MATH. SCAND. 50 (1982), 251-268

ACTION MOYENNABLE D'UN GROUPE LOCALEMENT COMPACT SUR UNE ALGÈBRE DE VON NEUMANN II

C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE

Abstract.

This is the continuation of our previous work on amenable actions of a locally compact group G on a von Neumann algebra M. We study stability properties of this notion of amenable action by extension and restriction. We also prove that an action of G on M is amenable if and only if the corresponding action of G on the centre $Z(M)$ is amenable. Then we give applications to the study of injectivity of crossed products.

Introduction.

Dans [19], R. J. Zimmer a introduit une notion de moyennabilité pour une action ergodique d'un groupe localement compact G sur un espace mesuré standard. Cette notion joue en théorie ergodique un rôle analogue à la notion de moyennabilité en théorie des groupes. En outre cette notion apparaît naturellement dans l'étude de l'algèbre de von Neumann associée à cette action par la construction de Murray et von Neumann. Pour les actions libres, cette algèbre est approximativement de dimension finie (i.e. injective [6]) si et seulement si l'action est moyennable ([20], [21] et [9]). Dans [1], en nous inspirant des travaux de R. J. Zimmer, nous avons défini une notion d'action moyennable d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann M (voir 1.4 ci-dessous pour la définition). Lorsque M est commutative, notre définition est plus forte que celle de R. J. Zimmer, et elle lui est équivalente lorsque G est discret ou agit librement sur M. Dans le cas discret cela a été prouvé par R. J. Zimmer dans [20], et par ailleurs, si α est une action d'un groupe localement compact G sur une algèbre de von Neumann M, nous avons montré que le produit croise $M \times_{\alpha} G$ est injectif si et seulement si l'action est moyennable au sens de notre définition, lorsque G est discret ou agit librement sur le centre de M ([1] et [2]).

Reçu le 29. janvier, 1981.

Dans cet article nous poursuivons l'étude des actions moyennables de G sur M entreprise dans [1]. Rappelons que toute action d'un groupe moyennable est moyennable et que tout groupe G localement compact possède des actions moyennables, par exemple l'action par translation sur $L^\infty(G)$. Supposons qu'un groupe G agisse par α sur une algèbre de von Neumann N en laissant une sous-algèbre de von Neumann M globalement invariante. Si G est moyennable et s'il existe une projection de norme 1 de N sur M, on voit assez facilement qu'il existe une projection de norme 1 de N sur M qui commute avec α. Nous montrons (proposition 2.5) que cette propriété reste vraie lorsque c'est seulement l'action sur M qui est supposé moyennable. Lorsque G agit ainsi sur un couple (N, M) de telle sorte qu'il existe une projection de norme 1 de N sur M qui commute avec l'action, nous dirons que la paire (N, M) est moyennable pour l'action. C'est l'analogue dans notre situation de la notion de paire moyennable étudiée par R. J. Zimmer dans [22]. Cette notion de paire moyennable est liée à l'existence d'une projection de norme 1 du produit croisé $N \underset{\alpha}{\times} G$ sur le produit croisé $M \underset{\alpha}{\times} G$ ([22] et [1]). Dans le reste du paragraphe 2 nous montrons des propriétés de stabilité de la notion d'action moyennable par restriction et extension analogues à celles qui sont bien connues en théorie des groupes moyennables.

Dans le paragraphe 3, nous considérons la situation où G agit par α sur M_1 en laissant stable une sous-algèbre N_1 et par β sur M_2 en laissant stable N_2. Nous supposons que la paire $(M_1 \otimes N_2, N_1 \otimes N_2)$ est moyennable pour l'action $\alpha \otimes \beta$. Alors dans le cas où le centre $Z(N_2)$ de N_2 est contenu dans le centre de M_2, nous montrons que la paire $(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes M_2)$ est elle aussi moyennable pour l'action $\alpha \otimes \beta$ (voir 3.4). Ce résultat est faux lorsqu'on ne suppose pas $Z(N_2) \subset Z(M_2)$. Comme application de ce résultat nous montrons que l'action d'un groupe G sur une algèbre de von Neumann M est moyennable si et seulement si l'action de G sur le centre $Z(M)$ l'est. Ainsi l'étude des actions moyennables sur M se ramène, lorsque G est discret ou agit librement sur $Z(M)$ à l'étude des actions moyennables sur $Z(M)$ au sens de Zimmer.

Au paragraphe 4, les résultats des paragraphes 2 et 3 sont utilisés dans l'étude des produits croisés. En particulier, si G agit par α sur une algèbre de von Neumann injective M, avec G discret ou action libre sur $Z(M)$ nous obtenons que $M \underset{\alpha}{\times} G$ est injective si et seulement si $Z(M) \underset{\alpha}{\times} G$ l'est. En outre si $M \underset{\alpha}{\times} G$ est injective alors $M \underset{\alpha}{\times} H$ est injective pour tout sous-groupe fermé H de G. Ce résultat peut être faux lorsque G n'est pas discret et n'agit pas librement sur $Z(M)$. La fin du paragraphe est indépendante du reste du travail. Nous considérons une extension M d'une algèbre de von Neumann N par un groupe localement compact G ou au sens défini par C. Sutherland dans [16]. Soit H un sous-groupe fermé de G tel que l'extension correspondante de N par H soit une algèbre de von Neumann injective et tel que l'espace homogenè $H \backslash G$ soit moyennable (au sens défini par P. Eymard dans [8]). Nous montrons alors que l'extension M est injective (théorème 4.7). Nous améliorons ainsi des résultats de [16].

Dans tout ce travail, pour éviter des complications inutiles, nous supposons que les groupes sont à base dénombrable d'ouverts et que les algèbres de von Neumann sont à prédual séparable, bien que cela ne soit pas toujours nécessaire.

1. Préliminaires et notations.

1.1. Dans tout cet article, G désigne un groupe localement compact. Si M est une algèbre de von Neumann, nous noterons $Z(M)$ son centre.

On appelle *action continue* de G sur une algèbre de von Neumann M un homomorphisme $\alpha: G \to \operatorname{Aut}(M)$ tel que pour tout $x \in M$ l'application $g \mapsto \alpha_g(x)$ de G dans M soit ultrafaiblement continue. D'après ([12, proposition 3.10]) ceci revient à dire que pour tout élément φ du prédual M_* de M, l'application $g \mapsto \varphi \circ \alpha_g$ de G dans M_* est normiquement continue.

Soit N une sous-algèbre de von Neumann de M. On appelle *action continue de G sur la paire* (M, N) une action continue α de G sur M telle que $\alpha_g(N) = N$ pour tout $g \in G$. En général nous désignerons encore par α l'action de G sur N obtenue par restriction.

Si α est une action continue de G sur M, le produit croisé de M et G relativement à α (voir [17, définition 3.3) sera noté $M \underset{\alpha}{\times} G$.

1.2. Soit α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann M. Pour toute mesure bornée μ sur G, nous noterons $\alpha(\mu)$ l'application linéaire bornée de M dans M définie par

$$\langle \alpha(\mu)(x), \varphi \rangle = \int_G \langle \alpha_g(x), \varphi \rangle \, d\mu(g) \qquad (x \in M, \ \varphi \in M_*) .$$

On a $\|\alpha(\mu)\| \leqq \|\mu\|$. De plus $\alpha(\mu)$ est une application linéaire continue de M dans M muni de la topologie ultrafaible (voir [3, proposition 1.4]). Rappelons enfin que si $(f_i)_{i \in I}$ est une unité approchée de $L^1(G)$, pour tout $x \in M$ la famille $(\alpha(f_i)(x))_{i \in I}$ tend ultrafaiblement vers x.

