MATH. SCAND. 51 (1982), 179–192

CONTINUITÉ ET DIFFÉRENTIABILITÉ DES TRANSLATIONS DANS UN ESPACE GAUSSIEN

I. RIHAOUI

0. Introduction.

L'espace autoreproduisant étant naturellement associé à une mesure gaussienne, il est intéressant de préciser ce lien en examinant les propriétés des translations par les éléments de cet espace. Divers aspects de ce problème ont été étudiés et des résultats satisfaisants ont été obtenus. Notre étude porte sur des propriétés de différentiabilité et de continuité. D'une part, on obtient avec la différentiabilité de la mesure gaussienne des résultats précis concernant les densités de ses différentielles [(1.3)]. D'autre part, l'étude de la différentiabilité des translations conduit au théorème (2.4). Enfin, le théorème (3.3) établit, grâce aux résultats précédents, une propriété de continuité des translations dans un cas limite. Avant de déterminer le cadre convenable de ce travail, nous commençons par fixer les notations et rappeler quelques faits.

Nous considérons un espace localement convexe (séparé) X, son dual (topologique) X' et γ une mesure de Radon gaussienne centrée sur X. Ainsi, toute forme linéaire $x' \in X'$ peut être regardée comme une variable aléatoire gaussienne centrée. L'espace X'_2, adhérence de X' dans $L^2(X,\gamma)$ est l'espace de Hilbert (gaussien) des (classes des) formes linéaires γ-mesurables ([2, Théorème (8.1)]). Pour tout $f \in L^2$, le barycentre de la mesure $f.\gamma$ est un élément de X et nous notons H l'ensemble de ces barycentres lorsque f parcourt L^2. H est un sous-espace vectoriel de X et l'application Λ de X'_2 sur H associant à tout $f \in X'_2$ le barycentre de $f.\gamma$ est un isomorphisme permettant un transport de structure hilbertienne. En désignant par $\tilde{h}$ l'antécédent $\Lambda^{-1}h \in X'_2$ de l'élément $h \in H$, on définit un produit scalaire

$$\langle h,k\rangle = \langle \tilde{h},\tilde{k}\rangle = \int \tilde{h}(x)\tilde{k}(x)\,d\gamma(x)$$

et la norme correspondante $\|h\|^2 = \|\tilde{h}\|^2 = \int \tilde{h}^2(x)\,d\gamma(x)$.

L'espace de Hilbert H ainsi obtenu est l'espace autoreproduisant de γ. Dans

Reçu le 20. mars, 1981.

la suite, *ces notations de produit scalaire et de norme seront réservées à H et à* $L^2 = L^2(X,\gamma)$.

Si $h \in X$ et $f\colon X \to \mathbf{R}$, on note τ_h la translation $x \mapsto x+h$ et f_h l'application $x \mapsto f(x+h)$.

Lorsque $h \in H$, on sait que la probabilité $\tau_h\gamma$ est absolument continue par rapport à γ et qu'elle admet pour densité la fonction

$$\varrho_h = \exp\left(-\frac{\|h\|^2}{2}\right)\exp\tilde{h}.\ [4]\ .$$

Ce fait joue un rôle primordial dans l'étude des translations. Quant aux fonctions ϱ_h, elles possèdent des propriétés remarquables parmi lesquelles on peut citer: (voir [5], [6]).

PROPOSITION 0.1. *Les fonctions* ϱ_h *appartiennent à* $L^p = L^p(X,\gamma)$ *pour tout* $p \in [1, +\infty[$. *Dans l'espace* L^2, *elles forment une partie totale et l'application* $h \mapsto \varrho_h$ *de* H *dans* L^2 *est continue. Enfin*

$$\|\varrho_h\| = \exp\left(\frac{\|h\|^2}{2}\right).$$

Considérons maintenant une fonction $f\colon X \to \mathbf{R}$ γ-mesurable. Pour tout $h \in H$ la fonction f_h reste γ-mesurable en vertu de l'équivalence de γ et de $\tau_h\gamma$. On a donc une stabilité de la γ-mesurabilité lorsque l'on effectue des translations par des éléments de H. Cependant, ce n'est plus le cas quand il s'agit d'intégrabilité. On est alors naturellement amené à introduire un espace convenable qui permet de remédier à cet inconvénient. Nous noterons donc, pour tout $p \in [1, +\infty]$, $S_p(X,\gamma) = S_p$ l'espace des fonctions $f\colon X \to \mathbf{R}$ γ-mesurables et telles que, pour tout $h \in H$, $f_h \in L^p(X,\gamma)$. Les espaces S_p auront probablement un rôle à jouer, leurs propriétés pouvant faire l'objet d'une étude séparée. En tout cas, une première constatation donne:

PROPOSITION 0.2. *On a l'égalité* $S_\infty = L^\infty$, *mais*

$$L^p \subset S_q \subset L^q \qquad 1 \leqq q < p < +\infty$$

les inclusions étant strictes. De toute manière, S_q *est dense dans* L^q *pour tout* $q \in [1, +\infty]$.

