MATH. SCAND. 51 (1982), 275–288

SUR LA RÉFLEXIVITÉ DES PRODUITS TENSORIELS ET LES SOUS-ESPACES DES PRODUITS TENSORIELS PROJECTIFS

EVE OJA*

Résumé.

Soient X et Y deux espaces de Banach. Nous caractérisons la réflexivité de $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ et de $X \hat{\otimes} Y$ dans le cas où X possède une décomposition inconditionnelle de dimension finie; nous étudions des propriétés de reproductibilité des espaces l_q dans $l_p \hat{\otimes} Y$ et caractérisons les sous-espaces de $l_p \hat{\otimes} l_r$ isomorphes à l_q.

Introduction.

Soient X et Y deux espaces de Banach dont les duaux respectifs sont notés X' et Y'. La norme ε sur le produit tensoriel $X \otimes Y$ est définie par

$$\|u\|_\varepsilon = \sup\{|(f \otimes g)(u)| : f \in X',\ \|f\| \leqq 1,\ g \in Y',\ \|g\| \leqq 1\}$$

et la norme π est définie par

$$\|u\|_\pi = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|\,\|y_i\| :\ u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right\}.$$

Notons $X \otimes_\varepsilon Y$ (respectivement $X \otimes_\pi Y$) le produit tensoriel $X \otimes Y$ muni de la norme ε (respectivement π) et $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ (respectivement $X \hat{\otimes} Y$) le complété de $X \otimes_\varepsilon Y$ (respectivement $X \otimes_\pi Y$).

Rappelons qu'une décomposition de Schauder d'un espace de Banach X est une suite (p_k) de projections non nulles, continues de X qui satisfont aux conditions: $p_k \circ p_l = 0$ si $k \neq l$ et pour tout $x \in X$ la série $\sum_{k=1}^{\infty} p_k x$ converge vers x. Si la convergence est inconditionnelle pour tout $x \in X$ alors on dit que la décomposition de Schauder (p_k) est inconditionnelle et si $\dim \operatorname{Im} p_k < \infty$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$ alors on dit que (p_k) est une décomposition de dimension finie.

Le symbole l_∞ notera ici l'espace c_0 des suites de scalaires qui convergent

---

* Ce travail a été effectué durant un stage de l'auteur à l'Université Aix-Marseille II dirigé par les Professeurs P. Billard et C. Samuel auxquels nous adressons nos plus vifs remerciements.

Reçu le 29. juin 1981.

vers 0 muni de la norme sup. Si $1 \leqq p \leqq \infty$ alors p' note le réel défini par $1/p + 1/p' = 1$ avec la convention $p' = \infty$ si $p = 1$ et $p' = 1$ si $p = \infty$.

Pour les définitions et propriétés classiques cf. [1] et [7].

Il existe une caractérisation « duale» de la réflexivité des produits tensoriels $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ et $X \hat{\otimes} Y$ pour des espaces de Banach réflexifs X et Y dont l'un possède la propriété d'approximation (qui découle du critère de réflexivité de l'espace des opérateurs compacts (cf. p. ex. [5]) et qui a été établie par J. R. Holub [3] pour X et Y ayant des bases): le produit tensoriel $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ (respectivement $X \hat{\otimes} Y$) est réflexif si et seulement si tout opérateur linéaire continu de X' dans Y est compact (respectivement tout opérateur linéaire continu de X dans Y' est compact).

En restreignant la classe des espaces réflexifs X et Y considérés nous avons, d'après N. J. Kalton [5], un autre critère de réflexivité de $X \hat{\hat{\otimes}} Y$: si X possède la propriété d'approximation bornée inconditionnelle (c.-à-d. s'il existe une suite (A_k) d'opérateurs de rang fini de X dans X telle que pour tout $x \in X$ la série $\sum_{k=1}^{\infty} A_k x$ converge inconditionnellement vers x) alors le produit tensoriel $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ est réflexif si et seulement s'il ne contient aucun sous-espace isomorphe à c_0. Bien que, dans ces conditions, nous ne connaissions pas de critère « dual » pour $X \hat{\otimes} Y$, nous donnerons ici une caractérisation « duale » de la réflexivité des produits tensoriels $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ et $X \hat{\otimes} Y$ pour des espaces réflexifs X et Y dont l'un possède une décomposition inconditionnelle de dimension finie. Nous montrerons (cf. Théorème 2) que dans ces conditions le produit tensoriel $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ (respectivement $X \hat{\otimes} Y$) est réflexif si et seulement s'il ne contient aucun sous-espace complémenté isomorphe à c_0 (respectivement l_1).