Nous noterons M^c l'ensemble des $x \in M$ tels que la fonction $g \mapsto \alpha_g(x)$ soit normiquement continue. C'est une sous-C*-algèbre de M, invariante par l'action de G. Pour tout $f \in L^1(G)$ et tout $x \in M$, on a $\alpha(f)(x) \in M^c$. En particulier, M^c est ultrafaiblement dense dans M (voir [14, 7.5.1]).

1.3. Rappelons qu'une algèbre de von Neumann M est dite injective (ou possède la propriété d'extension) si pour toute C*-algèbre A contenant M et ayant même unité que M, il existe une projection de norme 1 de A sur M. ([18, § 7] et [7, § 5]). Si M opère dans un espace hilbertien $\mathfrak{H}$, alors M est injective si et seulement si il existe une projection de norme 1 de l'algèbre $\mathscr{L}(\mathfrak{H})$ des opérateurs bornés dans $\mathfrak{H}$ sur M ([18, théorème 7.2]).

Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant. Soient A une C*-algèbre avec unité, B une sous-C*-algèbre de A contenant l'unité de A et P une projection de norme 1 de A sur B. Alors P est une application positive de A sur B telle que $P(b_1xb_2)=b_1P(x)b_2$ pour tout $x \in A$ et tous $b_1, b_2 \in B$ ([18, théorème 3.1]).

1.4. Soit α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann M. Pour tout $g \in G$, nous noterons τ_g l'automorphisme de $L^\infty(G)$ défini par

$$(\tau_g f)(h) = f(g^{-1}h) \qquad (f \in L^\infty(G),\ h \in G)$$

et nous noterons $\bar{\alpha}_g$ l'automorphisme $\tau_g \otimes \alpha_g$ de $L^\infty(G) \otimes M$. Alors $\bar{\alpha}\colon g \mapsto \bar{\alpha}_g$ est une action continue de G sur $L^\infty(G) \otimes M$. Nous identifierons souvent M à la sous-algèbre $1 \otimes M$ de $L^\infty(G) \otimes M$. C'est une sous-algèbre invariante par $\bar{\alpha}$ et ls restriction de $\bar{\alpha}$ à M n'est autre que α.

On dit que *l'action α de G sur M est moyennable* s'il existe une projection P de norme 1 de $L^\infty(G) \otimes M$ sur M telle que $P \circ \bar{\alpha}_g = \alpha_g \circ P$ pour tout $g \in G$ (voir [1, définition 3.4]).

Remarquons que l'action τ de G sur $L^\infty(G)$ est moyennable. Cela a été démontré par R. J. Zimmer dans ([19, théorème 1.9]), compte tenu du fait que notre définition de la moyennabilité coïncide avec celle de Zimmer puisque l'action τ est libre. (voir [9, théorème 8.10] et [2, proposition 3]). L'existence d'une projection P de norme 1 de $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$ sur $L^\infty(G)$ telle que $P \circ (\tau_g \otimes \tau_g) = \tau_g \circ P$ pour tout $g \in G$ se voit aussi de la façon suivante. D' après ([1, lemme 2.1]) il existe une projection Q de norme 1 de $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$ sur $L^\infty(G)$ telle que $Q \circ (1 \otimes \tau_g) = \tau_g \circ Q$ pour tout $g \in G$. Notons ψ l'application de $L^\infty(G \times G)$ sur $L^\infty(G \times G)$ définie par

$$(\psi f)(g,h) = \psi(hg,g) \qquad (f \in L^\infty(G \times G),\ h, g \in G)\,.$$

En identifiant $L^\infty(G \times G)$ à $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$, on vérifie facilement que $\psi \circ (\tau_g \otimes \tau_g) = (1 \otimes \tau_g) \circ \psi$ pour tout $g \in G$. Alors $P = Q \circ \psi$ est une projection de norme 1 de $L^\infty(G) \otimes L^\infty(G)$ sur $L^\infty(G)$ qui convient.

2. Propriétés des actions et des paires moyennables.

2.1. Lemme. *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M et α une action continue de G sur la paire (M, N). Les conditions suivantes sont équivalentes*:

i) *il esiste une projection de norme* 1 *de* M^c *sur* N^c *qui commute avec* α;
ii) *il existe une projection de norme* 1 *de* M *sur* N *qui commute avec* α;
iii) *il existe une projection* P *de norme* 1 *de* M *sur* N *telle que l'on ait* $P\circ\alpha(\mu) = \alpha(\mu)\circ P$ *pour toute mesure bornée* μ *sur* G.

DÉMONSTRATION. iii) $\Rightarrow$ ii) est évident car, si δ_g désigne la masse de Dirac au point $g \in G$, on a $\alpha_g = \alpha(\delta_g)$.

ii) $\Rightarrow$ i) résulte du fait que si P est une projection de norme 1 de M sur N qui commute avec α, alors $P(M^c) = N^c$.

Montrons que i) $\Rightarrow$ iii). Soit Q une projection de norme 1 de M^c sur N^c qui commute avec α. Pour tout $x \in M^c$, la fonction $g \mapsto \alpha_g(x)$ est normiquement continue et bornée de G dans l'espace de Banach M^c. Elle est donc μ-intégrable pour toute mesure μ bornée sur G (voir [4, chapitre IV, § 4, n° 7]). On a donc

$$\begin{aligned} Q\circ\alpha(\mu)(x) &= Q\left(\int_G \alpha_g(x)\,d\mu(g)\right) \\ &= \int_G Q\circ\alpha_g(x)\,d\mu(g) \\ &= \int_G \alpha_g[Q(x)]\,d\mu(g) \\ &= \alpha(\mu)\circ Q(x) \end{aligned}$$

pour tout $x \in M^c$.

Si $f \in L^1(G)$, nous noterons Q_f l'application linéaire normiquement continue de M dans N^c définie par

$$Q_f(x) = Q(\alpha(f)(x)) \qquad (x \in M)\,.$$

On a $\|Q_f\| \leqq \|f\|_1$.

Considérons une unité approchée $(f_i)_{i\in I}$ dans $L^1(G)$ avec $\|f_i\|_1 \leqq 1$ pour tout i. Alors $(Q_{f_i})_{i\in I}$ est une famille d'éléments dans la boule unité de l'espace $\mathscr{L}(M,N)$ des applications linéaires normiquement continues de M dans N. L'espace normé $\mathscr{L}(M,N)$ est le dual du produit tensoriel projectif $M\otimes_\gamma N_*$. En particulier la boule unité de $\mathscr{L}(M,N)$ munie de la topologie de la convergence simple ultrafaible est compacte. Nous pouvons donc supposer que la famille $(Q_{f_i})_{i\in I}$ converge pour cette topologie vers un élément P dans la boule unité de $\mathscr{L}(M,N)$.

Montrons que P est une projection de M sur N. Soient $x \in N$ et $\varphi \in N_*$. On a

$$\langle Q[\alpha(f_i)(x)],\varphi\rangle = \langle\alpha(f_i)(x),\varphi\rangle \text{ car } \alpha(f_i)(x) \in N^c\,,$$

d'où

$$\langle P(x), \varphi \rangle = \lim_i \langle \alpha(f_i)(x), \varphi \rangle = \langle x, \varphi \rangle ,$$

d'où $P(x) = x$.

