MATH. SCAND. 50 (1982), 25–43

THÉORÈMES DE DUALITÉ GLOBALE POUR LES $\mathscr{D}_X$-MODULES COHÉRENTS

Z. MEBKHOUT

1. Introduction.

On se propose d'expliquer l'analogie entre la dualité de *Poincaré* et de *Serre*. Ceci peut se faire dans le cadre des $\mathscr{D}_X$-modules cohérents (systèmes différentiels). La dualité pour les $\mathscr{D}_X$-modules fait apparaître la dualité de *Poincaré* et la dualité de *Serre* comme deux cas limites d'une *même situation* liée à la dimension de la variété caractéristique des systèmes différentiels qui leur donnent naissance. Ceci explique la suite spectrale qui les relie dans le cas lisse compact, et montre l'identité essentielle entre les deux cas.

En fait, grâce à la cohérence et la constructibilité, on peut traiter analytiquement la dualité de *Poincaré* pour l'espace localement compact sous jacent à un espace analytique complexe Y pourvu qu'il soit plongé dans une variété lisse X.

Auparavant, *Herrera–Liebermann* [6] ont traité le cas analytique compact par la méthode des Ω_X-modules et *Hartshorne* [4] le cas algébrique propre par la dualité de *Serre* formelle. Faute de cohérence ils ne pouvaient *localiser* pour avoir le cas non compact. Ceci est possible parce que l'on peut réaliser la cohomologie $H^i(Y; \mathbf{C})$ comme solution holomorphe globale d'un système différentiel à savoir sa « cohomologie locale algébrique » [12], [13]. D'autre part, on peut calculer son homologie de Borel–Moore $H_i^c(Y; \mathbf{C})$ comme hypercohomologie à support compact du complexe de De Rham du même système différentiel [12], [13]: c'est une traduction du théorème de comparaison de *Grothendieck* [3] qu'on peut interpréter en disant que le système de De Rham $\mathcal{O}_X$ est à « points singuliers réguliers » le long de tout sous-espace analytique complexe.

La formulation et la démonstration du théorème de dualité pour les $\mathscr{D}_X$-modules cohérents se font dans le Yoga général de *Grothendieck* qui disait dans l'introduction à [5]: « Il est d'ailleurs apparu depuis qu'il existe des théories cohomologiques de dualité formellement très analogues à celle développée ici dans toutes sortes d'autres contextes: faisceaux cohérents sur les espaces analytiques, (traité depuis par *Ramis–Ruget* [16]) faisceaux abéliens sur les

Reçu le 5. mai, 1980.

espaces topologiques (*Verdier*), modules galoisiens (*Verdier–Tate*), faisceaux de torsion sur les schémas munis de leur topologie étale, corps de classe entous genres ... » Peut-on rajouter $\mathscr{D}_X$-modules cohérents sur une variété analytique complexe?

Voici le plan suivi. La section 2 contient un bref rappel de la théorie des $\mathscr{D}_X$-modules. La section 3 contient les énoncés des théorèmes de dualité. La section 4 contient les exemples d'application. La section 5 rappelle la méthode de la « descente cohomologique » ainsi que le théorème de *Verdier* [23] nécessaire pour munir de topologies les espaces des solutions globales. La derniére section contient les démonstrations des théorèmes.

Nous ne traiterons ici que la théorie *absolue*, et nous espérons très prochainement traiter la dualité relative très importante pour l'étude de la connexion de *Gauss–Manin* d'une singularité à la *F. Pham.* Il nous reste à remercier *D. Liebermann* d'avoir attiré notre attention sur son article [9] en février 1976.

2. Rappels et notations.

On utilise les notations suivantes:

$(X, \mathscr{O}_X)$: variété analytique complexe lisse paracompacte de dimension n.

T^*X: fibré cotangent de X.

$\Omega_X^n = \Omega$: faisceau des n-formes holomorphes.

$\mathscr{D}_X^\infty = \mathscr{D}^\infty$: faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini sur X.

$\mathscr{D}_X = \mathscr{D}$: faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini sur X.

$\check{\mathscr{E}}_X^\infty = \check{\mathscr{E}}^\infty$: faisceau des opérateurs micro-différentiels d'ordre infini sur T^*X.

$\check{\mathscr{E}}_X = \check{\mathscr{E}}$: faisceau des opérateurs micro-différentiels d'ordre fini sur T^*X.

$D(\mathscr{A})$: catégorie dérivée de la catégorie des $\mathscr{A}$-modules, si $\mathscr{A}$ est un faisceau d'anneaux unitaires.
Les examples qui interviennent sont $\mathbf{C}_X$, $\mathscr{O}_X$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}^\infty$.

Π: la projection de T^*X sur X.

$\mathbf{R}\,hom$: foncteur dérivé à droite du foncteur *hom*.

$\overset{L}{\underset{\mathscr{A}}{\otimes}}$: foncteur dérivé à gauche du produit tensoriel sur $\mathscr{A}$.

Pour les définitions et les propriétés des faisceaux qui interviennent nous renvoyons à [19] ou à [8].

Rappelons simplement les faits suivants. Le faisceau d'anneaux $\mathscr{D}$ est cohérent et, étant donné un système différentiel d'ordre fini $\mathscr{M}$, c'est-à-dire un $\mathscr{D}$-module à gauche cohérent, on lui associe le système micro-différentiel

$$\check{\mathscr{M}} = \check{\mathscr{E}} \otimes_{\Pi^{-1}\mathscr{D}} \Pi^{-1}\mathscr{M} .$$

Le support du faisceau $\check{\mathcal{M}}$ sur T^*X est, par définition, la variété caractéristique de $\mathcal{M}$, que l'on note $\check{SS}(\mathcal{M})$.

On a le théorème fondamental suivant [19]:

THÉORÈME 2.1. *La variété caractéristique d'un système différentiel non nul $\mathcal{M}$ est un sous-espace analytique involutif.*

Rappelons qu'on appelle sous-espace involutif de T^*X un sous-espace analytique dont l'Idéal de définition de l'espace réduit associé est stable par *crochet* de *Poisson*, qui est défini sur T^*X. Un sous-espace involutif est de codimension au plus égal à $n = \dim X$. Un sous-espace holonome est par définition un sous-espace involutif de dimension $n = \dim X$. (Lagrangien dans la terminologie classique.)

Un système holonome $\mathcal{M}$ est un système dont la varieté caractéristique est holonome. On a le théorème suivant [7]:

THÉORÈME 2.2. *Le complexe des solutions holomorphes $\boldsymbol{Rhom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est un complexe C_X-analytiquement constructible si $\mathcal{M}$ est holonome.*

Rappelons qu'on appelle ainsi un complexe borné de faisceau d'espaces vectoriels complexes à cohomologie constructible. Un faisceau constructible est un faisceau $\mathcal{F}$ d'espaces vectoriels de dimension finie tel qu'il existe une stratification de $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ pour laquelle la restriction de $\mathcal{F}$ à chaque strate X_i est localement constante. Nous noterons $D(\mathsf{C}_X)_c$ la catégorie des complexes constructibles. La catégorie des faisceaux constructibles est épaisse.