C. Samuel [11] a établi que si pour un espace de Banach Y et $1 \leqq q < p \leqq \infty$ l'espace $l_p \hat{\hat{\otimes}} Y$ a un sous-espace isomorphe à l_q alors Y a un sous-espace isomorphe à l_q et si pour $1 \leqq p < q \leqq \infty$ l'espace $l_p \hat{\otimes} Y$ a un sous-espace isomorphe à l_q alors le bidual Y'' a un sous-espace isomorphe à l_q. Nous montrerons (cf. Théorème 3) que pour $l_p \hat{\otimes} Y$ la situation est analogue au cas de $l_p \hat{\hat{\otimes}} Y$: c'est Y qui a un sous-espace isomorphe à l_q.

Pour $l_p \hat{\otimes} l_r$, $1 \leqq p$, $r \leqq \infty$, nous obtiendrons les résultats « duaux » des résultats de C. Samuel (cf. [11] et [12]) sur $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_r$. Nous montrerons (cf. Théorème 4) que si l_q est isomorphe à un sous-espace de $l_p \hat{\otimes} l_r$ alors $q = p$ ou $q = r$ ou $q = s$ où $s = 1$ si $p \leqq r'$ et $1/s = 1/p + 1/r$ (avec $1/\infty = 0$) si $p > r'$ et, d'autre part (cf. Théorème 5), tout sous-espace fermé de dimension infinie de $l_p \hat{\otimes} l_r$ contient un sous-espace complémenté dans $l_p \hat{\otimes} l_r$ et isomorphe à l_q pour les mêmes valeurs de q. (Rappelons que dans le case de $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_r$ on avait $s = \infty$ si $p \geqq r'$ et $1/s = 1/p + 1/r - 1$ si $p < r'$ (cf. [11] et [12]).)

La démonstration de ces résultats repose sur le fait que les produits tensoriels considérés ont une « bonne » décomposition de Schauder.

1. Décompositions de Schauder et réflexivité.

Soient X et Y deux espaces de Banach et $X \hat{\otimes}_\alpha Y$ le complété du produit tensoriel $X \otimes_\alpha Y$ où $\alpha = \varepsilon$ ou $\alpha = \pi$. Soit (π_k) une décomposition de Schauder de X et I_Y l'identité sur Y. Pour $k = 1, 2, \ldots$ notons p_k le prolongement continu de

$$\pi_k \otimes I_Y : \; X \otimes_\alpha Y \to X \otimes_\alpha Y$$

à $X \hat{\otimes}_\alpha Y$. Il est immédiat de vérifier (cf. p. ex. [2]) que (p_k) est une décomposition de Schauder de $X \hat{\otimes}_\alpha Y$ et si (π_k) est inconditionnelle alors (p_k) est aussi inconditionnelle. (Notons que le résultat reste valable si α est une « uniform crossnorm ».)

Remarquons que $\operatorname{Im} \pi_k \hat{\hat{\otimes}} Y$ est isométrique au sous-espace $\operatorname{Im} p_k$ de $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ (puisque la norme ε sur $\operatorname{Im} \pi_k \otimes Y$ coïncide avec la norme induite par la norme ε de $X \otimes Y$) et que $\operatorname{Im} \pi_k \hat{\otimes} Y$ est isomorphe au sous-espace $\operatorname{Im} p_k$ de $X \hat{\otimes} Y$ (pour la preuve il suffit de noter que $\operatorname{Im} \pi_k \otimes_\pi Y$ est isomorphe à un sous-espace de $X \otimes_\pi Y$ puisque $\operatorname{Im} \pi_k$ est complémenté dans X). Donc si (π_k) est une décomposition de dimension finie, c.-à-d. si $d_k = \dim \operatorname{Im} \pi_k < \infty$ pour tout $k = 1, 2, \ldots$, alors $\operatorname{Im} p_k$ (comme sous-espace de $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ ou $X \hat{\otimes} Y$), isomorphe au produit normé $l_1^{d_k}(Y)$, est isomorphe au produit Y^{d_k}.