Pour terminer, il reste à montrer que pour toute mesure bornée μ sur G, on a $P \circ \alpha(\mu) = \alpha(\mu) \circ P$. Soient $x \in M$, $\varphi \in N_*$ et $i \in I$. On a

$$\begin{aligned} \langle Q[\alpha(f_i)\alpha(\mu)(x)], \varphi \rangle &= \lim_j \langle Q[\alpha(f_i*\mu*f_j)(x)], \varphi \rangle \\ (\text{car } f_i*\mu*f_j \to f_i*\mu \text{ dans } L^1(G)) &= \lim_j \langle \alpha(f_i*\mu) Q[\alpha(f_j)(x)], \varphi \rangle \\ (\text{car } \alpha(f_j)(x) \in M^c) &= \lim_j \langle Q[\alpha(f_j)(x)], {}^t\alpha(f_i*\mu)\varphi \rangle \\ &= \langle P(x), {}^t\alpha(f_i*\mu)\varphi \rangle . \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\langle Q[\alpha(f_i)\alpha(\mu)(x)], \varphi \rangle = \langle \alpha(f_i)\alpha(\mu)P(x), \varphi \rangle$ pour tout $i \in I$. En passant à la limite sur i, on obtient

$$\langle P[\alpha(\mu)(x)], \varphi \rangle = \langle \alpha(\mu)P(x), \varphi \rangle \qquad (x \in M,\ \varphi \in N_*)$$

d'où $P \circ \alpha(\mu) = \alpha(\mu) \circ P$.

2.2. Définition. Conservons les notations du lemme 2.1. Si les conditions équivalentes du lemme 2.1 sont réalisées, nous dirons que la *paire* (M, N) *est moyennable par l'action de* G.

2.3. Remarques. a) Si l'action α de G sur la paire (M, N) est moyennable, il existe une projection de norme 1 du produit croisé $M \underset{\alpha}{\times} G$ sur le produit croisé $N \underset{\alpha}{\times} G$ (voir [1, proposition 2.2]). La réciproque n'est pas vraie. Considérons par exemple un groupe G localement compact, connexe, non moyennable, $N = \mathbf{C}$, $M = L^\infty(G)$, et prenons pour α l'action sur M par translation à gauche. Alors $N \underset{\alpha}{\times} G$ est l'algèbre de von Neumann $\mathscr{L}(G)$ engendrée par la représentation régulière gauche de G. C'est une algèbre de von Neumann injective (voir [6, corollaire 6.7]) et donc il existe une projection de norme 1 de $M \underset{\alpha}{\times} G$ sur $N \underset{\alpha}{\times} G$. Pourtant la paire $(L^\infty(G), \mathbf{C})$ n'est pas moyennable pour l'action α de G.

Remarquons toutefois que lorsque G est discret, ou lorsque G agit librement sur le centre de N supposé contenu dans le centre de M, alors l'existence d'une projection de norme 1 de $M \underset{\alpha}{\times} G$ sur $N \underset{\alpha}{\times} G$ entraîne que la paire (M, N) est moyennable pour l'action de G (voir [1, proposition 2.2] et [2, proposition 1]).

b) Soient (X, μ) et (Y, ν) deux G-espaces ergodiques standards et soit p: $X \to Y$ une application borélienne G-invariante telle que l'image par p de la mesure de probabilité μ soit ν. R. J. Zimmer a défini et étudié dans ce cadre une notion de paire (X, Y) moyennable. Sa définition est exprimée en terme de propriété de section invariante conditionnelle (voir [22, définition 2.5]). L'application p de X dans Y définit un plongement de $L^\infty(Y,\mu)$ dans $L^\infty(X,\mu)$. Lorsque G est un groupe discret, R. J. Zimmer montre que sa définition de paire (X, Y) moyennable est équivalente à l'existence d'une projection de norme 1 de $L^\infty(X,\mu)$ sur $L^\infty(Y,\nu)$ qui commute avec l'action de G ([22, théorème 4.7]).

c) Soit α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann M. Dire que cette action est moyennable signifie que la paire $(L^\infty(G)\otimes M, M)$ est moyennable pour l'action $\bar{\alpha}$ de G.

2.4. Soit α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann M. On appelle extension de (M,G,α) tout triplet (N,G,β) où

i) N est une algèbre de von Neumann contenant M comme sous-algèbre de von Neumann de telle sorte qu'il existe une projection de norme 1 de N sur M;

ii) β est une action continue de G sur N telle que $\beta_g(x)=\alpha_g(x)$ pour tout $x \in M$ et tout $g \in G$.

La proposition suivante améliore la proposition 2 de [2].

2.5. PROPOSITION. *Soit α une action continue de G sur un algèbre de von Neumann M. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *l'action α de G sur M est moyennable.*

ii) *pour toute extension (N,G,β) de (M,G,α), la paire (N,M) est moyennable pour l'action β de G.*

DÉMONSTRATION. ii) $\Rightarrow$ i) est évident compte-tenu de la remarque 2.3c) car $(L^\infty(G)\otimes M, G, \bar{\alpha})$ est une extension de (M,G,α).

i) $\Rightarrow$ ii). Supposons que l'action α est moyennable. Soit E une projection de norme 1 de N sur M. Prenons $x \in N^c$. Pour tout $\varphi \in M_*$, la fonxction $g \mapsto \langle \alpha_g \circ E \circ \beta_g^{-1}(x), \varphi \rangle$ est continue bornée sur G, donc $g \mapsto \alpha_g \circ E \circ \beta_g^{-1}(x)$ est un élément de $L^\infty(G)\otimes M$. Notons Φ l'application de N^c dans $L^\infty(G)\otimes M$ ainsi définie. On a $\Phi(x)=x$ pour tout $x \in M^c$ et $\Phi\circ\beta_g=\bar{\alpha}_g\circ\Phi$ pour tout $g \in G$.

Soit Q une projection de norme 1 de $L^\infty(G)\otimes M$ sur M telle que $Q\circ\bar{\alpha}_g=\alpha_g\circ Q$ pour tout $g \in G$. Alors $P=Q\circ\Phi$ est une application linéaire de norme 1 de N^c dans M telle que $P(x)=x$ pour tout $x \in M^c$ et $P\circ\beta_g=\alpha_g\circ P$ pour tout $g \in G$. On a évidemment $P(N^c)=M^c$. Ainsi P est une projection de norme 1 de N^c sur M^c qui commute avec l'action de G.

2.6. PROPOSITION. *Soit α une action de G sur une algèbre de von Neumann M et* *soit H un sous-groupe fermé de G. Si l'action de G sur M est moyennable, l'action de H sur M obtenue par restriction l'est aussi.*

DEMONSTRATION. Soient μ une mesure de Haar à droite sur G, ν une mesure de Haar à droite sur H, et Δ_G, Δ_H les fonction modules sur G et H, respectivement. Soit ϱ une fonction continue >0 sur G telle que

$$\varrho(h^{-1}x) = \frac{\Delta_H(h)}{\Delta_G(h)}\varrho(x) \quad \text{pour tout } h \in H \text{ et tout } x \in G .$$

Il existe sur l'espace $H \setminus G$ des classes à droite modulo H une mesure γ et une seule telle que l'on ait

$$\int_G f(x)\varrho(x)\,d\mu(x) = \int_{H\setminus G} d\gamma(\dot{x}) \int_H f(hx)\,d\nu(h) \tag{1}$$

pour toute fonction continue f à support compact dans G. En outre γ est quasi-G-invariante (voir [5, chapitre VII, § 2)].