PREUVE. Les relations $S_\infty = L^\infty$ et $S_q \subset L^q$ sont évidentes. Si $f \in L^p$, $\alpha = p/q$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$ et $h \in H$, alors

$$\int |f_h|^q\, d\gamma = \exp\left(-\frac{\|h\|^2}{2}\right)\int |f|^q \exp\tilde{h}\, d\gamma \leqq$$

$$\leqq \exp\left(-\frac{\|h\|^2}{2}\right)\left(\left(\int |f|^p \, d\gamma\right)^{1/\alpha} \cdot \left(\int \exp \beta \tilde{h} \, d\gamma\right)^{1/\beta}\right) < +\infty .$$

Enfin, lorsque γ_0 est la mesure gaussienne normale centrée sur R,

$$f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2} - t|x|\right), \qquad t \neq 0$$

et

$$g(x) = \exp\left(\frac{1}{2p} x^2\right), \qquad p > 1 ,$$

alors $f \in L^1(\mathsf{R}, \gamma_0)$ mais $f \notin S_1(\mathsf{R}, \gamma_0)$ et $g \in S_1(\mathsf{R}, \gamma_0)$ mais $g \notin L^p(\mathsf{R}, \gamma_0)$.

1. Différentiabilité des translations sur les droites de *H*. Différentiabilité de la mesure gaussienne et densités des différentielles.

La différentiabilité des translations sur les droites de H conduit naturellement à celle de la mesure γ. Plus généralement, la notion de mesure différentiable, introduite pour traiter, entre autres, des questions liées aux équations aux dérivées partielles et aux distributions en dimension infinie, ne manque pas d'intérêt. Les propriétés générales sont étudiées dans [1] mais nous nous occupons ici de la mesure γ dont les particularités permettent d'obtenir des résultats plus précis. Rappelons tout d'abord, en l'adaptant, l'essentiel de cette notion:

On considère un espace vectoriel X et un sous-espace vectoriel H muni d'une topologie localement convexe. On considère d'autre part une tribu $\mathscr{C}$ sur X, invariante par translations de vecteurs $h \in H$. On note $M_s(X)$ (respectivement $M(X)$) l'espace vectoriel des mesures scalaires sur $\mathscr{C}$ muni de la topologie de la convergence simple sur les ensembles de $\mathscr{C}$ (respectivement de la topologie de la norme de la variation totale). Si $\mu \in M_s(X)$ et $h \in X$, on note μ_h la mesure $\tau_h\mu$: $A \mapsto \mu(A-h)$.

On dit que la mesure μ est différentiable dans la direction $h \in X$ si l'application $\alpha \mapsto \mu_{\alpha h}$ de R dans $M_s(X)$ est dérivable. La dérivée en 0 est une mesure notée $d_h\mu$, différentielle de μ dans la direction h, qui est absolument continue par rapport à μ et de masse nulle. On dit que μ est H-différentiable si elle est différentiable dans la direction de tout élément $h \in H$ et si l'application $h \mapsto d_h\mu$ de H dans $M_s(X)$ est linéaire continue. Elle est dite 2 fois H-différentiable si pour tout $h \in H$ la mesure $d_h\mu$ est H-différentiable et si l'application $(h, k) \mapsto d^2_{h,k}\mu = d_h(d_k\mu)$ est bilinéaire symétrique continue de H^2 dans $M_s(X)$. La différentiabilité d'ordre supérieur est définie de manière analogue. La différentielle d'ordre n de μ dans la direction $(h_1, \ldots, h_n)$ est notée $d^n_{h_1,\ldots,h_n}\mu$ et elle est toujours absolument continue par rapport à μ.

Certaines propriétés de H et de $\mathscr{C}$ permettent d'affaiblir les hypothèses et de renforcer les résultats notamment au sujet de la différentiabilité au sens de Fréchet de $h \mapsto d_h\mu$, considérée comme application de l'espace de Banach H dans l'espace de Banach $M(X)$. Pour plus de détails, voir [1].

Dans le cas qui nous concerne, une foule de questions se posent autour de la mesure γ. Nous commençons par établir un théorème général qui fait intervenir les fonctions de S_1.