Le faisceau d'anneaux $\mathcal{D}^\infty$ n'est pas cohérent mais fidèlement plat sur $\mathcal{D}$. On est amené à définir un système différentiel d'ordre infini *admissible* $\mathcal{M}^\infty$ comme un $\mathcal{D}^\infty$-module à gauche tel que, localement sur X, il existe un $\mathcal{D}$-module à gauche cohérent $\mathcal{M}$ et un isomorphisme:

$$\mathcal{M}^\infty \xrightarrow{\sim} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M} .$$

L'étude des systèmes admissibles se ramène essentiellement à l'étude des $\mathcal{D}$-modules cohérents, grâce à la fidèle platitude. En particulier ils admettent une variété caractéristique involutive. La difficulté est de décider étant donné un $\mathcal{D}^\infty$-module s'il est admissible ou pas. Un exemple significatif est donné par les faisceaux de cohomologie locale $\boldsymbol{H}^k_Y(X, \mathcal{O}_X)$ d'un espace analytique complexe Y de X [12], [13].

Nous noterons $D(\mathcal{D})_c$ (respectivement $D(\mathcal{D}^\infty)_c$) la sous-catégorie de $D(\mathcal{D})$ (respectivement de $D(\mathcal{D}^\infty)$) formée des complexes bornés à cohomologie $\mathcal{D}$-cohérente (respectivement $\mathcal{D}^\infty$-admissible) et $D(\mathcal{D})_h$ la sous-catégorie de $D(\mathcal{D})_c$ (respectivement de $D(\mathcal{D}^\infty)$) des complexes à cohomologie $\mathcal{D}$-holonome (respectivement $\mathscr{D}^\infty$-holonome). La catégorie des $\mathscr{D}$-modules holonomes (respectivement des $\mathscr{D}^\infty$-modules holonomes) *est épaisse.* Il résulte du Théorème 2.2 que le foncteur $\boldsymbol{Rhom}_{\mathscr{D}}(*, \mathcal{O}_X)$ (respectivement $\boldsymbol{Rhom}_{\mathscr{D}^\infty}(*, \mathcal{O}_X)$) envoit $D(\mathscr{D})_h$ (respectivement $D(\mathscr{D}^\infty)_h$) dans $D(\mathbf{C}_X)_c$.

Resolution libre d'un $\mathscr{D}_X$-module coherent.

Dans cette section, nous allons rappeler la construction d'une résolution locale libre finie d'un $\mathscr{D}$-module cohérent qui résulte de *la première suite de Spencer.*

On appelle bonne filtration d'un $\mathscr{D}$-module $\mathscr{M}$ une suite croissante

$$\mathscr{M}^{(0)} \subset \mathscr{M}^{(1)} \subset \ldots;$$

de $\mathcal{O}_X$-sous modules de $\mathscr{M}$ telle que:

1) Chaque $\mathscr{M}^{(m)}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent.
2) $\mathscr{D}^{(r)}\mathscr{M}^{(m)} \subset \mathscr{M}^{(m+r)}$.
3) $\exists\, m_0$; $\forall\, r$, $\mathscr{D}^{(r)}\mathscr{M}^{(m_0)} = \mathscr{M}^{(m_0+r)}$.
4) $\bigcup_m \mathscr{M}^{(m)} = \mathscr{M}$.

Localement, tout $\mathscr{D}$-module $\mathscr{M}$ cohérent admet une bonne filtration, par exemple celle induite par la filtration naturelle de $\mathscr{D}$, $\mathcal{O}_X \subset \mathscr{D}^{(1)} \subset \ldots$ dans une présentation locale de $\mathscr{M}$.

Soit $\mathscr{M} = \bigcup_m \mathscr{M}^{(m)}$ une bonne filtration de $\mathscr{M}$ et T le fibré des vecteurs tangents à X.

Pour tout k assez grand il existe un homomorphisme $\mathscr{D}$-linéaire:

$$\delta : \mathscr{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^p(T) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{M}^{(k)} \to \mathscr{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^{p-1}(T) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{M}^{(k+1)}$$

donné par

$$\begin{aligned}\delta(P \otimes (v_1 \wedge \ldots \wedge v_p) \otimes u) = & \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} P v_i \otimes (v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_p) \otimes u - \\ & - \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} P \otimes (v_1 \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_p) \otimes v_i u + \\ & + \sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq p} (-1)^{i+j} P \otimes ([v_i, v_j] \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge \hat{v}_j \wedge \ldots \wedge v_p) \otimes u\end{aligned}$$

où $\Lambda^p(T)$: faisceau des champs p vecteurs tangents à X

$[v_i, v_j]$: crochet des champs vecteurs v_i et v_j,

$\hat{v}_i$: omission du vecteur v_i.

DÉFINITION 2.3. On appelle première suite de Spencer de degré k de $\mathscr{M}$ le complexe:

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^{(k)} \xleftarrow{\delta} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^1(T) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^{(k-1)} \leftarrow \dots$$
$$\dots \xleftarrow{\delta} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Lambda^n(T) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^{(k-n)} \leftarrow 0 .$$

PROPOSITION 2.4. *La première suite de Spencer de degré k d'un $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ admettant une bonne filtration est exacte.*

EXEMPLE 2.5. Prenons $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$; la filtration constante $\mathcal{M}^{(m)} = \mathcal{O}_X$ est une bonne filtration et la suite de Spencer de $\mathcal{O}_X$ se réduit localement au complexe de Koszul gauche. En particulier c'est une résolution projective de $\mathcal{O}_X$ en tant que $\mathcal{D}_X$-module à gauche.

PROPOSITION 2.6. *Tout $\mathcal{D}$-module cohérent $\mathcal{M}$ admet localement sur X une résolution libre de longueur 2n:*

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{D}^{r_0} \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{D}^{r_{2n}} \leftarrow 0 .$$

PREUVE. On prend une bonne filtration de $\mathcal{M}$ qui existe localement, soit $\bigcup_m \mathcal{M}^{(m)}$. Considérons le diagramme:

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccccccc}
0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow & \mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{M}^{(k)} & \leftarrow \dots \leftarrow & \mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X}\Lambda^n(T)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{M}^{(k-n)} & \leftarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & \\
& \mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}^{0,k} & \leftarrow \dots \leftarrow & \mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}^{0,k-n} & \\
& \vdots & & \vdots & \\
& \uparrow & & \uparrow & \\
& \mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}^{n,k} & \leftarrow \dots \leftarrow & \mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}^{n,k-n} & \\
& \uparrow & & \uparrow & \\
& 0 & & 0 . &
\end{array}$$

La première suite horizontale est la suite de Spencer de $\mathcal{M}$ de degré k et les lignes verticales sont obtenus grâce aux résolutions $\mathcal{O}_X$-libres de $\Lambda^i(T) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^{(k-i)}$ de longueur n qui existent grâce au théorème de Syzygies, les faisceaux $\Lambda^i(T) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}^{(k-i)}$ étant $\mathcal{O}_X$ cohérents. Mais la platitude de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{O}_X$ montre que le complexe double (*) ext exact. Le complexe simple associé de composantes

$$\bigoplus_{i+j=r} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{i,j}$$

est une résolution libre de $\mathcal{M}$ en tant que $\mathcal{D}$-module. Comme i et j varient entre 0 et n on obtient ainsi une résolution de longueur ou plus $2n$.