Comme G est supposé à base dénombrable d'ouverts la surjection $x \mapsto \dot{x}$ de G sur $H \setminus G$ possède des sections boréliennes. Soit s une telle section. La formule (1) montre que l'application de $(H\setminus G)\times H$ sur G qui à $(\dot{x}, h)$ associe $hs(x)$ est un isomorphisme de l'espace mesuré produit $(H\setminus G)\times H, \gamma\otimes\nu)$ sur l'espace mesuré (G, ϱ, μ). Comme la mesure $\varrho.\mu$ est équivalente à μ, on en déduit un isomorphisme de $L^\infty(H\setminus G,\gamma)\otimes L^\infty(H,\nu)$ sur $L^\infty(G,\mu)$. Nous identifierons ces deux algèbres de von Neumann grâce à cet isomorphisme. Remarquons que dans cette identification, pour tout $h \in H$, l'automorphisme τ_h^G de translation à gauche par h^{-1} dans $L^\infty(G)$ devient

$$1_{L^\infty(H\setminus G,\gamma)} \otimes \tau_h^H ,$$

où τ_h^H est l'automorphisme de translation á gauche par h^{-1} dans $L^\infty(H)$.

Puisque l'action α de G sur M est moyennable, il existe une projection P de norme 1 de $L^\infty(G)\otimes M$ sur M telle que $P\circ(\tau_g^G\otimes\alpha_g)=\alpha_g\circ P$ tout $g \in G$. La restriction de P à $1\otimes L^\infty(H)\otimes M$ donne alors une projection Q de norme 1 de $L^\infty(H)\otimes M$ sur M telle que $Q\circ(\tau_h^H\otimes\alpha_h)=\alpha_h\circ Q$ pour tout $h \in H$.

2.7. DÉFINITION. Soient G un groupe localement compact, H un sous-groupe fermé de G et γ une mesure quasi-G-invariante sur l'espace homogène $H\setminus G$ des classes à droite modulo H. On dit que *l'espace homogène $H\setminus G$ est moyennable* s'il existe un état G-invariant sur la $\mathbf{C}^*$-algèbre $L^\infty(H\setminus G,\gamma)$ où G agit de façon évidente. P. Eymard a montré que cette propriété est équivalente à la propriété du poinr fixe suivante pour le couple (G, H): pour tout compact convexe K dans un espace vectoriel localement convexe séparé, si G opère affinement et séparement continument dans K de sorte qu'il existe dans K un point fixe par H, alors il existe un point fixe par G (voir [8, théorème p. 28]).

2.8. PROPOSITION. *Soient α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann M. Soit H un sous-groupe fermé de G. On suppose que l'espace homogène $H\setminus G$ est moyennable et que l'action de H sur M obtenue par restriction est moyennable. Alors l'action α de G sur M est moyennable.*

DÉMONSTRATION. Notons B la C*-algèbre formée par les éléments x de $L^\infty(G)\otimes M$ tels que la fonction $g\mapsto\bar{\alpha}_g(x)$ soit normiquement continue. Désignons par K l'ensemble des applications linéaires continues P de norme 1 de B dans M telles que $P(x)=x$ pour tout $x\in M^c\subset B$. C'est un ensemble convexe compact dans la boule unité de $\mathscr{L}(B,M)$ muni de la topologie faible de dual de $B\otimes_\gamma M_*$. Le groupe G agit affinement sur K par

$$\sigma_g(P) = \alpha_g^{-1}\circ P\circ\bar{\alpha}_g \qquad (g\in G,\ P\in K)\,.$$

Cette action est séparement continue. En effet, pour tout $x\in M$ et tout $P\in K$ la fonction $g\mapsto P\circ\bar{\alpha}_g(x)$ est normiquement continue et bornée, et pour tout $\varphi\in M_*$ la fonction $g\mapsto\varphi\circ\alpha_g$ est normiquement continue de G dans M_*; par conséquent $g\mapsto\langle\sigma_g(P)(x),\varphi\rangle$ est continue.

Montrons qu'il existe dans K un élément invariant par l'action σ restreinte à H. Nous identifierons $L^\infty(G)$ à $L^\infty(H\setminus G,\gamma)\otimes L^\infty(H)$ comme dans la démonstration de la propositoon 2.6. Puisque l'action de H sur M est moyennable, il existe une projection de norme 1 de $L^\infty(H)\otimes M$ sur M qui commute avec l'action $h\mapsto\tau_h^H\otimes\alpha_h$ de H sur $L^\infty(H)\otimes M$. Alors, daprès ([1, lemme 2.1]) il existe une projection Q de norme 1 de $L^\infty(H\setminus G,\gamma)\otimes L^\infty(H)\otimes M$ sur M telle que

$$Q\circ(1_{L^\infty(H\setminus G,\gamma)}\otimes\tau_h^H\otimes\alpha_h) = \alpha_h\circ Q \qquad (h\in H)\,.$$

Mais

$$1_{L^\infty(H\setminus G,\gamma)}\otimes\tau_h^H = \tau_h^G \qquad \text{pour tout } h\in H$$

lorsque $L^\infty(H\setminus G,\gamma)\otimes L^\infty(H)$ est identifié à $L^\infty(G)$. On voit donc que Q est une projection de norme 1 de $L^\infty(G)\otimes M$ sur M telle que $Q\circ\bar{\alpha}_h=\alpha_h$ pour tout $h\in H$. La restriction de Q à B donne un élément de K invariant par H. En utilisant la propriété du point fixe du couple (G,H), on voit qu'il existe dans K un élément P invariant par l'action σ de G. Il est clair que l'on a $P(B)=M^c$. Ceci prouve que la paire $(L^\infty(G)\otimes M, M)$ est moyennable pour l'action $\bar{\alpha}$ de G.

3. Produits tensoriels et paires moyennables.

3.1. LEMME. *Soient M une algèbre de von Neumann, N une sous-algèbre de von Neumann de M et α une action continue de G sur la paire (M, N). Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de projecteurs deux à deux orthogonaux de somme 1, G-invariants, appartenant au centre de N. Pour $k \in \mathbf{N}$, posons $M_k = M_{e_k}$ et $N_k = N_{e_k}$. La paire (M, N) est moyennable pour l'action α si et seulement si les paires (M_k, N_k) sont moyennables pour l'action de G restreinte á (M_k, N_k).*

DÉMONSTRATION. Si la paire (M, N) est moyennable, il est clair que par restriction les paires (M_k, N_k) sont moyennables pour l'action de G. Réciproquement supposons que les paires (M_k, N_k) sont moyennables. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, soit P_k une projection de norme 1 de $\sum_{i=0}^{k} M_i$ sur $\sum_{i=0}^{k} N_i$ qui commute avec l'action de G. Notons Q_k l'application de M dans N définie par

$$Q_k(x) = P_k\left(x \sum_{i=0}^{k} e_i\right) \qquad (x \in M) .$$

Nous obtenons ainsi une suite $(Q_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de la boule unité de $\mathscr{L}(M, N)$. Cette boule munie de la topologie de la convergence simple ultrafaible est compacte. Soit Q un point d'accumulation de la suite $(Q_k)_{k\in\mathbf{N}}$ dans cette boule unité. Montrons que Q est une projection de M sur N. Soient $x \in N$ et $\varphi \in N_*$. Il existe une sous-suite $(Q_{k_n})_{n\in\mathbf{N}}$ de la suite $(Q_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que l'on ait

$$\langle Q(x), \varphi\rangle = \lim_n \langle Q_{k_n}(x), \varphi\rangle ,$$

d'où

$$\begin{aligned}\langle Q(x), \varphi\rangle &= \lim_n \left\langle P_{k_n}\left(x \sum_{i=0}^{k_n} e_i\right), \varphi \right\rangle \\ &= \lim_n \left\langle x \sum_{i=0}^{k_n} e_i, \varphi \right\rangle \\ &= \langle x, \varphi\rangle ,\end{aligned}$$

d'où $Q(x) = x$.

