcal{S}_X, \mathcal{S}_Z)$ -stetig, so ist  $\varphi$   $(\Gamma_X, \Gamma_Z)$ -stetig.

BEWEIS. a) Es genügt zu zeigen:  $\varphi|_K: K \rightarrow Z$  ist für kompakte Mengen  $K \subset X$  stetig, wenn  $K$  die  $\mathcal{T}_X$  Spurtopologie und  $Z$  die  $\mathcal{S}_Z$ -Topologie trägt. Da  $\varphi(K)$  kompakt ist, folgt die Behauptung.

b) Für  $f \in C_b(Z, \Gamma_Z)$  ist  $f \circ \varphi \in C_b(X, \mathcal{S}_X)$ .

Sei zusätzlich ein vollständig regulärer Raum  $(Y, \mathcal{T}_Y)$  gegeben.

KOROLLAR 4. Sei  $\psi$  eine Abbildung von  $X \times Y$  in  $Z$ .

a) Ist  $\psi$  bzgl. der  $\mathcal{T}_{(\cdot)}$ -Topologien separat stetig, so ist  $\psi$   $\mathcal{S}_{(\cdot)}$  separat stetig.

b) Ist  $\psi$  bzgl. der  $\mathcal{S}_{(\cdot)}$ -Topologien separat stetig, so ist  $\psi$   $\Gamma_{(\cdot)}$  separat stetig.

Insbesondere sind  $(X, \mathcal{S}_X)$  und  $(X, \Gamma_X)$  halbtologische Halbgruppen, wenn  $(X, \mathcal{T}_X)$  diese Eigenschaft besitzt.

Nun lassen sich straffe Borel-Maße eindeutig von  $\mathfrak{B}(X, \mathcal{F}_X)$  auf  $\mathfrak{B}(X, \Gamma_X)$  fortsetzen. Damit ergibt sich durch die  $\sigma(M(X, \Gamma_X), t)$ ,  $C_b(X, \Gamma_X)$ -Topologie ein neuer, geeigneter Konvergenzbegriff für straffe Maße. Im einzelnen gilt:

SATZ 5. Seien  $(X, \mathcal{F}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{F}_Y)$  und  $(Z, \mathcal{F}_Z)$  vollständig reguläre Räume.

(a) Für jede separat stetige, beschränkte Funktion  $h: (X, \Gamma_X) \times (Y, \Gamma_Y) \rightarrow \mathbb{R}$  und für jedes Paar straffer, signierter Maße  $\nu \in M(Y, t)$  und  $\mu \in M(X, t)$  sind die Funktionen

$$\begin{aligned} x &\mapsto \int h(x, y) \nu(dy) && \Gamma_X\text{-stetig und} \\ y &\mapsto \int h(x, y) \mu(dx) && \Gamma_Y\text{-stetig.} \end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\iint h(x, y) \mu(dx) \nu(dy) = \iint h(x, y) \nu(dy) \mu(dx).$$

(b) Seien  $\psi$  von  $(X, \mathcal{F}_X) \times (Y, \mathcal{F}_Y)$  in  $(Z, \mathcal{F}_Z)$  eine separat stetige Abbildung und  $\mu \in M(X, t)$ ,  $\nu \in M(Y, t)$ .

Durch  $\mu \Delta \nu(A) = \iint I_A(\psi(x, y)) \mu(dx) \nu(dy)$  ist für  $A \in \mathfrak{B}(Z, \Gamma_Z)$  ein signiertes,  $\tau$ -glattes Maß  $\mu \Delta \nu \in M((Z, \Gamma_Z), \tau)$  definiert.

(c) Sei  $f \in \mathcal{L}_1(|\mu| \Delta |\nu|)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mu \Delta \nu(f) &= \iint f(\psi(x, y)) \mu(dx) \nu(dy) \\ &= \iint f(\psi(x, y)) \nu(dy) \mu(dx) \end{aligned}$$

(d) Die Abbildung  $(\mu, \nu) \mapsto \mu \Delta \nu$  ist von

$$(M(X, t), \sigma(M(X, t), C_b(X, \Gamma_X))) \times (M(Y, t), \sigma(M(Y, t), C_b(Y, \Gamma_Y)))$$

in  $(M((Z, \Gamma_Z), \tau), \sigma(M((Z, \Gamma_Z), \tau), C_b(Z, \Gamma_Z)))$  separat stetig.