Rappelons qu'une décomposition de Schauder (p_k) d'un espace de Banach X est dite « shrinking » si (p'_k) est une décomposition de Schauder pour X' et (p_k) est dite « boundedly complete » si pour toute suite bornée $(\sum_{k=1}^n x_k)_{n=1,2,\ldots}$, $x_k \in \operatorname{Im} p_k$, la série $\sum_{k=1}^\infty x_k$ est convergente.

La proposition suivante trouve son analogue dans [3] où X et Y étaient deux espaces avec des bases et où l'on considérait le produit tensoriel des bases.

PROPOSITION 1. *Soient X et Y deux espaces de Banach, X possédant une décomposition de dimension finie (π_k). Si (π_k) est « shrinking » alors la décomposition de Schauder (p_k) de $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ est « shrinking ». Si (π_k) est « boundedly complete » alors la décomposition de Schauder (p_k) de $X \hat{\otimes} Y$ est « boundedly complete ».*

Supposons (π_k) « shrinking ». Comme (π'_k) est une décomposition de Schauder de X', les prolongements continus q_k de $\pi'_k \otimes I_{Y'}$ forment une décomposition de Schauder de $X' \hat{\otimes} Y'$. D'autre part, $X' \hat{\otimes} Y'$ s'identifie canoniquement à $(X \hat{\hat{\otimes}} Y)'$ (puisque X' est séparable et posséde la propriété d'approximation) (cf. [1]) et $q_k = p'_k$ par cette identification; donc (p'_k) est une décomposition de Schauder de $(X \hat{\hat{\otimes}} Y)'$, c.-à-d. (p_k) est « shrinking ».

Si (π_k) est « boundedly complete » alors X est canoniquement isomorphe à H' (où $H = \{f \in X' : \lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^n \pi'_k f - f\| = 0\}$, muni de la topologie de norme) et $(\pi'_k|_H)$ est une décomposition de Schauder de H qui est « shrinking » (cf. [10]). D'après ce que nous venons de démontrer, la décomposition de Schauder (q_k) de $H \hat{\hat{\otimes}} Y'$ formée des prolongements continus de $\pi'_k|_H \otimes I_{Y'}$ est

« shrinking » et par conséquent la décomposition de Schauder (q_k') de $(H \hat{\hat{\otimes}} Y')'$ est « boundedly complete » (cf. [4]). Mais H' étant séparable et possédant la propriété d'approximation, $(H \hat{\hat{\otimes}} Y')'$ s'identifie canoniquement à $H' \hat{\otimes} Y''$ qui contient $H' \hat{\otimes} Y$ comme sous-espace (cf. [1]). En utilisant la dualité naturelle $(X \otimes Y, X' \otimes Y')$ il est facile de vérifier que par l'identification canonique q_k' prolonge $\pi_k \otimes I_Y$ et par conséquent les prolongements continus de $\pi_k \otimes I_Y$ forment une décomposition de Schauder « boundedly complete » pour $H' \hat{\otimes} Y$, donc aussi pour $X \hat{\otimes} Y$.

Remarquons que la décomposition (inconditionnelle) de Schauder (p_k) construite à partir de la décomposition de Schauder (π_k) de l_2 associée naturellement à sa base canonique (notons que (π_k) est de dimension finie, inconditionnelle, « shrinking » et « boundedly complete ») n'est pas « boundedly complete » pour $l_2 \hat{\hat{\otimes}} l_2$ et n'est pas « shrinking » pour $l_2 \hat{\otimes} l_2$. En effet, comme $l_2 \hat{\hat{\otimes}} l_2$ contient un sous-espace isomorphe à c_0 et $l_2 \hat{\otimes} l_2$ contient un sous-espace isomorphe à l_1 (cf. p. ex. [11]), il reste à appliquer la proposition suivante qui découle immédiatement du Corollaire 2 du Théorème 2.4 de [8] et du Corollaire du Théorème 1 de [9] (pour le (a)), du Théorème 2, (b), de [9] (pour le (b)) et du Corollaire 2 du Théorème 2.7 de [8] (pour le (c)).