Enfin, on vérifie de même sans difficulté que Q commute avec l'action de G.

3.2. THÉORÈME. *Soient M_1 et M_2 deux algèbres de von Neumann, N_1 une sous-algèbre de M_1, et A une sous-algèbre du centre de M_2. Soient α et β des actions continues de G sur les paires (M_1, N_1) et (M_2, A) respectivement. On suppose que la paire $(M_1 \otimes A,\ N_1 \otimes A)$ est moyennable pour l'action $\alpha\otimes\beta$ de G. Alors la paire $(M_1 \otimes M_2,\ N_1 \otimes M_2)$ est moyennable pour l'action $\alpha\otimes\beta$.*

DÉMONSTRATION. Nous pouvons supposer que M_2 opère dans un espace hilbertien séparable $\mathfrak{H}$ de sorte qu'il existe une représentation unitaire continue $g \mapsto u_g$ de G dans $\mathfrak{H}$ telle que $\beta_g = \operatorname{Ad} u_g \mid M_2$ pour tout $g \in G$. Désintégrons $(M_2, \mathfrak{H})$ relativement à A. Il existe un espace borélien standard Γ, une mesure positive μ sur Γ, un champ μ-mesurable $\gamma \mapsto \mathfrak{H}(\gamma)$ d'espaces hilbertiens, un champ μ-mesurable $\gamma \mapsto M(\gamma)$ d'algèbres de von Neumann dans les $\mathfrak{H}(\gamma)$ tels que:

$$.\mathfrak{H} = \int_\Gamma^\oplus \mathfrak{H}(\gamma)\, d\mu(\gamma), \qquad M_2 = \int_\Gamma^\oplus M(\gamma)\, d\mu(\gamma);$$

$.A$ est l'algèbre des opérateurs diagonalisables.

Nous identifierons A à $L^\infty(\Gamma, \mu)$. Par restriction β définit une action continue de G sur $L^\infty(\Gamma, \mu)$. En enlevant si nécessaire un ensemble négigeable à Γ, nous pouvons supposer que G agit sur Γ de telle sorte que l'on ait

$$u_g f(\gamma) u_g^* = f(g^{-1}\gamma) \qquad (f \in L^\infty(\Gamma, \mu),\ g \in G,\ \gamma \in \Gamma)$$

(voir [13, théorème 1]).

Soit $g \in G$ et posons $d\mu(g\gamma) = r(g, \gamma)\, d\mu(\gamma)$. D'après ([11, proposition 1]), il existe pour presque tout $\gamma \in \Gamma$ une isométrie $u(g, \gamma)$ de $\mathfrak{H}(\gamma)$ sur $\mathfrak{H}(g\gamma)$ telle que l'on ait

$$(2) \qquad (u_g \xi)(\gamma) = r(g, g^{-1}\gamma)^{-\frac{1}{2}} u(g, g^{-1}\gamma) \xi(g^{-1}\gamma) \quad \mu\text{.p.p.}$$

pour tout $\xi \in \mathfrak{H}$.

Pour $n = 1, 2 \ldots, +\infty$ notons Γ_n l'ensemble mesurable formé des $\gamma \in \Gamma$ tels que $\dim \mathfrak{H}(\gamma) = n$. D'après ce qui précède, pour $g \in G$ l'ensemble $(g\Gamma_n) \Delta \Gamma_n$ est négligeable. Le projecteur e_n dans A correspondant à Γ_n est donc G-invariant. En utilisant le lemme 3.1 on voit qu'on peut supposer que la dimension hilbertienne des $\mathfrak{H}(\gamma)$ est constante.

Posons donc $\mathfrak{H} = L^2(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{K}$ où $\mathscr{K}$ est un espace hilbertien séparable. Pour $g \in G$, l'automorphisme $\operatorname{Ad} u_g$ laisse stable $L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes 1_{\mathscr{K}}$, donc laisse stable son commutant $L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{L}(\mathscr{K})$. Nous poserons $\tilde{\beta}_g = \operatorname{Ad} u_g \mid L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{L}(\mathscr{K})$. Pour tout

$$x = \int_\Gamma^\oplus x(\gamma)\, d\mu(\gamma)$$

appartenant à $L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{L}(\mathscr{K})$ et tout

$$\xi = \int_\Gamma^\oplus \xi(\gamma)\, d\mu(\gamma)$$

dans $\mathfrak{H}$ nous avons

$$(\tilde{\beta}_g(x)\xi)(\gamma) = (u_g x u_g^* \xi)(\gamma) = u(g, g^{-1}\gamma)x(g^{-1}\gamma)u(g, g^{-1}\gamma)^*\xi(\gamma)$$

μ.p.p. d'où

$$\tilde{\beta}_g(x) = \int_\Gamma^\oplus u(g, g^{-1}\gamma)x(g^{-1}\gamma)u(g, g^{-1}\gamma)^* \, d\mu(\gamma) .$$

Le champ $\gamma \mapsto u(g, \gamma)$ est un champ mesurable d'unitaires d'après la formule (2). Posons

$$V_g = \int_\Gamma^\oplus u(g, \gamma) \, d\mu(\gamma) .$$

C'est un élément unitaire de $L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{L}(\mathscr{K})$ et nous noterons ϱ_g l'automorphisme de $L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{L}(\mathscr{K})$ qu'il induit. Enfin nous désignerons par β'_g l'automorphisme de $L^\infty(\Gamma, \mu)$ défini par

$$(\beta'_g f)(\gamma) = f(g^{-1}\gamma) \qquad (f \in L^\infty(\Gamma, \mu),\ \gamma \in \Gamma)$$

et qui n'est autre que la restriction de β_g à $L^\infty(\Gamma, \mu)$ identifié à A. On vérifie immédiatement que $\tilde{\beta}_g = (\beta'_g \otimes 1_{\mathscr{L}(\mathscr{K})}) \circ \varrho_g$.