Pour passer d'un $\mathcal{D}$-module cohérent à un complexe $\mathcal{M}$ de $D(\mathcal{D})_c$ on résonne par récurrence sur le plus grand entier l tel que $H^l(\mathcal{M}) \neq 0$. Si $l > 1$ on dispose d'un triangle distingué dans $D(\mathcal{D})$:

$$
\begin{array}{ccc}
 & H^l(\mathcal{M})[-l] & \\
\swarrow & & \nwarrow \\
\mathcal{M}' & \rightarrow & \mathcal{M} .
\end{array}
$$

Le complexe $\mathcal{M}'$ admet *localement* une résolution finie par des $\mathcal{D}$-modules localement libres de type fini en vertu de l'hypothèse de récurrence et donc $\mathcal{M}$ admet de même une telle résolution.

Par platitude tout complexe de $D(\mathcal{D}^\infty)_c$ admet *localement* une résolution finie par des $\mathcal{D}^\infty$-modules libres de type fini.

3. Enoncé des théorèmes de dualité.

Soit $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D})_c$; le complexe de De Rham de $\mathcal{M}$ est, par définition, égal à

$$\boldsymbol{R}\, hom_{\mathcal{D}}\, (\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) .$$

Nous le noterons DR $(\mathcal{M})$.

EXEMPLE. Si $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ (système de De Rham), on a

$$\boldsymbol{R}\, hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{DR}\,(\mathcal{O}_X) = \Omega^{\cdot}_X = \mathbf{C}_X \quad \text{dans } D(\mathbf{C}_X) .$$

C'est le lemme de *Poincaré*.

Le complexe des solutions holomorphes globales est, par définition, égal au complexe d'espaces vectoriels:

$$\boldsymbol{R}\Gamma(X\,;\, \boldsymbol{R}\, hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) = \boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) .$$

Nous noterons

$$\boldsymbol{E}^i(\mathcal{M}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}}\,(X;\, \mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$$

son i-ème espace de cohomologie.

De même, le complexe de De Rham global à supports compacts est égal, par définition, au complexe d'espaces vectoriels:

$$\boldsymbol{R}\Gamma_c(X, \mathrm{DR}\,(\mathcal{M})) = \boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathcal{D},c}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) .$$

L'indice c désigne la famille des compacts de X. Nous noterons

$$\boldsymbol{E}^c_i(\mathcal{M}) = \mathrm{Ext}^{2n-i}_{\mathcal{D},c}\,(X;\, \mathcal{O}_X, \mathcal{M})$$

son $(2n-i)$-ième espace de cohomologie.

L'interprétation des Ext de Yoneda nous donne une application bilinéaire

$$E_i^c(\mathcal{M}) \times E^i(\mathcal{M}) \to E_0^c(\mathcal{O}_X)\,.$$

Le lemme de Poincaré nous montre que

$$E_0^c(\mathcal{O}_X) = H_c^{2n}(\mathrm{DR}\,(\mathcal{O}_X)) = H_c^{2n}(X\,;\,\mathbf{C}_X)\,.$$

La trace élémentaire (intégration) nous donne une forme linéaire

$$H_c^{2n}(X\,;\,\mathbf{C}_X) \to \mathbf{C}\,.$$

En composant, on trouve une forme bilinéaire que nous noterons par $A(\mathcal{M})$:

$$A(\mathcal{M}) \;:\; E_i^c(\mathcal{M}) \times E^i(\mathcal{M}) \to \mathbf{C}\,.$$

THÉORÈME 3.1. *Soit $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D})_c$; alors il existe un unique couple de topologie* Q.F.S.–Q.D.F.S. *sur $E^i(\mathcal{M})$ et $E_i^c(\mathcal{M})$ tel que $A(\mathcal{M})$ induise une dualité parfaite entre les séparés associés.*

On rappelle que Q.F.S. veut dire quotient de Fréchet–Schwartz et que Q.D.F.S. veut dire quotient de dual de Fréchet–Schwartz.

THÉORÈME 3.2. *Soit $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D})_h$; alors $A(\mathcal{M})$ induit un isomorphisme se $E^i(\mathcal{M})$ sur le dual algébrique de $E_i^c(\mathcal{M})$.*

Les constructions précédentes restent valables si on part d'un complexe $\mathcal{M}^\infty$ de $D(\mathcal{M}^\infty)_c$. Les significations de $E^i(\mathcal{M}^\infty)$, $E_i^c(\mathcal{M}^\infty)$ et de $A(\mathcal{M}^\infty)$ sont claires. Il résultera des démonstrations des théorèmes de dualité que l'on obtient les mêmes théorèmes pour les $\mathcal{D}^\infty$-modules qui sont intéressants pour les applications comme on le verra.

THÉORÈME 3.1 bis. *Soit $\mathcal{M}^\infty$ un complexe de $D(\mathcal{M}^\infty)_c$; alors il existe un unique couple de topologies* Q.F.S.–Q.F.S. *sur $E^i(\mathcal{M}^\infty)$ et $E_i^c(\mathcal{M}^\infty)$ tel que $A(\mathcal{M}^\infty)$ induise une dualité parfaite entre les séparés associés.*

THÉORÈME 3.2 bis. *Soit $\mathcal{M}^\infty$ un complexe de $D(\mathcal{M}^\infty)_h$; alors $A(\mathcal{M}^\infty)$ induit un isomorphisme de $E^i(\mathcal{M}^\infty)$ sur le dual algèbrique de $E_i^c(\mathcal{M}^\infty)$.*

4. Exemples d'applications.

4.1. *Dualité de Serre.*

Prenons $\mathcal{M} = \mathcal{D}$, qui appartient à $D(\mathcal{D})_c$. On a $\check{S}S(\mathcal{D}) = T^*X$ et

$$\boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{D}, \mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_X$$

$$\mathrm{DR}\,(\mathscr{D}) = \Omega_X[-n] \quad \text{(voir par exemple [12])}\,.$$

Donc

$$\boldsymbol{E}^i(\mathscr{D}) = \boldsymbol{H}^i(X, \mathscr{O}_X)$$

$$\boldsymbol{E}_i^c(\mathscr{D}) = \boldsymbol{H}_c^{2n-i}(X, \Omega_X[-n]) = \boldsymbol{H}_c^{n-i}(X, \Omega_X)\,.$$

Si on applique le Théorème 3.1 à $\mathscr{M} = \mathscr{D}$, on trouve la dualité de *Serre*.

4.2. *Dualité de Poincaré.*

Prenons $\mathscr{M} = \mathscr{O}_X$ qui appartient à $D(\mathscr{D})_h$ puisque $\check{SS}(\mathscr{O}_X) = X$ identifiée à la section nulle de T^*X.

Mais

$$\boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X) = \mathrm{DR}\,(\mathscr{O}_X) = \mathbf{C}_X \text{ dans } D(\mathbf{C}_X)\,.$$

On a donc

$$\boldsymbol{E}^i(\mathscr{O}_X) = \boldsymbol{H}^i(X; \mathbf{C})$$

$$\boldsymbol{E}_i^c(\mathscr{O}_X) = \boldsymbol{H}_c^{2n-i}(X; \mathbf{C})$$

et si on applique le Théorème 3.2 à $\mathscr{M} = \mathscr{O}_X$, on trouve la dualité de *Poincaré* mais par voie *purement analytique.*

4.3. *Dualité de Serre pour les $\mathscr{O}_X$-modules cohérents.*

Prenons un complexe $\mathscr{F}$ de $D(\mathscr{O}_X)_c$, catégorie des complexes bornés à cohomologie $\mathscr{O}_X$-cohérente. On lui associe le complexe

$$\mathscr{M}_{\mathscr{F}} = \mathscr{D} \otimes^{\boldsymbol{L}}_{\mathscr{O}_X} \boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X) = \mathscr{D} \otimes_{\mathscr{O}_X} \boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)\,.$$

Le faisceau $\mathscr{D}$ est plat sur $\mathscr{O}_X$; il en résulte que $\mathscr{M}_{\mathscr{F}}$ appartient à $D(\mathscr{D})_c$. On a

$$\boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{M}_{\mathscr{F}}, \mathscr{O}_X) = \boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{O}_X}(\boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X), \mathscr{O}_X) = \mathscr{F}\,.$$

La première égalité résulte de la platitude; la deuxième du fait que le faisceau $\mathscr{O}_X$ est dualisant pour les faisceaux $\mathscr{O}_X$-cohérents (X étant lisse!).