THÉORÈME 1.1. *Soit $f \in S_1$, P un polynôme à n variables, $h_1, \dots, h_n$, h des éléments de H et $g: X \to \mathbf{R}$ $x \mapsto P(\tilde{h}_1(x), \dots, \tilde{h}_n(x))$. L'application de $\mathbf{R}$ dans lui-même*

$$\theta(f, g, h): t \mapsto \int g(x) f(x+th)\, d\gamma(x)$$

est de classe C^∞ et l'on a

$$\theta'(f, g, h)(0) = \int [\tilde{h}(x) g(x) - d_h g(x)] f(x)\, d\gamma(x) \tag{1}$$

$$\theta'(f, g, h)(t) = \theta'(f_{th}, g, h)(0) = \theta(f, g', h)(t) \tag{2}$$

où

$$g'(x) = \tilde{h}(x) g(x) - d_h g(x) \tag{3}$$

($d_h g(x)$ désignant la dérivée de g dans la direction h au point x).

PREUVE.

$$\int g(x) f(x+th)\, d\gamma(x) = \exp\left(-t^2 \frac{\|h\|^2}{2}\right) \int g(x-th) f(x) \exp(t\tilde{h}(x))\, d\gamma(x)\,.$$

Comme $t \mapsto \exp(-t^2\|h\|^2/2)$ est de classe C^∞, il suffit de considérer l'application

$$t \mapsto \int g(x-th) f(x) \exp(t\tilde{h}(x))\, d\gamma(x)\,.$$

La fonction à intégrer $\varphi(t, x)$ est dérivable par rapport à t et l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = \tilde{h}(x) f(x) g(x-th) \exp(t\tilde{h}(x)) - f(x) d_h g(x-th) \exp(t\tilde{h}(x))\,.$$

Du fait que $f \in S_1$ et que g est une fonction polynômiale des $\tilde{h}_i$, pour tout $m \in \mathbf{R}$, l'application

$$x \mapsto \sup_{|t| \leqq m} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,x) \right|$$

est majorée par une fonction intégrable et l'on peut dériver sous le signe $\int$.

Un calcul immédiat donne les égalités de l'énoncé. En particulier, (2) montre $\theta'(f,1,h)(t)$. D'autre part, on a

COROLLAIRE 1.2. *Si $f \in S_1$ et $h \in H$, alors*

$$\int f_h(x)\,d\gamma(x) - \int f(x)\,d\gamma(x) = \int_0^1 dt \int f(x+th)\tilde{h}(x)\,d\gamma(x)\,. \tag{4}$$

En particulier, si l'on note, pour $\alpha \geqq 1$, N_α la norme dans $L^\alpha(v)$ où $v = |f|.\gamma$:

$$\left| \int f_h(x)\,d\gamma(x) - \int f(x)\,d\gamma(x) \right| \leqq [N_2(\tilde{h}) + \|h\|^2 \|f\|_1^{\frac{1}{2}}][N_2(\exp|\tilde{h}|)]\,. \tag{5}$$

Enfin, lorsque $f \in S_\infty$, on obtient:

$$\left| \int f_h(x)\,d\gamma(x) - \int f(x)\,d\gamma(x) \right| \leqq \|f\|_\infty \|\tilde{h}\|_1 \leqq \|f\|_\infty \|h\|\,. \tag{6}$$

PREUVE. (4) et (6) sont des conséquences immédiates de l'expression de $\theta'(f,1,h)(t)$. D'autre part, on a

$$\int f(x+th)\tilde{h}(x)\,d\gamma(x) = \int f(x)\tilde{h}(x-th)\varrho_{th}(x)\,d\gamma(x)$$

$$= \int f(x)\tilde{h}(x)\varrho_{th}(x)\,d\gamma(x) - t\|h\|^2 \int f(x)\varrho_{th}(x)\,d\gamma(x)\,.$$

D'où, pour tout $0 \leqq t \leqq 1$,

$$\left| \int f(x+th)\tilde{h}(x)\,d\gamma(x) \right| \leqq \int |f(x)||\tilde{h}(x)| \exp(|\tilde{h}(x)|)\,d\gamma(x) +$$

$$+ \|h\|^2 \int |f(x)| \exp(|\tilde{h}(x)|)\,d\gamma(x)$$

$$= \int |\tilde{h}(x)| \exp(|\tilde{h}(x)|)\,dv(x) + \|h\|^2 \int \exp(|\tilde{h}(x)|)\,dv(x)\,.$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité de Cauchy–Schwarz et la relation (4) pour obtenir (5).