Par hypothèse, il existe une projection de norme 1 de $M_1 \otimes A$ sur $N_1 \otimes A$ qui permute avec l'action $\alpha \otimes \beta$. Autrement dit, il existe une projection E de norme 1 de $M_1 \otimes L^\infty(\Gamma, \mu)$ sur $N_1 \otimes L^\infty(\Gamma, \mu)$ telle que

$$E \circ (\alpha_g \otimes \beta'_g) = (\alpha_g \otimes \beta'_g) \circ E \qquad \text{pour tout } g \in G .$$

D'après ([1, lemme 2.1]) il existe une projection Q de norme 1 de $M_1 \otimes L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{L}(\mathscr{K})$ sur $N_1 \otimes L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{L}(\mathscr{K})$ telle que

$$Q \circ (\alpha_g \otimes \beta'_g \otimes 1_{\mathscr{L}(\mathscr{K})}) = (\alpha_g \otimes \beta'_g \otimes 1_{\mathscr{L}(\mathscr{K})}) \circ Q, \qquad \forall g \in G .$$

Montrons que l'on a $Q \circ (\alpha_g \otimes \tilde{\beta}_g) = (\alpha_g \otimes \tilde{\beta}_g) \circ Q$ pour tout $g \in G$. On a

$$\begin{aligned} Q \circ (\alpha_g \otimes \tilde{\beta}_g) &= Q \circ (\alpha_g \otimes \beta'_g \otimes 1_{\mathscr{L}(\mathscr{K})}) \circ (1_{M_1} \otimes \varrho_g) \\ &= (\alpha_g \otimes \beta'_g \otimes 1_{\mathscr{L}(\mathscr{K})}) \circ Q \circ (1_{M_1} \otimes \varrho_g) . \end{aligned}$$

Or $1_{M_1} \otimes \varrho_g = \mathrm{Ad}\, 1 \otimes v_g \mid M_1 \otimes L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{L}(K)$ avec

$$1 \otimes v_g \in 1 \otimes L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{L}(\mathscr{K}) \subset N_1 \otimes L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{L}(\mathscr{K}) ,$$

d'où $Q \circ (1_{M_1} \otimes \varrho_g) = (1_{M_1} \otimes \varrho_g) \circ Q$ puisque les projections de norme 1 sont des espérances conditionnelles. Il en résulte que $Q \circ (\alpha_g \otimes \tilde{\beta}_g) = (\alpha_g \otimes \tilde{\beta}_g) \circ Q$. L'algèbre M_2 opère dans l'espace hilbertien $L^2(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{K}$. C'est une sous-algèbre de von Neumann de $L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{L}(\mathscr{K})$ et on a $\tilde{\beta}_g \mid M_2 = \beta_g$. Notons P la restriction de Q à $M_1 \otimes M_2$. Montrons que l'image de P est $N_1 \otimes M_2$. Pour cela, il suffit de vérifier que si $x \in M_1 \otimes M_2$, alors $P(x)$ commute avec $1 \otimes M'_2$. Soit $y \in 1 \otimes M'_2$. On a

$$\begin{aligned} P(x)y &= P(xy) \text{car } y \in N_1 \otimes L^\infty(\Gamma, \mu) \otimes \mathscr{L}(\mathscr{H}) \\ &= P(yx) = yP(x) . \end{aligned}$$

Ainsi P est une projection de norme 1 de $M_1 \otimes M_2$ sur $N_1 \otimes M_2$ et il est clair que

$$P \circ (\alpha_g \otimes \beta_g) = (\alpha_g \otimes \beta_g) \circ P \quad \text{pour tout } g \in G .$$

3.3. COROLLAIRE. *Soient M_1, M_2 deux algèbres de von Neumann, et N_1 une sous-algèbre de von Neumann de M_1. Soient α une action continue de G sur la paire (M_1, N_1) et β une action continue de G sur M_2. Les conditions suivantes sont équivalentes*:

i) *la paire $(M_1 \otimes M_2,\ N_1 \otimes M_2)$ est moyennable pour l'action $\alpha \otimes \beta$;*

ii) *la paire $(M_1 \otimes Z(M_2),\ N_1 \otimes Z(M_2))$ est moyennable pour l'action $\alpha \otimes \beta$.*

DÉMONSTRATION. i) $\Rightarrow$ ii) Si P est une projection de norme 1 de $M_1 \otimes M_2$ sur $N_1 \otimes M_2$ alors la restriction de P à $M_1 \otimes Z(M_2)$ donne une projection de norme 1 de $M_1 \otimes Z(M_2)$ sur $N_1 \otimes Z(M_2)$. Cette projection commute avec $\alpha \otimes \beta$ si c'est le cas pour P.

ii) $\Rightarrow$ i) résulte immédiatement du théorème 3.2.

3.4. COROLLAIRE. *Soient M_1, M_2 deux algèbres de von Neumann, N_1, N_2 deux sous-algèbres de von Neumann de M_1, M_2, respectivement. On suppose que $Z(N_2) \subset Z(M_2)$. Soient α et β des actions continues de G sur les paires (M_1, N_1) et (M_2, N_2) respectivement. Alors si la paire $(M_1 \otimes N_2,\ N_1 \otimes N_2)$ est moyennable pour l'action $\alpha \otimes \beta$ il en est de même de la paire $(M_1 \otimes M_2,\ N_1 \otimes M_2)$.*

DÉMONSTRATION. D'après le corollaire 3.3 la paire $(M_1 \otimes Z(N_2),\ N_1 \otimes Z(N_2))$ est moyennable. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème 3.2 avec $A = Z(N_2)$.

3.5. REMARQUE. Le théorème 3.2 n'est pas vrai si on ne suppose pas que A est une sous-algèbre du centre de M_2. Prenons par exemple un groupe G discret dénombrable non moyennable. Soient $M_1 = l^\infty(G)$, $N_1 = \mathbf{C}$, $M_2 = \mathscr{L}(l^2(G))$ et $A = l^\infty(G)$. Pour tout $g \in G$, nous notons u_g l'opérateur de translation par g^{-1} dans $l^2(G)$. Nous notons β_g l'automorphisme $\operatorname{Ad} u_g$ agissant sur M_2 et α_g sa restriction à $l^\infty(G)$. D'après 1.4, la paire $(M_1 \otimes A,\ N_1 \otimes A)$ est moyennable pour $\alpha \otimes \beta$. Par contre la paire $(M_1 \otimes M_2,\ N_1 \otimes M_2)$ ne l'est pas. En effet, sinon la paire (M_1, N_1) serait moyennable d'après le corollaire 3.3 puisque M_2 est un facteur. Il existerait une moyenne invariante sur $l^\infty(G)$ ce qui est impossible puisque G n'est pas moyennable.

3.6. COROLLAIRE. *Soit α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann M. On suppose qu'il existe une sous-algèbre de von Neumann A du centre de M stable par G et telle que l'action de G sur A soit moyennable. Alors l'action de G sur M est moyennable.*

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, la paire $(L^\infty(G) \otimes A, 1 \otimes A)$ est moyennable par l'action $\bar{\alpha}$ de G. Alors, d'après le théorème 3.2 la paire $(L^\infty(G) \otimes M, 1 \otimes M)$ est moyennable pour l'action $\bar{\alpha}$

3.7. COROLLAIRE. *Soit α une action de G sur une algèbre de von Neumann M. Pour que cette action soit moyennable il faut et il suffit que l'action de G sur le centre de M obtenue par restriction soit moyennable.*

DÉMONSTRATION. En effet la paire $(L^\infty(G) \otimes M, 1 \otimes M)$ est moyennable pour l'action $\bar{\alpha}$ si et seulement si la paire $(L^\infty(G) \otimes Z(M), 1 \otimes Z(M))$ l'est d'après le corollaire 3.3.