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathrm{DR}\,(\mathscr{M}_{\mathscr{F}}) &= \boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{D} \otimes_{\mathscr{O}_X} \boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)) \\ &= \boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{D}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X) \\ &= \Omega_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{O}_X)[-n]\,. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{DR}\,(\mathscr{M}_{\mathscr{F}}) &= \boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \Omega[-n]) \quad \text{et} \\ \boldsymbol{E}(\mathscr{M}_{\mathscr{F}}) &= \boldsymbol{H}^i(X;\mathscr{F}) \\ \boldsymbol{E}_i^c(\mathscr{M}_{\mathscr{F}}) &= \mathrm{Ext}^{n-i}_{\mathscr{O}_X,c}(X;\mathscr{F},\Omega_X)\,. \end{aligned}$$

Si on applique le Théorème 3.1 à $\mathscr{M} = \mathscr{M}_{\mathscr{F}}$, on trouve la dualité de Serre pour les $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, due à B. Malgrange ([10] théorème de préparation), K. Suominen ([21] homologie) et Ramis–Ruget ([16] complexe dualisant). La dualité de Ramis–Ruget s'applique à X espace analytique complexe; naturellement, faute de savoir ce que sera $\mathscr{D}$ sur un espace ou ce qui le remplace, on n'a pas ici un tel résultat.

4.4. *Dualité de Poincaré pour les espaces analytiques complexes.*

C'est cet exemple qui a *motivé* ce travail.

Soit Y un sous-espace analytique complexe de X, défini par un Idéal cohérent $\mathscr{I}$, non nécessairement réduit. Considérons le complexe de cohomologie locale

$$\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{O}_X) = \boldsymbol{R}\varinjlim_k hom_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{I}^k;\mathscr{O}_X)\,.$$

L'intérêt de ce complexe, c'est qu'il reflète la structure réduite d'espace analytique. La structure de $\mathscr{D}$-module de $\mathscr{O}_X$ induit une structure de $\mathscr{D}$-module sur $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{O}_X)$ qui appartient en fait à $D(\mathscr{D})_h$ [12], [13].

Dans [13], on construit un complexe canonique de $\mathscr{D}_X$-modules $L^{\cdot}_{[Y]}(\mathscr{O}_X)$ sur X, qui réalise la cohomologie de $\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{O}_X)$. Ce complexe relativise la construction du complexe de Cousin de Ramis–Ruget $L^{\cdot}(\mathscr{O}_X)$ [16] auquel il se réduit si $Y = X$.

Le complexe $\boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{D}}(\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{O}_X), \mathscr{O}_X)$ est égal dans $D(\mathbf{C}_X)$ à $\mathbf{C}_Y$, faisceau constant sur Y. C'est le lemme de *Poincaré singulier* et le Théorème 1.1 de [13]. On a donc

$$\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{O}_X)) = \boldsymbol{H}^i(X;\mathbf{C}_Y) = \boldsymbol{H}^i(Y;\mathbf{C})\,.$$

D'autre part, le complexe de de Rham

$$\mathrm{DR}\,(\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathscr{O}_X))$$

est égal à

$$\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathrm{DR}\,(\mathscr{O}_X)) = \boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathbf{C}_X)\,.$$

C'est le Théorème 3.1 de [13], qui résulte, par un argument combinatoire du théorème de comparaison de Grothendieck [3].

Mais les groupes d'homologie de Borel–Moore à support compact de Y sont égaux aux groupes d'hypercohomologie à support compact de son complexe dualisant topologique, qui est $\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathbf{C}_X[2n])$.

On a donc

$$H_i^c(Y;\mathbf{C}) = H_c^{-i}(X;\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathbf{C}[2n])) = H_c^{2n-i}(X;\boldsymbol{R}\Gamma_Y(\mathbf{C}_X)).$$

Mais, en vertu du résultat précédent, on a

$$H_i^c(Y;\mathbf{C}) = H_c^{2n-i}(X,\boldsymbol{R}\Gamma_Y(C_X)) = H_c^{2n-i}(X,\mathrm{DR}(\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)))$$
$$= E_i^c(\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)).$$

En appliquant le théorème 3.2 à $\mathcal{M}=\boldsymbol{R}\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$, on trouve la dualité de Poincaré pour l'espace localement compact sous-jacent à l'espace Y, mais par voie *purement analytique*. Auparavant, Herrera-Liebermann ont traité le cas analytique compact ($X=$compact lisse) par la méthode des $\Omega_X^{\cdot}$-modules [6] et R. Hartshorne le cas algébrique propre [4] par la dualité de Serre formelle.

On peut dire en conclusion que la dualité de Serre s'obtient pour les systèmes dont la variété caractéristique est de dimension voisine de $2n=2\dim X$ et que la dualité de Poincaré s'obtient pour les systèmes dont la variété caractéristique est de dimension $n=\dim X$. C'est une interprétation géométrique de la suite spectrale qui les relie.

4.5. *Dualité de Verdier pour les faisceaux constructibles.*

L'exemple précédent concernait le faisceau constant $\mathbf{C}_Y$ sur un espace analytique de X. C'est un cas particulier de faisceau constructible sur X, mais il a l'avantage de se réaliser comme solution *globale* d'un système différentiel d'ordre *fini*. L'avantage des systèmes d'ordre infini, c'est qu'ils permettent de réaliser un faisceau constructible comme solution *globale* d'un système admissible. Cela permettra de traiter par voie *analytique* la dualité de Verdier [22] si l'on prend comme coefficients des faisceaux constructibles. Rappelons [22] qu'étant donné un espace localement compact de dimension finie X, on dispose d'un complexe dualisant T_X pour les faisceaux d'espaces vectoriels complexes $\mathcal{F}$, tel que l'on ait:

$$\boldsymbol{R}\mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(R\Gamma_c(X;\mathcal{F}),\mathbf{C}) = \boldsymbol{R}\Gamma(X, R\,hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F},T_X)).$$

Si X est une variété analytique complexe lisse, $T_X=\mathbf{C}_X[2n]$ et la formule devient

$$\boldsymbol{R}\mathrm{hom}_{\mathbf{C}}(R\Gamma_c(X;\mathcal{F})[2n],\mathbf{C}) = \boldsymbol{R}\Gamma(X, R\,hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{F},\mathbf{C}_X)).$$

Considérons un complexe constructible $\mathcal{L}$. La structure de $\mathcal{D}^\infty$-module de $\mathcal{O}_X$ induit une structure de $\mathcal{D}^\infty$-complexe sur $\boldsymbol{R}\,hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{L},\mathcal{O}_X)$. En fait ([14]; Théorème 3.1) le complexe $\boldsymbol{R}\,hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{L},\mathcal{O}_X)$ appartient à $D(\mathcal{D}^\infty)_h$ et l'on a

$$\boldsymbol{R}\mathrm{hom}_{\mathcal{D}^\infty}(\boldsymbol{R}\,hom_{\mathbf{C}_X}(\mathcal{L},\mathcal{O}_X),\mathcal{O}_X) = \mathcal{L}.$$