BEWEIS. Vorweg sei erwähnt, daß die  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}(X, \mathcal{S}_X)$  für jedes  $\mu \in M((X, \mathcal{F}_X), t)$  in der Vervollständigung von  $\mathfrak{B}(X, \mathcal{F}_X)$  bzgl.  $|\mu|$  enthalten ist. Deshalb besitzt  $\mu$  eine eindeutig bestimmte straffe Fortsetzung als Borel-Maß auf  $(X, \mathcal{S}_X)$  und  $(X, \Gamma_X)$ , und es ist daher unnötig, zwischen  $\mu$  und der Fortsetzung zu unterscheiden. Zum Beweis beachte man Lemma 2, [10, 2.2] und die Tatsache, daß  $\mathfrak{B}(X, \mathcal{S}_X)$  von dem Mengensystem

$\{A \subset X : A \cap K \text{ ist kompakt für alle kompakten Mengen } K \subset X\}$  erzeugt wird.

(a) Es genügt zu zeigen, daß die Restriktion auf jede kompakte Menge  $K \subset X$  stetig ist. Sei  $|h| \leq k$ . Für  $\varepsilon > 0$  gibt es eine kompakte Menge  $A \subset Y$  mit  $v^+(Y-A) < \varepsilon/k$ . Für alle  $x$  gilt daher

$$\left| \int h(x, y)v^+(dy) - \int_A h(x, y)v^+(dy) \right| < \varepsilon.$$

Nach [2, 1.2] ist aber  $x \mapsto \int_A h(x, y)v^+(dy)$  von  $K$  in  $\mathbb{R}$  stetig. Aus der gleichmäßigen Konvergenz für  $\varepsilon \mapsto 0$  folgt die Stetigkeit der Funktion  $x \mapsto \int h(x, y)v^+(dy)$  von  $K$  in  $\mathbb{R}$ . Dieselbe Aussage ist für  $v^-$  richtig. Daher folgt die  $\Gamma_X$ -Stetigkeit der Funktion  $x \mapsto \int h(x, y)v(dy)$ . Die zweite Aussage wird analog bewiesen. Aufgrund der gerade bewiesenen Aussagen lassen sich die Integrale

$$\iint h(x, y)\mu(dx)v(dy) \quad \text{und} \quad \iint h(x, y)v(dy)\mu(dx)$$

berechnen. Es besteht Gleichheit.

Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es kompakte Mengen  $K_1, K_2$ , so daß  $|\mu|(X-K_1) < \varepsilon/k$  und  $|v|(Y-K_2) < \varepsilon/k$  gilt. Nach [2, 3.1] gilt

$$\int_{K_2} \int_{K_1} h(x, y)\mu(dx)v(dy) = \int_{K_1} \int_{K_2} h(x, y)v(dy)\mu(dx).$$

Der Rest folgt durch Abschätzen mittels der Dreiecksungleichung unter Verwendung der Ungleichung

$$\left| \int f(x)\mu(dx) \right| \leq \int |f(x)| |\mu|(dx) \quad \text{für } f \in C_b(X).$$