PROPOSITION 2. *Soit (p_k) une décomposition de Schauder inconditionnelle d'un espace de Banach X.*

(a) *Si* $\operatorname{Im} p_k$ *est faiblement séquentiellement complet pour tout* $k = 1, 2, \ldots$ *alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *(p_k) est « boundedly complete »*,

(ii) *X est faiblement séquentiellement complet,*

(iii) *X ne contient aucun sous-espace complémenté isomorphe à c_0.*

(b) *Si X ne contient aucun sous-espace complémenté isomorphe à l_1 alors (p_k) est « shrinking ».*

(c) *Si le dual* $(\operatorname{Im} p_k)'$ *est séparable pour tout* $k = 1, 2, \ldots$ *et (p_k) est « shrinking » alors X ne contient aucun sous-espace isomorphe à l_1.*

Notons que des propositions 1 et 2, (a), découle immédiatement un résultat de S. Heinrich [2]: si deux espaces de Banach X et Y sont faiblement séquentiellement complets et X a une décomposition inconditionnelle de dimension finie alors $X \hat{\otimes} Y$ est faiblement séquentiellement complet. En effet, dans ce cas la décomposition (π_k) de X est « boundedly complete » et par conséquent la décomposition inconditionnelle (p_k) de $X \hat{\otimes} Y$ est aussi « boundedly complete » ce qui est équivalent à la faible séquentielle complétion de $X \hat{\otimes} Y$ puisque l'image $\operatorname{Im} p_k$ isomorphe à Y^{d_k} (où $d_k = \dim \operatorname{Im} \pi_k < \infty$) est faiblement séquentiellement complète pour tout $k = 1, 2, \ldots$.

En ce qui concerne la faible séquentielle complétion de $X \hat{\hat{\otimes}} Y$, de la proposition 2, (a), découle, par analogie, le

THÉORÈME 1. *Soient X et Y deux espaces de Banach faiblement séquentiellement complets dont l'un possède une décomposition inconditionnelle de dimension finie. Alors le produit tensoriel $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ est faiblement séquentiellement complet si et seulement s'il ne contient aucun sous-espace complémenté isomorphe à c_0.*

Pour des espaces plus généraux mentionnons le résultat de D. R. Lewis [6]: le produit tensoriel $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ de deux espaces X et Y faiblement séquentiellement complets dont l'un possède la propriété d'approximation métrique est faiblement séquentiellement complet si et seulement si tout opérateur linéaire continu de X' muni de la topologie $\sigma(X', X)$ dans Y muni de la topologie $\sigma(Y, Y')$ est compact.

Pour établir les critères de réflexivité des produits tensoriels nous utilisons le résultat de B. L. Sanders [13]: un espace de Banach avec une décomposition de Schauder (p_k), telle que l'image $\operatorname{Im} p_k$ est réflexive pour tout $k = 1, 2, \ldots$, est réflexif si et seulement si (p_k) est « shrinking » et « boundedly complete ».

THÉORÈME 2. *Soient X et Y deux espaces de Banach réflexifs dont l'un possède une décomposition inconditionnelle de dimension finie. Alors*:

(a) *Le produit tensoriel $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ est réflexif si et seulement s'il ne contient aucun sous-espace complémenté isomorphe à c_0.*

(b) *Le produit tensoriel $X \hat{\otimes} Y$ est réflexif si et seulement s'il ne contient aucun sous-espace complémenté isomorphe à l_1.*

Il faut prouver la partie « si ». Nous supposons que X possède une décomposition inconditionnelle de dimension finie (π_k) et soit (p_k) la décomposition de Schauder inconditionnelle correspondante pour $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ ou $X \hat{\otimes} Y$. Comme Y est réflexif, les images $\operatorname{Im} p_k$ (étant isomorphes à Y^{d_k}, $d_k = \dim \operatorname{Im} \pi_k$) sont réflexives. Comme X est réflexif, (π_k) est « shrinking » et « boundedly complete», donc (p_k) est « shrinking » pour $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ et « boundedly complete » pour $X \hat{\otimes} Y$ (cf. Proposition 1). Par conséquent $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ (respectivement $X \hat{\otimes} Y$) est réflexif si (p_k) est « boundedly complete » (respectivement « shrinking ») et le résultat découle de la Proposition 2, (a) (respectivement (b)).