Ce qui réalise $\mathscr{L}$ comme solution globale d'un système admissible. *Localement*, on peut réaliser $\mathscr{L}$ comme solution d'un système holonome d'ordre *fini*, même à points *singuliers réguliers*, mais le passage du local au global reste encore à explorer. D'autre part, on a [14]

$$\mathrm{DR}\,(\boldsymbol{R}\,hom_{\mathsf{C}_X}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_X)) = \boldsymbol{R}\,hom_{\mathsf{C}_X}(\mathscr{L}, \mathsf{C}_X)\,.$$

On a donc, avec les notations de la section 3:

$$\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{R}\,hom_{\mathsf{C}_X}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_X)) = \boldsymbol{H}^i(X\,;\,\mathscr{L})$$

$$\boldsymbol{E}_i^c(\boldsymbol{R}\,hom_{\mathsf{C}_X}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_X)) = \mathrm{Ext}^{2n-i}_{\mathsf{C}_X,c}\,(X\,;\,\mathscr{L}, \mathsf{C}_X)\,.$$

En appliquant le Théorème 3.2 bis à

$$\mathscr{M}^\infty = \boldsymbol{R}\,hom_{\mathsf{C}_X}(\mathscr{L}, \mathscr{O}_X)\,,$$

on trouve que

$$\boldsymbol{R}\Gamma(X, \mathscr{L}) = \boldsymbol{R}\,hom_{\mathsf{C}}(\boldsymbol{R}\Gamma_c(X\,;\,\boldsymbol{R}\,hom_{\mathsf{C}_X}(\mathscr{L}, \mathsf{C}_X)[2n], \mathsf{C}))\,.$$

Si l'on pose $\mathscr{F} = \boldsymbol{R}\,hom_{\mathsf{C}_X}(\mathscr{L}, \mathsf{C}_X)$, on trouve la formule de *Verdier* rappelée puisque

$$\boldsymbol{R}\,hom_{\mathsf{C}_X}(\mathscr{F}, \mathsf{C}) = \boldsymbol{R}\,hom_{\mathsf{C}_X}(\boldsymbol{R}\,hom_{\mathsf{C}_X}(\mathscr{L}, \mathsf{C}_X);\, \mathsf{C}_X) = \mathscr{L}\,.$$

Le complexe C_X est dualisant pour les faisceaux de $D(\mathsf{C}_X)_c$ [24]. Encore une fois, nous avons obtenu cette dualité *analytiquement*.

Il nous reste à démontrer les théorèmes de dualité. La difficulté est que, même pour un $\mathscr{D}$-module $\mathscr{M}$, l'espace vectoriel

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}}\,(X\,;\,\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)$$

est une *hypercohomologie*, c'est-à-dire une cohomologie d'un objet d'une catégorie dérivée qui est essentiellement de nature *non locale*.

Pour localiser dans les catégories dérivées, on dispose de la « méthode de la descente cohomologique » et du théorème de Verdier [23] dont nous allons rappeler rapidement les principes. *Le lecteur au courant de ces techniques pourra omettre de lire ce paragraphe et s'y reporter si besoin est.*

5. Méthode de la descente cohomologique de Deligne.

5.1. *Espaces topologiques simpliciaux.*

Soit Δ_p l'ensemble ordonné $\{0, 1, \ldots, p\}$ et (Δ) la catégorie dont les objets sont les ensembles Δ_p ($p \in \mathsf{N}$), les flèches étant les applications croissantes au sens large. On rappelle qu'un espace topologique simplicial X est un foncteur contravariant de (Δ) dans la catégorie des espaces topologiques munis des applications continues.

Un faisceau $\mathscr{F}_.$ d'espaces vectoriels complexes sur $X_.$ est la donnée, pour tout $p \in N$ d'un faisceau sur X_p, et pour toute application croissante f de Δ_p dans Δ_q d'un f-homomorphisme C-linéaire de $\mathscr{F}_p$ dans $\mathscr{F}_q$. Un morphisme de faisceaux u: $\mathscr{F}_. \to \mathscr{G}_.$ est la donneé pour tout p d'un homomorphisme $\mathscr{F}_p \to \mathscr{G}_p$ tel que les conditions de compatibilité usuelles soient vérifiées. La catégorie des faisceaux d'espaces vectoriels sur $X_.$ est une catégorie abélienne.

Soit a: $X_. \to Y_.$ un morphisme d'espaces topologiques simpliciaux, c'est-à-dire un morphisme de foncteurs. Si $\mathscr{F}_.$ (respectivement $\mathscr{G}_.$) est un faisceau d'espaces vectoriels complexes sur $X_.$ (respectivement sur $Y_.$), alors $a_p^*(\mathscr{G}_p)$ (respectivement $a_{p*}(\mathscr{F}_p)$) est un faisceau sur $X_.$ (respectivement sur $Y_.$). Le foncteur $a_.^*$ est adjoint à droite du foncteur $a_{.*}$. Le cas qui nous intéresse ici est le cas où $Y_.$ est un espace simplicial constant. La donnée d'un faisceau sur $Y_.$ est équivalente à la donnée d'un faisceau cosimplicial sur Y, c'est-à-dire à un foncteur covariant de (Δ) dans la catégorie des faisceaux d'espaces vectoriels sur $Y_.$.

Un faisceau $\mathscr{F}_.$ sur un espace constant $Y_.$ définit un complexe de faisceaux sur Y par

$$\mathscr{F}_p \xrightarrow{d} \mathscr{F}_{p+1} \qquad \text{où} \qquad d = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \delta_i ,$$

où δ_i provient de l'injection Δ_p dans Δ_{p+1} telle que $i \notin \delta(\Delta_p)$. Un complexe de faisceaux $\mathscr{F}_.^{\cdot}$ sur $Y_.$ définit un complexe double $(\mathscr{F}_p^q)$ sur Y. On note $\mathscr{S}\mathscr{F}^{\cdot}$ le complexe simple associé

$$(\mathscr{S}\mathscr{F})^m = \bigoplus_{p+q=m} \mathscr{F}_p^q$$

tel que

$$d(x_p^q) = d_F(x_p^q) + (-1)^p \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \delta_i(x_p^q) .$$

Un espace simplicial augmenté vers Y est un espace simplicial $X_.$ muni d'un morphisme $a_.$ vers $Y_.$. On le note a: $X_. \to Y_.$; un faisceau $\mathscr{F}$ sur Y définit un faisceau sur $Y_.$ et un faisceau sur $X_.$, soit $a^*\mathscr{F}$. Un faisceau $\mathscr{F}_.$ sur $X_.$ définit un faisceau sur $Y_.$, soit $a_{.*}\mathscr{F}_.$ et un complexe de faisceau sur Y, soit $\mathscr{S}(a_{.*}\mathscr{F}_.)$, que l'on note $a_*\mathscr{F}_.$.

Pour tout faisceau d'espaces vectoriels sur Y, on dispose d'une augmentation

$$\mathscr{F} \to a_* a^* \mathscr{F} .$$

Cette formule se dérive en un morphisme du foncteur identique I dans Ra_*a^* dans la catégorie des complexes bornés inférieurement sur Y, soit $D^+(Y)$.