(b)(c) Seien  $\mu$  und  $\nu$  zunächst Wahrscheinlichkeitsmaße. Für  $f \in C_b(Z, \Gamma_Z)$  und festes  $y \in Y$  wird durch  $\int f(\psi(x, y))\mu(dx)$  ein straffes Maß  $F(y) \in M_1(Z, t)$  definiert. Nach (a) ist die Funktion  $y \mapsto F(y)$   $(\Gamma_Y, \sigma(M_1(Z, t), C_b(Z, \Gamma_Z)))$ -stetig. Daher ist  $\mu \Delta \nu$  wohldefiniert und ein  $\tau$ -glattes Mischungsintegral auf  $(Z, \Gamma_Z)$ . Ferner stimmt  $\mu \Delta \nu$  mit dem  $\tau$ -glatten Mischungsmaß überein, das entsteht, wenn zunächst über  $y$  integriert wird. Zum Beweis beachte man Teil (a) und die Tatsache, daß  $\tau$ -glatte, beschränkte Maße eindeutig durch die Werte auf dem Funktionenraum  $C_b(Z, \Gamma_Z)$  festgelegt sind. Dieselbe Argumentation bleibt gültig, wenn  $\mu$  und  $\nu$  positiv sind. Für beliebige signierte Maße  $\mu \in M(X, t)$  und  $\nu \in M(Y, t)$  läßt sich das Maß  $\mu \Delta \nu$  durch

$$\mu \Delta \nu = \mu^+ \Delta \nu^+ + \mu^- \Delta \nu^- - \mu^- \Delta \nu^+ - \mu^+ \Delta \nu^-$$

definieren. Offenbar ist  $\mu \Delta v$   $\tau$ -glatt und die Desintegrationsformel ist für Indikatorfunktionen richtig (vergleiche Lemma 1 und Teil (a)). Nun zerlege man die Funktion  $f$  in Positiv- und Negativteil  $f = f^+ - f^-$ . Zum Beweis von Teil (c) verwende man unter Beachtung von  $|\mu| \Delta |v| (|f|) < \infty$  den Aufbau der meßbaren Funktionen.

(d) Sei  $v$  fest,  $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$  ein gegen  $\mu$  konvergentes Netz straffer Maße und  $f \in C_b(Z, \Gamma_Z)$ . Nun ist

$$x \mapsto \int f(\psi(x, y))v(dy)$$

$\Gamma_X$ -stetig und beschränkt. Hieraus folgt:  $\mu_\alpha \Delta v$  konvergiert gegen  $\mu \Delta v$ . Die Stetigkeit in der zweiten Komponente wird analog unter der Verwendung von (c) bewiesen.

Das Produktmaß straffer Borel-Maße  $|\mu| \otimes |v|$  läßt sich bekanntlich eindeutig zu einem straffen Borel-Maß  $|\mu| \hat{\otimes} |v|$  auf  $\mathfrak{B}(X \times Y)$  fortsetzen. Mit den Bezeichnungen aus Satz 5 (a) gilt:

**KOROLLAR 6.** Die separat stetige Funktion  $h$  ist  $|\mu| \hat{\otimes} |v|$ -fast überall meßbar.

**BEWEIS.** Seien  $K_1 \subset X, K_2 \subset Y$  kompakte Mengen. Dann folgt aus einem Resultat von Johnson [5, 1.4], daß die Funktion  $h \cdot I_{K_1 \times K_2}$   $|\mu| \hat{\otimes} |v|$ -fast sicher meßbar ist. Seien  $K_1^n \subset X$  und  $K_2^n \subset Y$  aufsteigende Folgen kompakter Mengen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu|(K_1^n) = |\mu|(X) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |v|(K_2^n) = |v|(Y).$$

Dann gilt:  $h = \lim_n h I_{K_1^n \times K_2^n}$   $|\mu| \hat{\otimes} |v|$ -fast sicher.

**KOROLLAR 7.** Sei  $(S, \mathcal{F}_S)$  eine vollständig reguläre, halbtologische Halbgruppe. Ferner seien  $\mu, v \in M(S, t)$  gegeben. Dann gilt:

(a) Durch die Gleichung

$$\mu * v(A) = \iint I_A(xy) \mu(dx) v(dy)$$

läßt sich für  $A \in \mathfrak{B}(S, \Gamma_S)$  das Faltungsprodukt der signierten Maße  $\mu$  und  $v$  erklären. Das Faltungsprodukt  $\mu * v$  ist ein  $\tau$ -glattes, signiertes Borel-Maß auf  $\mathfrak{B}(S, \Gamma_S)$ .