Comme conséquence, on a le résultat suivant au sujet de la différentiabilité de la mesure γ relativement à l'espace autoreproduisant H:

THÉORÈME 1.3. *La mesure γ est indéfiniment H-différentiable. De façon précise, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $(h_1,\ldots,h_n) \in H^n$, la mesure $d^n_{h_1,\ldots,h_n}\gamma$ admet par rapport à γ la densité $q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)$ qui est un polynôme à n « variables » $\tilde{h}_i$, du premier degré par rapport à chacune d'elles, symétrique et vérifiant les relations suivantes:*

$$q_{n+1}(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n,\tilde{h}_{n+1}) = \tilde{h}_{n+1}q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n) - \sum_{i=1}^{n} \langle h_{i+1},h_i\rangle D_i q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} D_i q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n) &= q_{n-1}(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_{i-1},\tilde{h}_{i+1},\ldots,\tilde{h}_n) \quad \text{si } 2\leqq i\leqq n-1 \\ D_1 q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n) &= q_{n-1}(\tilde{h}_2,\ldots,\tilde{h}_n) \\ D_n q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n) &= q_{n-1}(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_{n-1}) \end{aligned} \tag{8}$$

(D_i étant la dérivation par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable)

$$\int q_n(\tilde{h}_1(x),\ldots,\tilde{h}_n(x))\,d\gamma(x) = 0\,. \tag{9}$$

En particulier,

$$q_1(\tilde{h}) = \tilde{h} \quad \textit{et} \quad q_2(\tilde{h}_1,\tilde{h}_2) = \tilde{h}_1\tilde{h}_2-\langle h_1,h_2\rangle\,. \tag{10}$$

Nous posons enfin

$$q_0 \equiv 1\,. \tag{10'}$$

PREUVE. Nous gardons les notations du théorème (1.1). Pour toute partie γ-mesurable A et tout $h \in H$, l'application $\theta(1_A,1,h)$ est différentiable, ce qui montre que γ est différentiable dans toute direction $h \in H$ et que l'on a

$$d_h\gamma(A) = \theta'(1_A,1,h)(0) = \int_A \tilde{h}(x)\,d\gamma(x), \qquad \text{d'où } q_1(\tilde{h}) = \tilde{h}\,.$$

Si l'on suppose que $d^n_{h_1,\ldots,h_n}\gamma$ existe et qu'elle admet par rapport à γ la sensité $q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)$, le théorème (1.1) montre qu'elle est différentiable dans la direction h_{n+1} et que pour toute partie γ-mesurable A

$$\begin{aligned} d^{n+1}_{h_1,\ldots,h_{n+1}}\gamma(A) &= \theta'(1_A,q_n,h_{n+1})(0) \\ &= \int_A q_{n+1}(\tilde{h}_1(x),\ldots,\tilde{h}_n(x),\tilde{h}_{n+1}(x))\,d\gamma(x) \end{aligned}$$

où q_{n+1} vérifie (7) en vertu de la relation (3).

La relation (8) se démontre par récurrence en utilisant (7) alors que la relation (9) exprime le fait que $d^n_{h_1,\ldots,h_n}\gamma$ est de masse nulle. Les autres propriétés de q_n se démontrent aussitôt. Enfin, il est facile de voir que les applications $(h_1, \ldots, h_n) \mapsto d^n_{h_1, \ldots, h_n}\gamma$ vérifient les conditions voulues (voir aussi [1]).

REMARQUES 1.4.

1. Si on considère $h_1 = \ldots = h_n = h \neq 0$, la densité de $d^n_{h, \ldots, h}\gamma$ est un polynôme $q_n(\tilde{h})$ vérifiant, d'après (7),

$$q_{n+1}(\tilde{h}) = \tilde{h} q_n(\tilde{h}) - \|h\|^2 D q_n(\tilde{h}), \quad q_0 = 1 . \tag{11}$$

Cette relation est caractéristique du polynôme

$$q_n(\tilde{h}) = \|h\|^n 2^{-\frac{1}{2}n} H_n\left(\frac{\tilde{h}}{\sqrt{2}\|h\|}\right), \tag{12}$$

où H_n est le polynôme d'Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n \exp x^2 D^n \exp(-x^2) .$$

2. Le théorème (5.3.1) de [1] est un cas très particulier du théorème (1.3).

3. Les relations définissant les polynômes q_n nous conduisent à les rapprocher des polynômes d'Hermite et des polynômes obtenus par des techniques de produit tensoriel symétrique ([6] et [7]) où l'on obtient des précisions au sujet de leur configuration dans $L^2(X, \gamma)$. Pour retrouver des résultats dont nous aurons besoin pour la suite, nous utiliserons ici la définition des produits de Wick qui fournissent un moyen de calcul assez rapide. En effet, si on pose

$$q_{m_1, \ldots, m_n}(\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_n) = q_{m_1 + \ldots + m_n}(\underbrace{\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{\tilde{h}_n, \ldots, \tilde{h}_n}_{m_n}) . \tag{13}$$

On trouve

$$\frac{\partial q_{m_1, \ldots, m_n}}{\partial \tilde{h}_i} = m_i q_{m_1, \ldots, m_i - 1, \ldots, m_n} . \tag{14}$$