DÉFINITION 5.1.1. On dit que a est de descente cohomologique si le morphisme de foncteurs de I dans Ra_*a^* est un isomorphisme.

Si $a: X_. \to Y$ est de descente cohomologique, pour tout complexe $\mathscr{F}$ de $D^+(Y)$, on a

$$\boldsymbol{R}\Gamma(Y, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{R}\Gamma(Y, Ra_*a^*\mathscr{F}) .$$

Mais, pour tout complexe borné inférieurement $\mathscr{G}$ sur $X_.$, on a l'isomorphisme

$$\boldsymbol{R}\Gamma(Y; Ra_*\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X_.; \mathscr{G}) .$$

Pour calculer $R\Gamma(X_.; \mathscr{G})$, on prend une résolution de $\mathscr{G}$ acyclique pour le foncteur $\Gamma(X_.; \cdot)$ et c'est le complexe simple associé au complexe double évident.

5.2. *Hyperrecouvrements.*

Soit X un espace analytique complexe.

DÉFINITION 5.2.1 [23]. On appelle hyperrecouvrement de X par des ouverts de Stein un espace topologique simplicial $X_.$ augmenté vers X tel que:

1°) *chaque composante X_p $(p \geqq 0)$ soit réunion disjointe d'ouverts de Stein de X;*

2°) *chaque flèche $X_p \to X$ est la somme des flèches d'inclusions naturelles;*

3°) *la composante X_0 couvre X.*

EXEMPLE 5.2.2. Soit $\mathscr{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$ un recouvrement classique de X par des ouverts de Stein. Prenons

$X_p = \bigcup_{\sigma \in \hom(\Delta_p, I)} \bigcap_{i=0}^{p} U_{\sigma(i)}$. On obtient l'hyperrecouvrement évident de Čech.

THÉORÈME 5.2.3 ([1]; [23]). *Un hyperrecouvrement de X par des ouverts de Stein est de descente cohomologique.*

5.3. *Le théorème de Verdier* [23].

Nous allons adapter la construction de Verdier aux $\mathscr{D}$-modules. Revenons à notre situation, où X est une variété analytique complexe lisse, et soit $a: X_. \to X$ un hyperrecouvrement de Stein de X. On appellera $\mathscr{D}_{X_.}$-module sur $X_.$ la donnée d'un $\mathscr{D}_{X_p}$-modules $\mathscr{M}_p$ sur X_p pour tout p et pour toute application f de Δ_p dans Δ_q, d'un f-homomorphisme d'espaces annelés par les faisceaux d'anneaux $\mathscr{D}_{X_.}$ de $\mathscr{M}_p$ dans $\mathscr{M}_q$. En fait, pour les hyperrecouvrements que nous utilisons, les applications entre composants sont automatiquement des morphismes d'espaces annelés par $\mathscr{D}$. Les notions de complexe de $\mathscr{D}_{X_\cdot}$-modules et de $\mathscr{D}_{X_\cdot}$-modules cohérents sont claires. Soit r un entier positif. Un morphisme de $\mathscr{D}_{X_\cdot}$-modules $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$ est appelé isomorphisme de niveau r si, pour tout $p \leqq r$, l'homomorphisme $\mathscr{M}_p \to \mathscr{N}_p$ est un isomorphisme. Un morphisme de complexe $\mathscr{M} \to \mathscr{N}$ de $\mathscr{D}_{X_\cdot}$-modules est un quasi-isomorphisme de niveau r s'il induit un isomorphisme de niveau r en cohomologie.

THÉORÈME 5.3.1. (Verdier [23]). *Soit un complexe* $\mathscr{M}$ *de* $D(\mathscr{D})_c$ *et* r *un entier*:

1°) *Il existe un hyperrecouvrement* $a: X_\cdot \to X$ *par des ouverts de Stein de* X, *un complexe* $\mathscr{N}$ *de* $\mathscr{D}_{X_\cdot}$*-modules à composantes libres et un quasi-isomorphisme de niveau* $r_\cdot$

$$\mathscr{N} \to a^*\mathscr{M}\,.$$

2°) *Soit* $X_{\cdot i}$; $\mathscr{N}_i \to a_i^*\mathscr{M}$ $(i=1,2)$ *deux solutions du problème* 1°); *alors il existe un hyperrecouvrement de Stein* $X_{\cdot 3}$, *deux morphismes* $a_{\cdot i}$: $X_{\cdot 3} \to X_{\cdot i}$ $(i=1;2)$ *et un diagramme commutatif à homotopie près*

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{N}_3 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a_{\cdot 1}^*\mathscr{N}_1 \arrow[dr] & & a_{\cdot 2}^*\mathscr{N}_2 \arrow[dl] \\ & a_3^*\mathscr{M} & \end{tikzcd}$$

où les morphismes sont des quasi-isomorphismes de niveau r *et où* $\mathscr{N}_3$ *est à composantes libres.*

La démonstration de ce théorème, faite par Verdier pour les $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, s'adapte aux $\mathscr{D}$-modules cohérents puisqu'elle n'utilise que la *cohérence* et non la commutativité de $\mathscr{O}_X$. Ici l'espace X est lisse. Tout $\mathscr{D}$-module cohérent admet par la Proposition 2.6 une résolution libre de type fini, et on peut choisir les composantes libres et non pas seulement cohérentes.

Terminons les rappels par le lemme de comparaison des topologies de Ramis-Ruget [16], qui est très important pour l'unicité.

LEMME 5.4 [16]. *Soit un morphisme continu*: $E^\cdot \to F^\cdot$ *de complexes bornés d'espaces vectoriels topologiques de type* F.S. (*respectivement du type* D.F.S., *qui est un quasi-isomorphisme algébrique*; *alors c'est un quasi-isomorphisme topologique.*

6. Demonstration des théorèmes de dualité.

6.1. *Localement.*

Soit $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D})_c$; alors, par la Proposition 2.6, il admet localement une résolution libre:

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{D}^{t_0} \leftarrow \mathcal{D}^{t_1} \leftarrow \dots \leftarrow \mathcal{D}^{t_n} \leftarrow 0$$

d'où un représentant local de $\boldsymbol{R}\,hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$

(1) $$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{t_0} \rightarrow \mathcal{O}_X^{t_1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_X^{t_m} \rightarrow 0 .$$

Les flèches de ces complexes sont des opérateurs différentiels; en particulier, elles sont continues.

D'autre part, on a $\mathrm{DR}\,(\mathcal{M}) = \boldsymbol{R}\,hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) = \Omega_X \otimes^L_{\mathcal{D}} \mathcal{M}[-n]$, d'où un représentant local de $\mathrm{DR}\,(\mathcal{M})$

(2) $$[-n]\ 0 \leftarrow \Omega_X^{t_0} \leftarrow \Omega_X^{t_1} \leftarrow \dots \leftarrow \Omega_X^{t_m} \leftarrow 0 .$$

Si on prend un ouvert U de Stein au-dessus duquel la résolution de $\mathcal{M}$ est libre, alors, en vertu du théorème B de Cartan, les espaces $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}}\,(U; \mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ sont calculés par la cohomologie du complexe d'espaces vectoriels de type F.S.:

(3) $$0 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}^{t_0}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}^{t_1}) \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}^{t_m}) \rightarrow 0 .$$

En vertu de la dualité de Serre élémentaire, les espaces $\mathrm{Ext}^{2n-i}_{\mathcal{D},c}\,(U; \mathcal{O}_X, \mathcal{M})$ sont calculés par l'homologie du complexe d'espaces vectoriels de type D.F.S.:

(4) $$0 \leftarrow H^n_c(U; \Omega^{t_0}) \leftarrow \dots \leftarrow H^n_c(U; \Omega^{t_m}) \leftarrow 0 .$$

La présence de $(2n-i)$ explique la disparition du décalage $[-n]$.