(b) Sind  $\mu, v$  positiv, so gilt

$$\text{supp}(\mu * v) = (\text{supp} \mu \text{supp} v)^-.$$



Überdies gelten die Stetigkeitsaussagen und die Desintegrationsformel aus Satz 5, wenn wir  $\psi(x, y) = xy$  setzen.

BEWEIS. (b) Ohne Einschränkung seien  $\mu$  und  $\nu$  Wahrscheinlichkeitsmaße. Mit  $\varepsilon_x$  bezeichnen wir das Punktmaß in  $x \in S$ . Die Abbildung  $x \mapsto F(x) = \mu * \varepsilon_x$  ist nach Satz 5  $\Gamma_S$ -stetig. Ferner gilt

$$\mu * \nu = \int F(x)\nu(dx) \quad \text{und} \quad \text{supp}(\mu * \varepsilon_x) = (\text{supp } \mu x)^-,$$

wie sich leicht zeigen läßt. Das Lemma 1 liefert die gewünschte Aussage.

Besitzt die separate stetige Funktion  $\psi$  in der Situation von Satz 5 die Eigenschaft, daß für alle kompakten Mengen  $K_1$  und  $K_2$ ,  $K_1 \subset \text{supp } |\mu|$ ,  $K_2 \subset \text{supp } |\nu|$ ,  $\psi(K_1 \times K_2)$  als Teilmenge von  $Z$  relativ kompakt ist, so ist  $\mu \Delta \nu$  ein straffes Maß. Im allgemeinen ist das Maß  $\mu \Delta \nu$  jedoch nur  $\tau$ -glatt und nicht straff (Vgl. Beispiel 9).

BEISPIEL 8. Für vollständig reguläre Räume  $X$  und  $Y$ , separat stetige, beschränkte Funktionen  $h$  und straffe Maß  $\mu$  folgt im allgemeinen nicht die Stetigkeit von  $y \mapsto \int h(x, y)\mu(dx)$ . Wähle

$$X = [0, 1], \quad Y = \{f: [0, 1] \mapsto [0, 1] \text{ stetige Funktion}\}$$

versehen mit der punktweisen Konvergenz,  $h(x, f) = f(x)$  und  $\mu$  als Lebesgue-Maß. Nun ist  $f \mapsto \int_{[0, 1]} f(x) dx$  nicht stetig in der punktweisen Konvergenz. Denn  $f \equiv 1$  liegt im Abschluß von  $M = \{f \in Y : \int f dx \leq \frac{1}{2}\}$ . Daher gibt es ein gegen  $f \equiv 1$  konvergentes Netz  $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$  in  $M$ , für das aber  $\int f_\alpha dx \leq \frac{1}{2}$  gilt.

BEISPIEL 9. Es gibt eine vollständig reguläre, halbtotologische Halbgruppe  $S$  und straffe Borel-Maße  $\mu'$  und  $\nu'$  mit kompakten Trägern, deren Faltungsprodukt nicht straff ist.

Um die Konstruktion durchführen zu können, benötigen wir einige Ergebnisse von Ressel [8], [9] und Prinz [7]. Das folgende Resultat wurde von Prinz [7, S. 44] bewiesen (Siehe Anhang):

Seien  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume und  $\mu_i$   $\tau$ -glatte, reguläre Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $X_i$ . Dann existiert genau ein  $\tau$ -glattes und reguläres Borel-Maß auf dem Produktraum  $\prod_{i \in I} X_i$ , welches das Produktmaß  $\otimes_{i \in I} \mu_i$  von  $\otimes_{i \in I} \mathfrak{B}(X_i)$  auf  $\mathfrak{B}(\prod_{i \in I} X_i)$  fortsetzt.