La liaison est alors immédiate avec les définitions suivantes (voir [8]):

DEFINITION 1.5. Soit $(h_1, \ldots, h_n) \in H^n$,

1. On définit par récurrence sur $m = i_1 + \ldots + i_n$ le produit de Wick $:\tilde{h}_1^{i_1} \ldots \tilde{h}_n^{i_n}:$ comme étant la série formelle $\sum_{j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}} a_{j_1 \ldots j_n} \tilde{h}_1^{j_1} \ldots \tilde{h}_n^{j_n}$ vérifiant les conditions suivantes:

$$:\tilde{h}_1^0 \ldots \tilde{h}_n^0: = 1 \tag{15}$$

$$D_j :\tilde{h}_1^{i_1} \ldots \tilde{h}_n^{i_n}: = i_j :\tilde{h}_1^{i_1} \ldots \tilde{h}_n^{i_j - 1} \ldots \tilde{h}_n^{i_n}: \tag{16}$$

(D_j étant la dérivation par rapport à $\tilde{h}_j$)

$$\int :\tilde{h}_1^{i_1} \dots \tilde{h}_n^{i_n}: d\gamma = 0 \quad \text{si } (i_1,\dots,i_n) \neq (0,\dots,0) . \tag{17}$$

2. On pose

$$c_{ij} = \langle h_i, h_j \rangle, \; C = (c_{ij})_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq n}}$$

et si l'on considère $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbf{R}^n$, on note $\tilde{h} = (\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_n)$, $a.\tilde{h} = \sum_{i=1}^n a_i\tilde{h}_i$, $Q(a) = a.Ca = \sum_{i,j}^n c_{ij}a_ia_j$.

On définit alors la série formelle $:\exp a.\tilde{h}:$ par

$$:\exp a.\tilde{h}: = \sum_{i_1,\dots,i_n \in \mathbf{N}} \frac{a^{i_1} \dots a^{i_n}}{i_1! \dots i_n!} :\tilde{h}_1^{i_1} \dots \tilde{h}_n^{i_n}: . \tag{18}$$

Remarques 1.6.

1. La définition précédente et les propriétés des polynômes q_n montrent que l'on a

$$q_n(\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_n) = :\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_n: \tag{19}$$

et

$$q_{m_1,\dots,m_n}(\tilde{h}_1,\dots,\tilde{h}_n) = :\tilde{h}_1^{m_1} \dots \tilde{h}_n^{m_n}: . \tag{19'}$$

2. On peut calculer explicitement $:\exp a.\tilde{h}:$. En effet, on a $D_i :\exp a.\tilde{h}: = a_i :\exp a.\tilde{h}:$, donc $:\exp a.\tilde{h}: = k \exp a.\tilde{h}$, avec

$$1 = \int :\exp a.\tilde{h}: d\gamma = k \int \exp a.\tilde{h}\, d\gamma = k \exp\left(\tfrac{1}{2}Q(a)\right) .$$

D'où

$$:\exp a.\tilde{h}: = \exp\left[a.\tilde{h} - \tfrac{1}{2}Q(a)\right] . \tag{20}$$

En particulier, lorsque l'on considère un seul élément $h \in H$, on a

$$:\exp a\tilde{h}: = \exp\left[a\tilde{h} - \tfrac{1}{2}a^2\|h\|^2\right] = \varrho_{ah} . \tag{21}$$

3. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\|:\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_n:\| \leqq \sqrt{n!}\,\|h_1\| \dots \|h_n\| \tag{22}$$

et

$$\|:\tilde{h}^n:\| = \sqrt{n!}\,\|h\|^n . \tag{23}$$

Ces deux relations, utilisées dans la suite, s'obtiennent à partir de (20).

4. Soit $h \in H$. Désignons par Δ_h l'opérateur différentiel dans la direction h défini dans $M(X)$, Δ_h^n son itéré d'ordre n et Δ_h^0 l'opérateur identité.

La relation

$$\varrho_h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{:\tilde{h}^n:}{n!}$$

dans L^2 admet pour conséquence l'égalité dans l'espace de Banach $M(X)$

$$\tau_h \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_h^n}{n!} \gamma = (\exp \Delta_h)\gamma .$$

D'autres questions concernant les opérateurs différentiels dans $M(X)$ en liaison avec la différentiabilité de γ seront traitées ailleurs.

2. Différentiabilité des translations sur H.

Le théorème (1.1) montre qu'avec une fonction $f \in S_1$, on obtient de bonnes propriétés de différentiabilité sur les droites de H. Pour la différentiabilité au sens de Fréchet sur l'espace de Hilbert H, nous aurons besoin d'une fonction $f \in S_2$. Nous établissons d'abord deux lemmes.