Les complexes (3) et (4) sont en dualité. D'où le Théorème 3.1 en vertu du Lemme de Serre (Lemme 2 de [16]).

Si $\mathcal{M}$ appartient à $D(\mathcal{D})_h$ par U suffisamment petit, les espaces $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}}\,(U; \mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ sont de dimension finie ainsi donc que $\mathrm{Ext}^{2n-i}_{\mathcal{D},c}\,(U; \mathcal{O}_X, \mathcal{M})$ par dualité [7]. Donc leurs duaux algébriques et topologiques coïncident, d'où le Théorème 3.2 sur U.

Si $\mathcal{M}^\infty \in D(\mathcal{D}^\infty)_c$, il admet localement sur un ouvert de Stein U des résolutions libres finies, d'où les Théorèmes 3.1 bis et 3.2 bis pour les mêmes arguments.

6.2. *Passage du local au global.*

Soit $\mathcal{M}$ un complexe de $D(\mathcal{D})_c$ et $[s, t]$ son amplitude. L'amplitude de $\boldsymbol{R}\,hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est égale à $[s, t+n]$ car la dimension homologique de $\mathcal{D}$ est n. L'amplitude $R\Gamma(X, \boldsymbol{R}\,hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))$ est égale à $[s, t+3n]$. Posons $r = 3n + t + 1 - s$. En vertu du théorème 5.3, il existe un hyperrecouvrement a: $X_{\cdot} \rightarrow X$

de X par des ouverts de Stein et un complexe $\mathcal{N}$ de $\mathcal{D}_{X_\cdot}$-modules à composantes libres et un quasi-isomorphisme de niveau r.

$$\mathcal{N} \to a^* \mathcal{M} .$$

Considérons le complexe

$$a^* \boldsymbol{R} \, hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) .$$

En vertu du Théorème 5.2.3, on a:

$$\begin{aligned} R\Gamma(X, \boldsymbol{R} \, hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) &= R\Gamma(X, \boldsymbol{R} a_* a^* \boldsymbol{R} \, hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) \\ &\xrightarrow{\sim} R\Gamma(X_\cdot, a^* \boldsymbol{R} \, hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) . \end{aligned}$$

Par localisation, on a

$$a^* \boldsymbol{R} \, hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = \boldsymbol{R} \, hom_{\mathcal{D}_{X_\cdot}}(a^* \mathcal{M} ; \mathcal{O}_{X_\cdot})$$

d'où, par le quasi-isomorphisme précédent, un morphisme qui induit un isomorphisme sur la cohomologie jusqu'en degrés $t+3n$.

$$R\Gamma(X, \boldsymbol{R} \, hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) \to R\Gamma(X_\cdot, \boldsymbol{R} \, hom_{\mathcal{D}_{X_\cdot}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{X_\cdot})) .$$

Mais $\mathcal{N}$ étant libre, on a

$$\boldsymbol{R} \, hom_{\mathcal{D}_{X_\cdot}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{X_\cdot}) = hom_{\mathcal{D}_{X_\cdot}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{X_\cdot}) .$$

Le complexe $hom_{\mathcal{D}_{X_\cdot}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{X_\cdot})$ étant un complexe de $\mathcal{O}_{X_\cdot}$-modules libres de type fini, on a

$$\boldsymbol{R}\Gamma(X_\cdot, hom_{\mathcal{D}_{X_\cdot}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{X_\cdot})) = \Gamma(X_\cdot, hom_{\mathcal{D}_{X_\cdot}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{X_\cdot})) .$$

Le complexe double $\Gamma(X_\cdot, hom_{\mathcal{D}_{X_\cdot}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_{X_\cdot}))$ admet sur ses composantes des structures d'espaces de Frechet–Schwartz. Le complexe simple associé, tronqué cohomologiquement en degré $t+3n$, réalise les espaces $E^i(\mathcal{M})$. D'où la structure d'espace topologique de type Q.F.S. sur les espaces $E^i(\mathcal{M})$.

Si on a deux solutions $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$, on dispose d'un diagramme par le Théorème 5.3

$$\begin{array}{ccc} & s\Gamma(X_{\cdot 1}; hom_{\mathcal{D}_{X_{\cdot 1}}}(\mathcal{N}_1, \mathcal{O}_{X_{\cdot 1}})) & \\ \nearrow & & \searrow \\ \boldsymbol{R}\Gamma(X; R \, hom(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)): & & s\Gamma(X_{\cdot 3}; hom_{\mathcal{D}_{X_{\cdot 3}}}(\mathcal{N}_3, \mathcal{O}_{X_{\cdot 3}})) \\ \searrow & & \nearrow \\ & s\Gamma(X_{\cdot 2}; hom_{\mathcal{D}_{X_{\cdot 2}}}(\mathcal{N}_2, \mathcal{O}_{X_{\cdot 2}})) & \end{array}$$

L'unicité des topologies sur les espaces $E^i(\mathcal{M})$ résulte alors du lemme de comparaison des topologies (Lemme 5.4).

Par dualité, on obtient à la Ramis–Ruget un complexe double de la cohomologie que nous noterons

$$H_c^n(X_., \Omega_{X_.} \otimes_{\mathscr{D}_{X_.}} \mathscr{N})$$

et dont nous allons interpréter l'homologie du complexe simple associé.

Prenons une résolution $\mathscr{D}$-injective de $\mathscr{M}$, soit I. On a

$$\mathrm{DR}\,(\mathscr{M}) = \boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{O}_X, \mathscr{M}) = hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{O}_X, I)\,.$$

Les composants du complexe $hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{O}_X, I)$ sont flasques, donc c-molles et

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}\Gamma_c(\mathrm{DR}\,(\mathscr{M})) &= \Gamma_c(X; hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{O}_X, I)) \\ &= \Gamma_c(X_.; a^* hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{O}_X, I))\,. \end{aligned}$$

D'autre part, le morphisme $\mathscr{N} \to a^*\mathscr{M} = a^*I$ nous donne un morphisme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}\Gamma_c(X_.; \Omega_{X_.} \otimes_{\mathscr{D}_{X_.}} \mathscr{N}[-n]) &= \Gamma_c(X_.; \Omega_{X_.} \otimes_{\mathscr{D}_{X_.}} \mathscr{N}[-n]) \\ &\to \Gamma_c(X_.; a^* hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{O}_X, I))\,. \end{aligned}$$

Le morphisme induit un isomorphisme en cohomologie jusqu'en degré $t + 3n$. D'où les topologies de type Q.D.F.S. sur les espaces $E_i^c(\mathscr{M})$, dont l'unicité résulte du Lemme 5.4 et le théorème de dualité en résulte grâce au Lemme de Serre.