Wir bezeichnen die Fortsetzung mit  $\hat{\otimes}_{i \in I} \mu_i$ . Für abzählbare Produkte wurde dieser Satz von Ressel [8, T. 2] bewiesen. In [9] bemerkt Ressel, daß die Fortsetzung  $\hat{\otimes}_{i \in I} \mu_i$  genau dann ein straffes Maß liefert, wenn alle  $\mu_i$  straff sind und die Maße  $\mu_i$  bis auf höchstens abzählbar viele  $i \in I$  kompakten Träger

besitzen. Der Beweis läßt sich leicht mittels Theorem 2 aus der Arbeit von Ressel [8] führen (Vgl. z. B. auch [4, I § 1]).

Nun kommen wir zu dem angekündigten Beispiel. Die Menge

$$Y = \{f : [0, 1] \mapsto (0, 1] \text{ stetige Funktion}\}$$

ist versehen mit der punktweisen Konvergenz und der Verknüpfung  $(f, g) \mapsto g \circ f$  eine vollständig reguläre, halbtologische Halbgruppe. Das Intervall  $(0, 1]$  läßt sich mittels  $\varphi : (0, 1] \rightarrow Y, \varphi(x) = f_x$  (mit  $f_x(y) = x$ ) homöomorph in  $Y$  einbetten. Die Menge  $\varphi((0, 1])$  ist eine abgeschlossene, aber nicht kompakte Teilmenge von  $Y$ . Mit  $f_n$  bezeichnen wir für  $n \geq 2$  den folgenden Polygonzug aus  $Y: f_n(x) = 1$  für  $0 \leq x \leq 1 - 2/n$ . Für die Werte  $1 - 2/n < x \leq 1 - 1/n$  nehme  $(x, f_n(x))$  die Werte der Verbindungsgeraden an, die durch die Punkte  $(1 - 2/n, 1)$  und  $(1 - 1/n, 1/n)$  der Ebene führt. Für  $1 - 1/n < x \leq 1$  sei  $(x, f_n(x))$  durch die Werte der Verbindungsgeraden von  $(1 - 1/n, 1/n)$  und  $(1, 1)$  festgelegt. Die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \geq 2}$  konvergiert punktweise gegen  $f_1 \equiv 1$ . Daher ist die Menge  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset Y$  kompakt.

Nun wählen wir das Maß  $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varepsilon_{f_n}$  auf  $Y$ , das einen kompakten Träger besitzt.

Durch das Bildmaß  $\mu = (2\lambda|_{[\frac{1}{2}, 1]})^\varphi$  der Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf das Intervall  $[\frac{1}{2}, 1]$  unter der Abbildung  $\varphi$  wird ein weiteres straffes Maß  $\mu$  mit kompaktem Träger auf  $Y$  definiert. Wir betrachten die Faltung  $\mu * \nu$ . Der Träger von  $\mu * \varepsilon_{f_n}$  ergibt sich als

$$\varphi([\frac{1}{2}, 1])f_n = \{f_n \circ f_x : x \in [\frac{1}{2}, 1]\} = \{\varphi(f_n(x)) : x \in [\frac{1}{2}, 1]\}$$

nach Definition von  $\varphi$  und der Verknüpfung in der Halbgruppe  $S$ . Daher besitzt  $\mu * \nu$  den Träger  $\varphi((0, 1])$ , der nicht kompakt ist. Das Maß  $\mu * \nu$  ist jedoch ein straffes Borel-Maß.

Das  $\mathbb{R}$ -fache cartesische Produkt von  $Y$  mit sich selbst  $Y^{\mathbb{R}}$  bildet versehen mit der Produkttopologie und der kanonischen cartesianen Verknüpfung eine vollständig reguläre, halbtologische Halbgruppe. Wir setzen  $S = Y^{\mathbb{R}}, \mu' = \hat{\otimes}_{t \in \mathbb{R}} \mu$  und  $\nu' = \hat{\otimes}_{t \in \mathbb{R}} \nu$ . Die Maße  $\mu'$  und  $\nu'$  sind straffe Borel-Maße auf  $S$ , die einen kompakten Träger besitzen. Da aus dem Zusammenhang stets die Bedeutung hervorgeht, benutzen wir sowohl für die Faltung auf  $Y$  als auch für die Faltung von Maßen auf  $S$  das Symbol  $*$ . Nach dem oben zitierten Satz von Ressel ist das Maß  $\hat{\otimes}_{t \in \mathbb{R}} \mu * \nu$  ein  $\tau$ -glattes Borel-Maß auf  $S$ , das aber nicht straff ist.