REMARQUE. Notons une autre démonstration du Théorème 2. En utilisant le résultat de [6] qui affirme que le produit tensoriel $X \hat{\hat{\otimes}} Y$ des espaces réflexifs X

et Y est réflexif si et seulement s'il est faiblement séquentiellement complet, le Théorème 1 entraîne le (a) du Théorème 2. En utilisant l'identification canonique de $X \hat{\otimes} Y$ à $(X' \hat{\hat{\otimes}} Y')'$, le (a) du Théorème 2 entraîne le (b).

2. Reproductibilité de l_q dans $l_p \hat{\otimes} Y$.

Nous commençons par deux lemmes simples sur les décompositions de Schauder. Pour une décomposition de Schauder (p_k) notons $P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$, $n = 1, 2, \ldots$.

LEMME 1. *Soient (p_k) une décomposition de Schauder d'un espace de Banach X et $1 \leqq q \leqq \infty$. Si $X_k = \operatorname{Im} p_k$, $k = 1, 2, \ldots$, ne contient aucun sous-espace isomorphe à l_q alors $\operatorname{Im} P_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ne contient aucun sous-espace isomorphe à l_q.*

Il est évident que $\operatorname{Im} P_n$ est isomorphe à $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ qui ne contient aucun sous-espace isomorphe à l_q puisque X_k ne contient aucun sous-espace isomorphe à l_q (cf. p. ex. [11]).

LEMME 2. *Soient (p_k) une décomposition de Schauder d'un espace de Banach X et $1 \leqq q \leqq \infty$. Si X contient un sous-espace isomorphe à l_q et $\operatorname{Im} p_k$, $k = 1, 2, \ldots$, ne contient aucun sous-espace isomorphe à l_q alors il existe une suite (u_i) de X équivalente à la base canonique de l_q et une suite strictement croissante d'entiers $n_0 < n_1 < \ldots$ telles que*

$$(1) \qquad u_i = (P_{n_i} - P_{n_{i-1}})u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Considérons une suite (x_i) de X équivalente à la base canonique de l_q et notons $L(x_i)_{i \geqq m}$ le sous-espace vectoriel engendré par $x_m, x_{m+1}, \ldots$. Puisque $\operatorname{Im} P_n$, $n = 1, 2, \ldots$, ne contient aucun sous-espace isomorphe à l_q (cf. Lemme 1), nous avons

$$(2) \qquad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall m, \quad \forall n, \quad \exists y \in L(x_i)_{i \geqq m}, \quad \|y\| = 1, \quad \|P_n y\| < \varepsilon .$$

D'après (2) et le fait que $\lim_{n \to \infty} P_n x = x$ pour tout $x \in X$, nous pouvons construire par récurrence une suite-base bloc normalisée (y_i) de (x_i) et une suite strictement croissante d'entiers $n_0 = 1 < n_1 < n_2 \ldots$ telles que

$$(3) \qquad \|P_{n_{i-1}} y_i\| + \|P_{n_i} y_i - y_i\| \leqq \varepsilon / 2^i, \qquad i = 1, 2, \ldots .$$

Comme (y_i) est une suite-base bloc normalisée d'une suite équivalente à la base canonique de l_q, elle est aussi équivalente à la base canonique de l_q. Notons

$$u_i = (P_{n_i} - P_{n_{i-1}}) y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots ;$$

alors la condition (1) est visiblement satisfaite. Pour ε suffisamment petit, (3) entraîne l'équivalence de (u_i) à la suite-base normalisée (y_i), donc l'équivalence de (u_i) à la base canonique de l_q.

REMARQUE. Nous avons prouvé que si une suite (x_i) de X est équivalente à la base canonique de l_q alors $u_i = (P_{n_i} - P_{n_{i-1}})y_i$ pour une suite-base bloc normalisée (y_i) de (x_i).

Pour $a = (a_i) \in l_p$, $l \leqq p \leqq \infty$, notons $\|a\|_p$ la norme de a dans l_p. Soient $\sigma \subset \{1, 2, \ldots\}$ un ensemble fini d'entiers et $(a_i)_{i \in \sigma}$ une famille de scalaires. Notons $\|(a_i)_{i \in \sigma}\|_p$ la norme dans l_p de la suite (b_i) définie par $b_i = a_i$ si $i \in \sigma$ et $b_i = 0$ si $i \notin \sigma$.