6.3. *Cas des systèmes holonomes.*

Considérons un complexe $\mathscr{M}$ de $D(\mathscr{D})_h$. On choisit un hyperrecouvrement de Stein de $X, a\colon X_. \to X$ tel que chaque composante X_p soit réunion d'ouverts de Stein $X_p = \bigcup_{j \in I} X_{pj}$, de sorte que les espaces $\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{D}}\,(X_{p_j}; \mathscr{M}, \mathscr{O}_X)$ soient de dimension *finie*. Ceci est possible grâce à la constructibilité [7]. Nous avons réalisé les espaces $E_i^c(\mathscr{M})$ comme homologie d'un complexe de chaînes d'espaces vectoriels de type D.F.S., complexe simple associé au complexe double:

$$H_c^n(X_p; \Omega^{\cdot}_{X_p}) = H_c^n(X_p; \Omega_{X_.} \otimes_{\mathscr{D}_{X_.}} \mathscr{N})\,.$$

Notons $F_p^q = \bigcup_{j \in I} H_c^n(X_{p_j}; \Omega^q_{X_{p_j}})$ ces espaces de type D.F.S. et $E_p^q = \prod_{j \in I} \Gamma(X_{p_j}; \mathscr{O}^q_{X_j})$ les duaux topologiques. Considérons le complexe double:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \leftarrow & F_p^q & \leftarrow & F_p^{q+1} & \leftarrow \dots \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ \dots \leftarrow & F_{p+1}^q & \leftarrow & F_{p+1}^{q+1} & \leftarrow \dots\,. \end{array}$$

L'homologie des lignes horizontales est formée par des espaces *limites inductives* d'espaces vectoriels *de dimension finie*, qu'on peut choisir dénombrables.

Le dual *topologique* de ce double complexe est égal à:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow & E_p^q & \rightarrow & E_p^{q+1} & \rightarrow & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots \rightarrow & E_{p+1}^q & \rightarrow & E_{p+1}^{q+1} & \rightarrow & \cdots . \end{array}$$

On dispose d'un morphisme de ce complexe dans le dual *algébrique*:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow & (F_p^q)^* & \rightarrow & (F_p^{q+1})^* & \rightarrow & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots \rightarrow & (F_{p+1}^q)^* & \rightarrow & (F_{p+1}^{q+1})^* & \rightarrow & \cdots . \end{array}$$

Ce morphisme induit un isomorphisme en hypercohomologie puisqu'une application linéaire sur un espace vectoriel limite inductive (dénombrable) d'espaces vectoriels de dimension finie est automatiquement *continue.* D'où le Théorème 3.2. En fait, l'hypercohomologie du double complexe algébrique calcule les espaces de cohomologie de

$$\boldsymbol{R}\Gamma(X, \boldsymbol{R}\,hom_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{DR}\,(\mathscr{M}), \mathbf{C}_X))$$

et l'on démontre analytiquement la formule

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}\Gamma(X, \boldsymbol{R}\,hom_{\mathbf{C}_X}(\mathrm{DR}\,(\mathscr{M}), \mathbf{C}_X)) &= \boldsymbol{R}\,\mathrm{hom}_{\mathbf{C}}\,(\boldsymbol{R}\Gamma_c(\mathrm{DR}\,(\mathscr{M})[2n], \mathbf{C})) \\ &= \boldsymbol{R}\Gamma(X, \boldsymbol{R}\,hom_{\mathscr{D}}(\mathscr{M}, \mathscr{O}_X)) \,. \end{aligned}$$

C'est le case particulier de la dualité de Verdier appliqué à $\mathscr{F} = \mathrm{DR}\,(\mathscr{M})$ si $\mathscr{M} \in D(\mathscr{D})_h$.

Il est clair que le Théorème 3.2 bis pour les systèmes de $D(\mathscr{D}^\infty)_h$ se démontre de la même façon.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Deligne, *Théorie de Hodge* III, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 44 (1975), 1–77.
2. A. Grothendieck, *Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents*, Seminaire Bourbaki, Vol. 9, Exposés 137–151 (Paris 1956–1957), exp. 149, Secretariat Mathématique, Paris, 1959.
3. A. Grothendieck, *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 29 (1969), 95–103.
4. R. Hartshorne, *On the De Rham cohomology of algebraic varieties*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 45 (1975), 6–99.
5. R. Hartshorne, *Residues and duality* (Lecture Notes in Mathematics 20), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1966.
6. M. Herrera and D. Liebermann, *Duality and the De Rham cohomology of infinitesimal neighbourhoods*, Invent. Math. 13 (1971), 97–126.
7. M. Kashiwara, *On the maximally overdetermined systems of linear differential equations* I, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 10 (1975), 563–579.

8. M. Kashiwara, *B-functions and holonomic systems*, Invent. Math. 38 (1976), 33–53.
9. D. Liebermann, *Generalization of the De Rham complex with applications to duality theory and the cohomology of singular varieties*, in *Complex analysis*, 1972. (Proc. Conf., Rice Univ., Houston, Tex., 1972.) Rice Univ. Studies 59 (1973) No. 2, 57–70.
10. B. Malgrange, *Systemes differentiels à coefficients constants*, Séminaire Bourbaki, Vol. 15, Exposés 241–246 (Paris 1962–63), exp. 246, Sécretariat Mathématique, Paris, 1964.
11. Z. Mebkhout, *La valeur principale et le résidu simple des formes à singularités essentielles*, in *Fonctions de plusieurs variables complexes* II, ed. F. Norguet (Lecture Notes in Mathematics 482) pp. 190–215. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1975.
12. Z. Mebkhout, *La cohomologie locale d'une hypersurface*, in *Fonctions de plusieurs variables complexes* III, ed. F. Norguet (Lecture Notes in Mathematics 670) pp. 89–114, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1977.
13. Z. Mebkhout, *Local cohomology of analytic spaces*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 12 (1977), 247–256 supp.
14. Z. Mebkhout, *Théorèmes de bidualité locale pour les $\mathscr{D}_X$-modules holonomes*, Ark. Mat. 20 (1981), à paraitre.
15. Z. Mebkhout, *Théorèmes de dualité pour les $\mathscr{D}_X$ modules cohérents*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B 285 (1977), 785–787.
16. J. P. Ramis and G. Ruget, *Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 38 (1971), 77–91.
17. J. P. Ramis, G. Ruget, and J. L. Verdier, *Dualité relative en géométrie analytique complexe*, Invent. Math. 13 (1971), 261–283.
18. J. P. Ramis and G. Ruget, *Dualité et résidu*, Invent. Math. 26 (1974), 89–131.
19. M. Sato, T. Kawai, and M. Kashiwara, *Micro functions and pseudo-differential equations*, in *Hyperfunctions and pseudo-differential equations*, ed. H. Komatsu (Lecture Notes in Mathematics 287), pp. 265–529. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1973.
20. J. P. Serre, *Un théorème de dualité*, Comment. Math. Helv. 29 (1955), 9–26.
21. K. Suominen, *Duality for coherent sheaves in analytic manifolds*. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. 424 (1968).
22. J. L. Verdier, *Dualité dans les espaces localement compacts*, Séminaire Bourbaki, Vol. 18, Exposés 295–312, (1965–66), exp. 300, W. A. Benjamin, Inc., New York - Amsterdam, 1966.
23. J. L. Verdier, *Topologies sur les espaces de cohomologie d'un complexe de faisceaux analytiques à cohomologie cohérente*, Bull. Soc. Math. France 99, (1971), 337–342.
24. J. L. Verdier, *Classe d'homologie associée à un cycle*, in Séminaire de Géometrie Analytique de l'Ecole Supérieure Paris 1975. — Astérisque 36–37 (1976), 101–151.

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE D'ORLEANS
45046 ORLEANS CEDEX
FRANCE