Um das Beispiel abzuschließen genügt es, die Beziehung  $\mu' * \nu' = \hat{\otimes}_{t \in \mathbb{R}} \mu * \nu$  zu beweisen. Für endlichdimensionale Zylindermengen läßt sich die Gleichung sofort überprüfen. Daher stimmen die Maße auf der Produkt  $\sigma$ -Algebra überein. Da es sich auf beiden Seiten um  $\tau$ -glatte und reguläre Borel-Maße handelt, folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung, [7, S. 44].

Das Beispiel 9 zeigt insbesondere, daß das Mischungsintegral straffer Maße bezüglich eines straffen Maßes nicht straff ist. Auf Seite 145 der Arbeit [14] gibt L. Schwartz ebenfalls ein Gegenbeispiel an, das den letztgenannten Sachverhalt abdeckt. Abschließend sei erwähnt, daß sich Satz 5 (a) für beschränkte, komplexwertige Funktionen beweisen läßt.

ANHANG. Unabhängig von P. Ressel und P. Prinz bewiesen die Autoren I. Amemiya, S. Okada und Y. Okazaki in der Arbeit »Pre-Radon measures on topological spaces«, erschienen im Kodai Math. J. 1 (1978), 101–132, die zu Beginn des Beispiels 9 angeführten Resultate über die Existenz der  $\tau$ -glatten Fortsetzung des Produktmaßes (9.9) und die Charakterisierung der straffen Maße durch die Träger (9.11). Im Gegensatz zu P. Ressel und P. Prinz behandeln die Autoren jedoch nur Maße auf regulären Grundräumen. Für das Beispiel 9 ist dies jedoch ausreichend.

#### LITERATUR

1. D. H. Fremlin, D. J. Garling and R. G. Haydon, *Bounded measures on topological spaces*, Proc. London Math. Soc. (3) 25 (1972), 115–136.
2. I. Glicksberg, *Weak compactness and separate continuity*, Pacific J. Math. 11 (1961), 205–214.
3. J. Hoffmann-Jørgensen, *Theory of analytic sets*, Aarhus Univ., Math. Inst. Various Publ. Series 10, Aarhus, 1970.
4. A. Janssen, *Zulässige Translationen von Faltungshalbgruppen*, Dissertation, Dortmund, 1979.
5. B. E. Johnson, *Separate continuity and measurability*, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 420–422.
6. S. E. Mosiman and R. Wheeler, *The strict topology in a completely regular setting: relations to topological measure theory*, Canad. J. Math. 24 (1972), 873–890.
7. P. Prinz, *Schwache Topologie auf dem Raum der Bewertungen*, Dissertation, Universität München, 1977.
8. P. Ressel, *Some continuity and measurability results on spaces of measures*, Math. Scand. 40 (1977), 69–78.
9. P. Ressel, *The continuity of  $(\mu, \nu) \mapsto \mu \otimes \nu$* , Vortragstext für die Tagung für Wahrscheinlichkeitstheorie, Oberwolfach, 1977, Manuskript (unveröffentlicht).
10. F. Topsøe, *Topology and Measure*, Lecture Notes in Mathematics 133, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1970.
11. A. Tortrat, *Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires*, Paris, Masson et Cie, 1971.
12. V. S. Varadarajan, *Measures on topological spaces*, Amer. Math. Soc., Transl. 48 (1965), 161–228.
13. C. J. Wong, *Convolution and separate continuity*, Pacific J. Math. 75 (1978), 602–611.
14. L. Schwartz, *Surmartingales régulières à valeur mesures, et désintégration régulières d'une mesure*, J. Analyse Math 26 (1973), 1–168.