Soient Y un espace de Banach, $1 \leqq p \leqq \infty$ et (e_m) la base canonique de l_p. Notons (π_k) la décomposition naturelle de l_p définie par

$$\pi_k\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m e_m\right) = a_k e_k, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Alors la décomposition de Schauder (p_k) de $l_p \hat{\hat{\otimes}} Y$ ou $l_p \hat{\otimes} Y$ qui lui correspond est inconditionnelle et $\operatorname{Im} p_k$ (comme sous-espace de $l_p \hat{\hat{\otimes}} Y$ ou $l_p \hat{\otimes} Y$) est isomorphe à Y pour tout $k = 1, 2, \ldots$.

Soit

$$z = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{im} e_m\right) \otimes y_i \in l_p \otimes Y.$$

En introduisant les applications linéaires $i_k \colon l_p \otimes Y \to Y$ définies par

$$i_k z = \sum_{i=1}^{l} a_{ik} y_i$$

et remarquant que

$$p_k z = \sum_{i=1}^{l} a_{ik} e_k \otimes y_i ,$$

il est immédiat de vérifier (cf. p. ex. [11]) que $(g(i_k p_k z))_{k=1,2,\ldots} \in l_p$ pour tout $g \in Y'$ et

$$\|z\|_\varepsilon = \sup\left\{\left\|\sum_{k=1}^{\infty} g(i_k p_k z) e_k\right\|_p : g \in Y',\ \|g\| \leqq 1\right\}. \tag{4}$$

Pour un ensemble fini d'entiers $\sigma \subset \{1, 2, \ldots\}$ et des éléments quelconques $z_k \in l_p \otimes Y$, $k \in \sigma$, de (4) découle facilement

$$\left\|\sum_{k \in \sigma} p_k z_k\right\|_\varepsilon = \sup\left\{\left\|\sum_{k \in \sigma} g(i_k p_k z_k) e_k\right\|_p : g \in Y',\ \|g\| \leqq 1\right\}, \tag{5}$$

et d'après (4) et (5) nous avons

$$\left\| \sum_{k\in\sigma} p_k z \right\|_\varepsilon \leqq \|z\|_\varepsilon, \qquad z \in l_p \hat{\hat{\otimes}} Y. \tag{6}$$

THÉORÈME 3. *Soient Y un espace de Banach et $1 \leqq p < q \leqq \infty$. Si $l_p \hat{\otimes} Y$ a un sous-espace isomorphe à l_q alors Y a un sous-espace isomorphe à l_q.*

Notons respectivement (p_k) et (q_k) les décompositions de Schauder de $l_p \hat{\otimes} Y$ et de $l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} Y'$. Pour $n = 1, 2, \ldots$ notons $P_n = \sum_{k=1}^n p_k$ et $Q_n = \sum_{k=1}^n q_k$.

Supposons que Y ne contienne aucun sous-espace isomorphe à l_q. Alors, d'après le Lemme 2, il existe une suite strictement croissante d'entiers $n_0 < n_1 < \ldots$, une suite (u_i) de $l_p \hat{\otimes} Y$ vérifiant (1) et deux réels $0 < \lambda \leqq \mu$ tels que pour tout entier k et toute famille $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de scalaires

$$\lambda \|(a_i)_{1\leqq i\leqq k}\|_q \leqq \left\| \sum_{i=1}^k a_i u_i \right\|_\pi \leqq \mu \|(a_i)_{1\leqq i\leqq k}\|_q. \tag{7}$$