LEMME 2.1. *Soit* $f \geqq 0$, $f \in S_1$. *L'application* $h \mapsto \int f(x) \exp(|\tilde{h}(x)|)\, d\gamma(x)$ *est continue sur* H.

PREUVE. Posons $v = f.\gamma$. L'application $h \mapsto \int \exp |\tilde{h}|\, dv$ est à valeurs réelles, borélienne et logarithmiquement convexe. Le résultat est alors conséquence du corollaire (4.3) de [2].

COROLLAIRE 2.2. *Soit* $f \geqq 0$, $f \in S_1$ *et* $v = f \cdot \gamma$.

1) *Pour tout* $\alpha \geqq 1$, *l'application* $h \mapsto N_\alpha(h) = (\int |\tilde{h}|^\alpha dv)^{1/\alpha} = (\int |\tilde{h}|^\alpha f.\, d\gamma)^{1/\alpha}$ *est une semi-norme continue sur* H.

2) *Pour tout* $(n, r) \in \mathbf{N}^2$, *il existe* $\delta > 0$ *et* $m > 0$ *tels que les inégalités* $\|h_1\| \leqq \delta, \ldots, \|h_n\| \leqq \delta$ *impliquent* $\int f |q_n(\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_n)|^r d\gamma \leqq m$.

PREUVE. Le lemme (2.1) montre en particulier que la semi-norme N_α est bornée sur un voisinage de l'origine de H: elle est donc continue, ce qui prouve 1) alors que 2) découle facilement du même lemme.

LEMME 2.3.

1) $\lim\limits_{u \to 0} \|\varrho_u - 1\| = 0$

$(u \to 0$ *dans* $H)$.

2) $\lim_{u\to 0}\left\|\frac{\varrho_u-\tilde{u}-1}{\|u\|}\right\| = 0$

PREUVE. En considérant la relation $\varrho_u=\sum_{n=0}^{\infty}:\tilde{u}^n:/n!$ et la relation (23), on obtient:

$$\|\varrho_u-1\|^2 = e^{\|u\|^2}-1 \quad \text{et} \quad \left\|\frac{\varrho_u-\tilde{u}-1}{\|u\|}\right\|^2 = \frac{e^{\|u\|^2}-\|u\|^2-1}{\|u\|^2},$$

d'où le résultat.

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2.4. *Soit $f\in S_2$. L'application T_f: $h\mapsto \int f(x+h)\,d\gamma(x)=\langle f_h, 1\rangle$ de H dans* R *est indéfiniment Fréchet différentiable sur H. Pour tout $n\geqq 1$, la dérivée d'ordre n, D^nT_f, est l'application de H dans $L_n(H)$, espace des formes multilinéaires continues sur H, donnée par la relation*

$$D^nT_f(u)(h_1,\ldots,h_n) = \langle f_u, :\tilde{h}_1\ldots\tilde{h}_n:\rangle = \langle f_u, q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)\rangle . \tag{24}$$

En particulier

$$DT_f(u)(h) = DT_{f_u}(0)(h) = \langle f_u, \tilde{h}\rangle = \int f(x+u)\tilde{h}(x)\,d\gamma(x) . \tag{25}$$

PREUVE. Remarquons d'abord que l'application $D^nT_f(u)\in L_n(H)$. Elle est multilinéaire (symétrique) d'après (1.3). On a d'autre part, grâce à (22),

$$|D^nT_f(u)(h_1,\ldots,h_n)| \leqq \|f_u\|\,\|:\tilde{h}_1\ldots\tilde{h}_n:\| \leqq \sqrt{n!}\|f_u\|\,\|h_1\|\ldots\|h_n\| .$$

En posant $D^0T_f=T_f$, $L_0(H)=$ R et $q_0\equiv 1$, on voit que (24) est satisfaite pour $n=0$. Pour montrer le théorème, nous partons donc de l'application D^nT_f de l'énoncé et nous montrons qu'elle est différentiable sur H et que sa dérivée est bien l'application $D^{n+1}T_f$ de l'énoncé. En fait, comme $D^nT_f(u+h)=D^nT_{f_u}(h)$, il suffit de considérer la différentiabilité en 0 et de montrer que la différentielle $D^{n+1}T_f(0)$ est l'application linéaire continue de H dans $L_n(H)$ qui fait correspondre à u l'application

$$D^{n+1}T_f(0):u\colon (h_1,\ldots,h_n)\mapsto \langle f, :\tilde{h}_1\ldots\tilde{h}_n\tilde{u}:\rangle .$$