3.8. COROLLAIRE. *Soit α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann M et soit N une sous-algèbre de M stable par G et telle que $Z(N) \subset Z(M)$. Si l'action de G sur N est moyennable, il en est de même de l'action de G sur M.*

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement des corollaires 3.6 et 3.7.

3.9. REMARQUE. Ce résultat est l'analogue, dans notre situation du théorème 2.4 de [19]. Il n'est pas vrai lorsqu'on ne suppose pas que $Z(N)$ est contenue dans le centre de M, comme le montre le contre-exemple donné en 3.5.

4. Applications à l'étude des produits croisés.

4.0. Soit α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann M injective. Si l'action α est moyennable, alors $M \underset{\alpha}{\times} G$ est une algèbre de von Neumann injective ([1, proposition 3.12]). La réciproque n'est pas toujours vraie. Toutefois nous avons montré que si G est discret ou agit librement sur le centre $Z(M)$ de M, alors $M \underset{\alpha}{\times} G$ est injective si et seulement si l'action α est moyennable ([1, proposition 4.1] et [2, proposition 3]). Compte-tenu de ces propriétés, nous obtenons immédiatement les énoncés suivants comme conséquences des résultats des paragraphes précédents.

4.1. PROPOSITION. *Soit α une action continue de G sur l'algèbre de von Neumann injective M et soit N une sous-algèbre de M, stable par G et telle que*

$Z(N) \subset Z(M)$. On suppose que G est discret ou agit librement sur $Z(N)$. Si $N \underset{\alpha}{\times} G$ est injective, il en est de même de $M \underset{\alpha}{\times} G$.

DÉMONSTRATION. Utiliser 4.0 et le corollaire 3.8.

4.2. REMARQUE. Si on ne suppose pas que $Z(N)$ est contenu dans $Z(M)$ on peut avoir $N \underset{\alpha}{\times} G$ injective sans que $M \underset{\alpha}{\times} G$ le soit. Prenons par exemple pour G un groupe discret non moyennable, $M = \mathscr{L}(l^2(G))$ et $N = l^\infty(G)$. Pour $g \in G$, prenons $\alpha_g = \mathrm{Ad}\, u_g$ où u_g est l'unitaire de $l^2(G)$ défini par la translation à gauche par g^{-1}. Alors $l^\infty(G) \underset{\alpha}{\times} G$ est injectif (isomorphe à $\mathscr{L}(l^2(G))$) mais $\mathscr{L}(l^2(G)) \underset{\alpha}{\times} G$ n'est pas injectif car l'action α de G sur $\mathscr{L}(l^2(G))$ n'est pas moyennable. En effet l'action d'un groupe sur un facteur n'est moyennable que si le groupe est moyennable.

4.3. PROPOSITION. *Soit α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann injective M. On suppose que G est discret ou agit librement sur $Z(M)$. Alors $M \underset{\alpha}{\times} G$ est injective si et seulement si $Z(M) \underset{\alpha}{\times} G$ l'est.*

4.4. PROPOSITION. *Soit α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann injective M. On suppose que G est discret ou agit librement sur $Z(M)$. Soit H un sous-groupe fermé de G. Si $M \underset{\alpha}{\times} G$ est injective, il en est de même de $M \underset{\alpha}{\times} H$.*

DÉMONSTRATION. Utiliser 4.0 et la proposition 2.6.

4.5. REMARQUES. a) Si G est une groupe non discret n'agissant pas librement sur $Z(M)$ on peut avoir $M \underset{\alpha}{\times} G$ injectif et $M \underset{\alpha}{\times} H$ non injectif. Prenons par exemple pour G le groupe SL $(2, \mathbf{R})$. On sait que SL $(2, \mathbf{R})$ contient le groupe libre à deux générateurs comme sous-groupe discret. Prenons pour H un tel sous-groupe, et $M = \mathbf{C}$. Alors $M \underset{\alpha}{\times} G$ est l'algèbre de von Neumann $\mathscr{L}(G)$ engendrée par la représentation régulière gauche de G. Cette algèbre est injective puisque G est connexe. Par contre, $M \underset{\alpha}{\times} H = \mathscr{L}(H)$ n'est pas injective car H est un groupe discret non moyennable.

b) Conservons les notations de la proposition 4.4. En utilisant la proposition 2.8, on peut voir que, dans certains cas, si $M \underset{\alpha}{\times} H$ est injectif et si l'espace homogène $H \backslash G$ est moyennable, alors $M \underset{\alpha}{\times} G$ est injectif. En fait ce résultat est toujours vrai et se prouve directement, comme nous allons le voir maintenant.

4.6. DÉFINITION. ([16, définition 3.1.2]). Soient N une algèbre de von Neumann et G un groupe localement compact. On appellera *extension de N par G* tout triplet (M, I, Π) où

1) M est une algèbre de von Neumann et I un isomorphisme de N dans M,

2) Π est une application continue de G dans le groupe unitaire de M telle que:

$$\Pi(g)I(N)\Pi(g)^* = I(N), \qquad \forall\, g \in G$$

$$\Pi(g)\Pi(h) \in I(N)\Pi(gh), \qquad \forall\, g, h \in G$$

$$M = \{I(N) \cup \Pi(G)\}''.$$

4.7. Théorème. *Soit (M, I, Π) une extension de N par G et soit H un sous-groupe fermé de G. On suppose que l'algèbre de von Neumann M_H engendrée par $I(N)$ et $\Pi(H)$ est injective et que l'espace homogène $H \setminus G$ est moyennable. Alors M est injective.*

Démonstration. Supposons que M soit réalisée dans un espace hilbertien $\mathfrak{H}$. Alors M'_H est injective ([18, théorème 7.2]). Pour montrer que M est injective, il suffit de prouver qu'il existe une projection de norme 1 de M'_H sur M'.

Soient $x \in I(N)'$ et $g \in G$ et posons $\sigma_g(x) = \Pi(g)x\Pi(g)^*$. On a $\sigma_g(x) \in I(N)'$. En effet, si $z \in I(N)$, on a $z\Pi(g) = \Pi(g)z_1$ avec $z_1 \in I(N)$, d'où

$$z\Pi(g)x\Pi(g)^* = \Pi(g)z_1x\Pi(g)^*. = \Pi(g)xz_1\Pi(g)^* = \Pi(g)x\Pi(g)^*z.$$

Soient $g, g' \in G$. On a $\Pi(g)\Pi(g') = \Pi(gg')z$ où z est un unitaire de $I(N)$, d'où pour tout $x \in I(N)'$

$$\begin{aligned}\sigma_g \circ \sigma_{g'}(x) &= \Pi(g)\Pi(g')x\Pi(g')^*\Pi(g)^* \\ &= \Pi(gg')zxz^*\Pi(gg')^* = \sigma_{gg'}(x).\end{aligned}$$

Ainsi $g \mapsto \sigma_g$ est un homomorphisme de G dans $\mathrm{Aut}(I(N)')$.

Posons dans la suite $R = I(N)'$. L'espace de Banach $\mathscr{L}(R)$ des applications linéaires normiquement continues de R dans R est le dual de $R \otimes_\gamma R_*$. La boule unité de $\mathscr{L}(R)$ muni de la topologie de la convergence simple ultrafaible est donc compacte. Notons F l'enveloppe convexe fermée de $\{\sigma_g,\ g \in G\}$ dans la boule unité de $\mathscr{L}(R)$ muni de cette topologie.