Rappelons que $l_p \hat{\otimes} Y$ s'identifie canoniquement à un sous-espace de $(l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} Y')'$ (cf. [1] ou [11]). On vérifie facilement que

$$u(q_k x) = (p_k u)x, \qquad x \in l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} Y',\ u \in l_p \hat{\otimes} Y,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Fixons $0 < \gamma < \lambda$; puisque, d'après (7), $\|u_i\|_\pi \geqq \lambda$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$ et

$$\|u_i\|_\pi = \sup\{u_i(x) : x \in l_{p'} \otimes_\varepsilon Y',\ \|x\|_\varepsilon \leqq 1\},$$

nous pouvons choisir une suite (x_i) de $l_{p'} \otimes_\varepsilon Y'$ vérifiant

$$\|x_i\|_\varepsilon \leqq 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

$$u_i(x_i) \geqq \gamma, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

et quitte à remplacer x_i par $(Q_{n_i} - Q_{n_{i-1}})x_i$ nous pouvons supposer que

$$x_i = (Q_{n_i} - Q_{n_{i-1}})x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

car alors (9) se vérifie par (6) et (10) par (8) et (1). De (1), (11) et (8) découle facilement

$$i \neq j \Rightarrow u_i(x_j) = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Soient maintenant n un entier et $t_1, t_2, \ldots, t_n$ une famille de scalaires. En utilisant (12), (7) et (10) nous obtenons que

$$\left\| \sum_{j=1}^n t_j x_j \right\|_\varepsilon \geqq \sup\left\{ \left| u\left(\sum_{j=1}^n t_j x_j \right) \right| : u = \sum_{i=1}^n a_i u_i,\ \|u\|_\pi \leqq 1 \right\} \tag{13}$$

$$\geqq \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} a_j t_j u_j(x_j)\right| : \|(a_i)_{1\leqq i\leqq n}\|_q \leqq \frac{1}{\mu}\right\}$$

$$= \frac{1}{\mu}\|(t_j u_j(x_j))_{1\leqq j\leqq n}\|_q \geqq \frac{\gamma}{\mu}\|(t_j)_{1\leqq j\leqq n}\|_{q'} .$$

D'autre part, en utilisant (11) et (5) nous obtenons que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right\|_\varepsilon = \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} \varphi(i_k q_k t_j x_j) e_k\right\|_{p'} : \varphi \in Y'', \|\varphi\| \leqq 1\right\}$$

$$\leqq \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} |t_j|^{p'} (\|x_j\|_\varepsilon)^{p'}\right)^{1/p'} & \text{si } p' < \infty , \\ \max_{1\leqq j\leqq n} (|t_j|\,\|x_j\|_\varepsilon) & \text{si } p' = \infty , \end{cases}$$

donc, d'après (9),

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right\|_\varepsilon \leqq \|(t_j)_{1\leqq j\leqq n}\|_{p'}$$

ce qui donne avec (13)

$$\gamma\|(t_j)_{1\leqq j\leqq n}\|_{q'} \leqq \mu\|(t_j)_{1\leqq j\leqq n}\|_{p'} ,$$

d'où une contradiction puisque $q' < p'$.

3. Sous-espaces de $l_p \hat{\otimes} l_r$.

LEMME 3. *Soient* $1 \leqq p, r \leqq \infty$. *Alors* $l_p \hat{\otimes} l_r$ *est canoniquement isométriquement isomorphe à un sous-espace de* $(l_{p'} \check{\otimes} l_{r'})'$.

D'après [11] $l_p \hat{\otimes} l_r$ est canoniquement isométriquement isomorphe à un sous-espace de $(l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} (l_r)')'$, d'où le résultat pour $r \neq 1$. Pour $r = 1$ remarquons que $l_p \hat{\otimes} l_1$ s'identifie canoniquement à un sous-espace de $(l_{p'})' \hat{\otimes} l_1$ qui est canoniquement isométriquement isomorphe à $(l_{p'} \check{\otimes} c_0)'$ (cf. [1]).

Soit (p_k) la décomposition de Schauder pour $l_p \hat{\otimes} l_r$ qui correspond à la décomposition de Schauder naturelle de l_p; alors $\operatorname{Im} p_k$, $k = 1, 2, \ldots$, est isomorphe à l_r. Par l'isométrie naturelle entre $l_p \hat{\otimes} l_r$ et $l_r \hat{\otimes} l_p$ nous avons une décomposition de Schauder (r_k) de $l_p \hat{\otimes} l_r$ qui correspond à la décomposition de Schauder naturelle de l_r; alors $\operatorname{Im} r_k$, $k = 1, 2, \ldots$, est isomorphe à l_p. Notons respectivement (e_m) et (ε_m) les bases canoniques de l_p et l_r; alors pour

$$z = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{im} e_m\right) \otimes \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_{im} \varepsilon_m\right) \in l_p \otimes l_r$$

nous avons

$$p_k z = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_k \otimes \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_{im} \varepsilon_m \right), \qquad k = 1, 2, \ldots ,$$

$$r_l z = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{im} e_m \right) \otimes b_{il} \varepsilon_l, \qquad l = 1, 2, \ldots ,$$

d'où

$$p_k \circ r_l = r_l \circ p_k, \qquad k, l = 1, 2, \ldots . \tag{14}$$

Avec les notations $P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$ et $R_n = \sum_{k=1}^{n} r_k$, $n = 1, 2, \ldots$, nous avons le principal