Pour cela, nous majorons, dans $L_n(H)$, la norme $\|D^nT_f(u)-D^nT_f(0)-D^{n+1}T_f(0):u:\|_{L_n}$ qui est proportionelle à

$$\sup_{\|h_1\|\leqq\delta,\ldots,\|h_n\|\leqq\delta}|\Delta_n(h_1,\ldots,h_n,u)|$$

où $\delta > 0$ et

$$\begin{aligned}&\Delta_n(h_1,\ldots,h_n,u)\\ &\quad = \langle f_\mu, q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)\rangle - \langle f, q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)\rangle - \langle f, q_{n+1}(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n,\tilde{u})\rangle .\end{aligned}$$

Le calcul de Δ_n fait intervenir les deux relations suivantes qui résultent de (1.3) et de la formule de Taylor, compte tenu du fait que q_n est un polynôme du ler degré par rapport à chacune des variables

$$q_{n+1}(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n,\tilde{u})(x) = \tilde{u}(x)q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)(x) - \sum_{i=1}^n \langle u, h_i\rangle D_i q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)(x)$$

$$\begin{aligned} q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)(x-u) &= q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)(x) - \sum_{i=1}^n \langle h_i, u\rangle D_i q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)(x)\\ &\quad + \sum_{i_1<i_2} \langle h_{i_1}, u\rangle\langle h_{i_2}, u\rangle D^2_{i_1 i_2} q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)(x) +\\ &\quad \ldots + (-1)^k \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} \langle h_{i_1}, u\rangle\\ &\quad \ldots \langle h_{i_k}, u\rangle D^k_{i_1\ldots i_k} q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)(x) +\\ &\quad \ldots + (-1)^n \langle h_1, u\rangle\\ &\quad \ldots \langle h_n, u\rangle D^n_{1,\ldots,n} q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)(x) .\end{aligned}$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned}&\Delta_n(h_1,\ldots,h_n,u)\\ &\quad = \int f_u(x) q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)(x)\,d\gamma(x) - \int f(x) q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)(x)\,d\gamma(x)\\ &\qquad - \int f(x) q_{n+1}(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n,\tilde{u})(x)\,d\gamma(x)\\ &\quad = \int f(x) q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)(x-u)\varrho_u(x)\,d\gamma(x)\\ &\qquad - \int f(x) q_n(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)(x)\,d\gamma(x) - \int f(x) q_{n+1}(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n,\tilde{u})(x)\,d\gamma(x)\\ &\quad = \int f q_n \varrho_u\,d\gamma - \sum_{i=1}^n \langle h_i, u\rangle \int f\varrho_u D_i q_n\,d\gamma + \sum_{k=2}^n (-1)^k \sum_{i_1<\ldots<i_k} \langle h_{i_1}, u\rangle \ldots\\ &\qquad \langle h_{i_k}, u\rangle \int f\varrho_u D^k_{i_1\ldots i_k} q_n\,d\gamma - \int f q_n\,d\gamma - \int f q_n \tilde{u}\,d\gamma +\\ &\qquad + \sum_{i=1}^n \langle h_i, u\rangle \int f D_i q_n\,d\gamma\end{aligned}$$

$$= \int fq_n(\varrho_u - \tilde{u} - 1)\,d\gamma + \sum_{i=1}^{n} \langle h_i, u\rangle \int (1-\varrho_u) f D_i q_n\, d\gamma$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \langle h_{i_1}, u\rangle \ldots \langle h_{i_k}, u\rangle \int f\varrho_u D^k_{i_1 \ldots i_k} q_n\, d\gamma\,.$$

D'où:

$|\Delta(h_1, \ldots, h_n, u)|$

$$\leqq \|fq_n\|\,\|\varrho_u - \tilde{u} - 1\| + \|u\|\,\|\varrho_u - 1\| \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|h_i\|\,\|fD_i q_n\| \right\}$$

$$+ \|\varrho_u\| \left\{ \sum_{k=2}^{n} \|u\|^k \left[\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \|h_{i_1}\| \ldots \|h_{i_k}\|\,\|fD^k_{i_1 \ldots i_k} q_n\| \right] \right\}.$$

Or, la partie 2) du corollaire (2.2) appliquée à $f^2 \in S_1$, montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que les quantités $\|fq_n\|$, $\|fD_i q_n\|$ et $\|fD^k_{i_1 \ldots i_k} q_n\|$ soient bornées dès que les relations $\|h_i\| \leqq \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont satisfaites. D'autre part, $\|\varrho_u\| = \exp(\|u\|^2/2)$. Par conséquent, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$c\|D^n T_f(u) - D^n T_f(0) - D^{n+1} T_f(0)\!:\!u\!:\!\|_{L_n} \leqq \|\varrho_u - \tilde{u} - 1\| + \|u\|\,\|\varrho_u - 1\| + \exp\left(\frac{\|u\|^2}{2}\right)\left[\sum_{k=2}^{n} \|u\|^k\right].$$

Il en résulte, grâce au lemme (2.3), que l'on a:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\|D^n T_f(u) - D^n T_f(0) - D^{n+1} T_f(0)\!:\!u\!:\!\|_{L_n}}{\|u\|} = 0\,.$$

3. Continuité des translations sur H.

Dans ce qui suit on fixe $p \in [1, +\infty[$ et $f \in S_p$.

