MATH. SCAND. 50 (1982), 248–250

REPRODUCTIBILITÉ DE l_1 DANS LES PRODUITS TENSORIELS

C. SAMUEL

Introduction.

La norme ε sur le produit tensoriel $E \otimes F$ de deux espaces de Banach E et F est définie par:

$$\|u\|_\varepsilon = \sup\{|(f \otimes g)(u)|;\ f \in E',\ \|f\| \leqq 1 \text{ et } g \in F',\ \|g\| \leqq 1\}$$

la norme π est définie par:

$$\|u\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\,\|y_i\|;\ u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right\}.$$

Nous notons $E \hat{\hat{\otimes}} F$ le complété de $E \otimes F$ pour la norme ε et $E \hat{\otimes} F$ le complété de $E \otimes F$ pour la norme π.

Soit F un espace de Banach; nous avons établi dans [6] que, pour $1 < p < \infty$, $l_p \hat{\hat{\otimes}} F$ ou $c_0 \hat{\hat{\otimes}} F$ contient un sous-espace isomorphe à l_1 si et seulement si F contient un sous-espace isomorphe à l_1. Le but de cette note est de montrer que si un espace de Banach E est tel que E' possède la propriété de Radon–Nikodym, cf. [1], et si un espace de Banach F n'a aucun sous-espace isomorphe à l_1 alors $E \hat{\hat{\otimes}} F$ n'a aucun sous-espace isomorphe à l_1. Pour la norme π la situation est différente car il est bien connu que $l_2 \hat{\otimes} l_2$ possède un sous-espace isomorphe à l_1.

Reproductibilité de l_1.

Soient E, F deux espaces de Banach, $J(E,F)$ note l'espace des formes bilinéaires intégrales sur $E \times F$; rappelons que $J(E,F)$ est isométriquement isomorphe à $(E \hat{\hat{\otimes}} F)'$, cf. [3]. Nous donnons tout d'abord une preuve du lemme suivant de D. R. Lewis cf. [4].

LEMME. *Soient E et F deux espaces de Banach; une suite $(u_n)_n$ de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ est $\sigma(E \hat{\hat{\otimes}} F,\ J(E,F))$-Cauchy si et seulement si pour tout $x' \in E'$ et pour tout $y' \in F'$ la suite de scalaires $((x' \otimes y')(u_n))_n$ est convergente.*

Reçu le 2. janvier, 1981.

La condition est evidemment nécessaire car pour chaque $x' \in E'$, et pour chaque $y' \in F'$, $x' \otimes y' \in J(E,F)$.

Inversement, supposons que pour chaque $x' \in E'$ et pour chaque $y' \in F'$ la suite de scalaires $((x' \otimes y')(u_n))_n$ soit convergente; d'après le théorème d'équicontinuité il est clair que $\sup_n \|u_n\|_\varepsilon < +\infty$. Notons $B_{E'}$ (respectivement $B_{F'}$) la boule unité fermée de E' (respectivement F') munie de la topologie $\sigma(E', E)$ (respectivement $\sigma(F', F)$). Soit $\varphi \in J(E,F)$, il existe une mesure positive régulière finie μ sur $B_{E'} \times B_{F'}$ (cf. [3]) telle que pour tout $(x,y) \in E \times F$ on ait:

$$\varphi(x,y) = \int_{B_{E'} \times B_{F'}} x'(x) y'(y) \, d\mu(x', y') .$$

Nous avons donc, pour chaque entier n,

$$\varphi(u_n) = \int_{B_{E'} \times B_{F'}} (x' \otimes y')(u_n) \, d\mu(x', y') .$$

Le résultat est alors une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée.

THEOREME. *Soit E un espace de Banach dont le dual a la propriété de Radon–Nikodym et soit F un espace de Banach qui ne contient aucun sous-espace isomorphe à l_1, alors $E \hat{\hat{\otimes}} F$ ne contient aucun sous-espace isomorphe à l_1.*

D'après le profond résultat de H. P. Rosenthal, cf. [2] et [5], il suffit de prouver que de toute suite bornée de $E \hat{\hat{\otimes}} F$ on peut extraire une suite qui est $\sigma(E \hat{\hat{\otimes}} F, J(E,F))$-Cauchy.

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de $E \hat{\hat{\otimes}} F$, fixons une suite $(v_n)_n$ de $E \otimes F$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - v_n\|_\varepsilon = 0 ;$$

visiblement la suite $(v_n)_n$ est bornée. Il existe un sous-espace séparable G de E tel que pour tout entier n, $v_n \in G \otimes F$. Nous savons que la norme ε sur $G \otimes F$ coïncide avec la norme induite par la norme ε de $E \otimes F$. Puisque E' a la propriété de Radon–Nikodym, G' est séparable (cf. [7]). Notons $(g_n)_n$ une suite dense dans G' pour la topologie de la norme. F n'ayant aucun sous-espace isomorphe à l_1, en employant le procédé diagonal, nous pouvons trouver une suite extraite $(v_{n_k})_k$ de $(v_n)_n$ telle que pour chaque entier m et pour chaque $h \in F'$ la suite $((g_m \otimes h)(v_{n_k}))_k$ soit convergente.

Soient $g \in G'$, $h \in F'$ et un réel $\delta > 0$, fixons un entier N tel que $\|g - g_N\| \leqq \delta$; soient k et l deux entiers quelconques, nous avons:

$$\begin{aligned}|(g\otimes h)(v_{n_k}-v_{n_l})| &\leqq |((g-g_N)\otimes h)(v_{n_k}-v_{n_l})|+|(g_N\otimes h)(v_{n_k}-v_{n_l})|\\ &\leqq 2\delta\|h\|\sup_i \|v_{n_i}\|_\varepsilon+|(g_N\otimes h)(v_{n_k}-v_{n_l})|\end{aligned}$$

ce qui montre que $((g\otimes h)(v_{n_k}))_k$ est convergente.

D'après le lemme la suite $(v_{n_k})_k$ est $\sigma(G\hat{\hat{\otimes}}F, J(G,F))$-Cauchy donc la suite $(u_{n_k})_k$ est $\sigma(E\hat{\hat{\otimes}}F, J(E,F))$-Cauchy.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Diestel, *Geometry of Banach spaces — Selected topics* (Lecture Notes in Mathematics 485), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1975.
2. L. E. Dor, *On sequences spanning a complex l_1 space*, Proc. Amer. Math. Soc. 47 (1975), 515–516.
3. A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955), 1–140.
4. D. R. Lewis, *Conditional weak compactness in certain inductive tensor products*, Math. Ann. 201 (1973), 201–209.
5. H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing l_1*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974), 2411–2413.
6. C. Samuel, *Sur la reproductibilité des espaces l_p*, Math. Scand. 45 (1979), 103–117.
7. C. Stegall, *The Radon–Nikodym property in conjugate Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 206 (1975), 213–223.

FACULTÉ DES SCIENCES DE LUMINY
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE-INFORMATIQUE
70, ROUTE LÉON LACHAMP
13288 - MARSEILLE CEDEX 9
FRANCE