Commençons par montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in M'_H$, il existe $T \in F$ tel que $T(x_1), \ldots, T(x_n)$ appartienne à M'. Posons $E = R \oplus \ldots \oplus R$ où la somme directe est effectuée n fois. Cet espace est le dual de $E_* = R_* \oplus \ldots \oplus R_*$ et sera muni de la topologie faible correspondante. A partir de l'action σ de G dans R nous obtenons de façon naturelle une action de G dans E qui sera notée $\tilde{\sigma}$. Posons $x = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ et notons K l'enveloppe convexe faiblement fermée dans E de $\{\tilde{\sigma}_g(x),\ g \in G\}$. C'est un ensemble convexe faiblement compact sur lequel G agit affinement et continûment par $g \mapsto \tilde{\sigma}_g \mid K$. Let point x est fixe par l'action de H car $x_1, \ldots, x_n$ commutent avec les $\Pi(h)$ pour $h \in H$. En utilisant la propriété du point fixe du couple (G, H) on voit qu'il existe dans K un point $y = y_1 \oplus \ldots \oplus y_n$ invariant par l'action de G. Les points $y_1, \ldots, y_n$ sont dans $M' = \{x \in I(N)' \,;\, \Pi(g)x = x\Pi(g),\ g \in G\}$. Par ailleurs y est la limite faible d'une famille $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ où chaque y_λ est de la forme

$$y_\lambda = \sum_i C_{i,\lambda} \tilde{\sigma}_{g_{i,\lambda}}(x), \qquad \text{avec } C_{i,\lambda} > 0 \text{ et } \sum_i C_{i,\lambda} = 1 \,.$$

Posons $T_\lambda = \sum_i C_{i,\lambda}\, \sigma_{g_{i,\lambda}}$. Alors $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille d'éléments de l'espace compact F. Soit T un point d'accumulation de cette famille. Alors T est un élément de F tel que $T(x_i) = y_i \in M'$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Pour tout $x \in M'_H$, posons $F_x = \{T \in F,\ T(x) \in M'\}$. C'est une partie fermée de F, donc compacte. Ce qui précède montre que si $x_1, \ldots, x_n$ sont dans M'_H on a

$$F_{x_1} \cap \ldots \cap F_{x_n} \neq \emptyset \,.$$

On a donc

$$\bigcap_{x \in M'_H} F_x \neq \emptyset \,.$$

Soit T un élément de cette intersection. C'est une application linéaire continue de norme ≤ 1 de M'_H dans M'. Pour tout $x \in M'$ et tout $g \in G$ on a $\sigma_g(x) = x$, d'où $T(x) = x$. Ainsi T est une projection de norme 1 de M'_H dans M'.

4.8. Corollaire. *Soit α une action continue de G sur une algèbre de von Neumann M et soit H un sous-groupe fermé de G tel que l'espace homogène $H \setminus G$ soit moyennable. Si $M \underset{\alpha}{\times} H$ est injectif alors $M \underset{\alpha}{\times} G$ est injectif.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement du théorème 4.7 car les produits croises $M \underset{\alpha}{\times} G$ sont des cas particuliers d'extensions de M par G.

4.9. Corollaire. *Soient G un groupe localement compact et H un sous-groupe fermé de G tel que l'espace homogène $H \setminus G$ soit moyennable. Soit Π une représentation de G telle que l'algèbre de von Neumann $\Pi(H)''$ soit injective. Alors l'algèbre de von Neumann $\Pi(G)''$ est injective.*

Démonstration. C'est encore un cas particulier du théorème 4.7.

4.10. Remarque: Reprenant la terminologie utilisée par C. Sutherland dans ([16, théorème 6.3]) nous dirons qu'un groupe localement compact G est A.F.D. (approximately finite dimensional) si pour toute représentation Π de G l'algèbre de von Neumann $\Pi(G)''$ est injective. Le corollaire 4.9 montre que si un groupe localement compact G possède un sous-groupe H fermé A.F.D. tel que l'espace homogène $H \setminus G$ soit moyennable, alors G est A.F.D. Ceci améliore l'énoncé 6.3 de [16]. De même notre théorème 4.7 améliore les résultats de ([16, théorème 6.2]).

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Anantharaman-Delaroche, *Action moyennable d'un groupe localement compact sur une algèbre de von Neumann*, Math. Scand. 45 (1979), 289–304.
2. C. Anantharaman-Delaroche, *Sur la moyennabilité des actions libres d'un groupe localement compact dans une algèbre de von Neumann*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A 289 (1979), 605–607.
3. W. Arveson, *On groups of automorphism of operator algebras*, J. Funct. Anal. 15 (1974), 217–243.
4. N. Bourbaki, *Intégration* in *Éléments de Mathématique*, Livre 6, chap. I-II-III-IV (Act. Sci. Ind. 1175), Hermann, Paris, 1965.
5. N. Bourbaki, *Intégration* in *Éléments de Mathématique*, Livre 6, chap. VII–VIII (Act. Sci. Ind. 1306), Hermann, Paris, 1963.
6. A. Connes, *Classification of injective factors*, Ann. of Math. (2) 104 (1976), 73–115.
7. E. Effros and C. Lance, *Tensor products of operator algebras*, Adv. in Math. 25 (1977), 1–34.
8. P. Eymard, *Moyennes invariantes et représentations unitaires* (Lecture Notes in Mathematics 300), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1972.
9. J. Feldman, P. Hahn, and C. C. Moore, *Orbit structure and countable sections for actions of continuous groups*, Adv. in Math. 28 (1978), 186–230.
10. F. P. Greenleaf, *Invariant means of topological groups and their applications* (Van Nostrand Mathematical Studies 16), Van Nostrand, New York, 1969.
11. A. Guichardet, *Une caractérisation des algèbres de von Neumann discrètes*, Bull. Soc. Math. France 89 (1961), 77–101.
12. U. Haagerup, *The standard form of von Neumann algebras*, Math. Scand. 37 (1975), 271–283.
13. G. W. Mackey, *Point realisations of transformation groups*, Illinois, J. Math. 6 (1962), 327–335.
14. G. K. Pedersen, *C*-algebras and their automorphism groups* (London Math. Soc. Monographs 14), Academic Press, London, New York, San Francisco, 1979.
15. C. Sutherland, *Cohomology and extensions of von Neumann algebras* I, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 16 (1980), 105–134.
16. C. Sutherland, *Cohomology and extensions of von Neumann algebras* II, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 16 (1980), 135–174.
17. M. Takesaki, *Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type* III, Acta Math. 131 (1973), 249–308.
18. J. Tomiyama, *Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras*, Lecture Notes, Matematisk Institut, Københavns Universitet, 1970.
19. R. J. Zimmer, *Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks*, J. Funct. Anal. 27 (1978), 350–372.
20. R. J. Zimmer, *On the von Neumann algebra of an ergodic group action.* Proc. Amer. Math. Soc. 66 (1977), 289–293.
21. R. J. Zimmer, *Hyperfinite factors and amenable ergodic actions*, Invent. Math. 41 (1977), 23–31.
22. R. J. Zimmer, *Amenable pairs of groups and ergodic actions and the associated von Neumann algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 249 (1978), 271–286.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ D'ORLÉANS
45046 ORLÉANS CEDEX
FRANCE

ET

E.R.A. No 746
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
4, PLACE JUSSIEU
75230 PARIS CEDEX 05
FRANCE