On peut alors examiner soit la continuité de l'application $h \mapsto \|f_h\|_p$ de H dans R, soit celle de $h \mapsto f_h$ de H dans L^p. Nous commençons ici par établir la continuité de la première application pour aboutir au résultat concernant l'application de H dans L^p. Le problème a déjà été étudié dans le cas où $f \in S_\infty$ ([2, théorème (4.1)]) puis lorsque $f \in L^q$ pour $q > p$ ([3, lemme 2.2]).

Ce paragraphe traite ainsi le cas limite $f \in S_p$.

LEMME 3.1. *L'application $h \mapsto \|f_h\|_p$ de H dans* R *est continue.*

PREUVE. Il suffit de considérer la continuité en 0 et c'est alors une conséquence de la relation (5) et du lemme (2.1) ainsi que du corollaire (2.2), 1) appliqués à $g = |f|^p \in S_1$.

LEMME 3.2. *L'application $h \mapsto f_h$ de H dans L^p est continue en chaque point d'un ensemble dense de H.*

PREUVE. Pour toute appication φ: $X \to \mathbf{C}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, nous notons $\bar{\varphi}^n = \varphi 1_{\{|\varphi| \leqq n\}}$. Remarquons alors que pour tout $h \in H$, on a $[\bar{\varphi}^n]_h = \overline{[\varphi_h]}^n$. Considérons les applications de H dans L^p, $U: h \mapsto f_h$ et $U_n: h \to [\overline{f}^n]_h$. D'après ([2, théorème (4.1)]), pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'application U_n est continue. De plus, lorsque $h \in H$ est fixé, on a $U(h) = \lim_{n \to +\infty} U_n(h)$ dans L^p en vertu du théorème de Lebesgue. Comme l'espace H est hilbertien (donc de Baire), le résultat en découle aussitôt.

THÉORÈME 3.3. *L'application $h \mapsto f_h$ de H dans L^p est continue.*

PREUVE. Là aussi, il suffit de considérer la continuité en 0. Grâce au lemme (3.1), il suffit de montrer que $f_h \to f$ en mesure lorsque $h \to 0$ dans H. Soit donc $\varepsilon > 0$ et

$$A_h = \{x \in X : |f_h(x) - f(x)| \geqq \varepsilon\} .$$

D'après le lemme (3.2), il existe un point h_0 de continuité de l'application $h \mapsto f_h$; ceci entraîne donc la convergence en mesure de f_{h+h_0} vers f_{h_0} lorsque $h \to 0$ dans H. Si on pose

$$B_h = \{x \in X : |f_{h+h_0}(x) - f_{h_0}(x)| \geqq \varepsilon\} ,$$

alors $\gamma(B_h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Or, $A_h = B_h + h_0$, d'où

$$\gamma(A_h) = \int_{B_h} \varrho_{-h_0} d\gamma$$

et par conséquent $\gamma(A_h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

BIBLIOGRAPHIE

1. W. I. Averbuh, O. G. Smoljanov et S. V. Fomin, *Generalized functions and differential equations in linear spaces*, I. *Differentiable measures*, Trans. Moscow Math. Soc. 24 (1971), 140–184.
2. C. Borell, *Gaussian Radon measures on locally convex spaces*, Math. Scand. 38 (1976), 265–284.
3. C. Borell, *Tail Probabilities in Gauss Space*, in *Vector Space Measures and Applications* I, Proceedings, Dublin 1977, eds. R. M. Aron and S. Dineen, (Lecture Notes in Mathematics 644), pp. 73–82. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1978.
4. R. H. Cameron and W. T. Martin, *The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier–Hermite functionals*, Ann. of Math. 48 (1947), 385–392.

5. G. Kallianpur, *Zero-one laws for Gaussian processes*, Trans. Amer. Math. Soc. 149 (1970), 199–211.
6. G. Kallianpur, *The role of Reproducing Kernel Hilbert Spaces in the Study of Gaussian Processes*, in *Advances in Probability and Related Topics*, ed. P. Ney, Vol. 2, pp. 49–83, Marcel Dekker Inc., New York, 1970.
7. J. Neveu, *Processus gaussiens*, Montréal, 1968.
8. B. Simon, *The* $P(\Phi)_2$ *Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974.

UNIVERSITÉ CLAUDE-BERNARD — LYON I
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
43, BD DU 11 NOVEMBRE 1918
69622 VILLEURBANNE CÉDEX
FRANCE