LEMME 4. *Soient (n_i) et (m_i) deux suites strictement croissantes d'entiers et (u_i) une suite normalisée de $l_p \hat{\otimes} l_r$, $1 \leqq p, r \leqq \infty$, telles que*

$$u_i = (P_{n_i} - P_{n_{i-1}}) u_i = (R_{m_i} - R_{m_{i-1}}) u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots . \tag{15}$$

Alors le sous-espace fermé $[u_i]_{i \geqq 1}$ de $l_p \hat{\otimes} l_r$ engendré par $u_1, u_2, \ldots$ est complémenté dans $l_p \hat{\otimes} l_r$ et isomorphe à l_q où $q = 1$ si $p \leqq r'$ et $1/q = 1/p + 1/r$ (avec $1/\infty = 0$) si $p > r'$.

Remarquons que (u_i) est une suite-base inconditionnelle de $l_p \hat{\otimes} l_r$ car

$$u_i = (P_{n_i} - P_{n_{i-1}}) u_i \neq 0$$

et la décomposition (p_k) de $l_p \hat{\otimes} l_r$ est inconditionnelle.

Soient (q_k) et (s_k) les décompositions de Schauder de $l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'}$ définies respectivement de la même façon que (p_k) et (r_k) pour $l_p \hat{\otimes} l_r$. Par analogie à (14) nous avons

$$q_k \circ s_l = s_l \circ q_k, \qquad k, l = 1, 2, \ldots . \tag{16}$$

En identifiant canoniquement $l_p \hat{\otimes} l_r$ à un sous-espace de $(l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'})'$ (cf. Lemme 3) nous avons pour $u \in l_p \hat{\otimes} l_r$, $x \in l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'}$ et $k = 1, 2, \ldots$

$$(p_k u) x = u(q_k x), \qquad (r_k u) x = u(s_k x) . \tag{17}$$

Notons $Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} s_k$, $n = 1, 2, \ldots$. Comme dans la démonstration du Théorème 3, nous pouvons trouver une suite (x_i) de $l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'}$ vérifiant (9) et (10) (avec $0 < \gamma < 1$). Quitte à remplacer x_i par

$$(Q_{n_i} - Q_{n_{i-1}})(S_{m_i} - S_{m_{i-1}}) x_i = (S_{m_i} - S_{m_{i-1}})(Q_{n_i} - Q_{n_{i-1}}) x_i$$

(cf. (16)) nous pouvons supposer que

$$x_i = (Q_{n_i} - Q_{n_{i-1}}) x_i = (S_{m_i} - S_{m_{i-1}}) x_i, \qquad i = 1, 2, \ldots , \tag{18}$$

car alors (9) se vérifie par (6) et (10) par (17) et (15). De (15), (18) et (17) découle facilement (12). D'après (9) et (10) nous pouvons supposer la suite (x_i) normalisée et vérifiant (10).

Il est établi dans [11] (cf. la démonstration du Théorème du 5) qu'une suite normalisée (x_i) de $l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'}$ vérifiant (18) est isométriquement équivalente à la base canonique de $l_{q'}$ (il est élémentaire de vérifier que Q_n et S_n s'identifient par l'isométrie de $l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'}$ dans $sl_{r'}(l_{p'})$ de [11] respectivement à $\tilde{Q}_n$ et à P_n de [11]).

En reprenant la démonstration du Lemme de [12] et utilisant (15), (17), (18), (10), $\|u_i\|=1$, $i=1,2,\ldots$, et (12) nous pouvons montrer que l'application P: $l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'} \to l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'}$ définie par

$$Px = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x)x_j, \qquad \text{où} \qquad \varphi_j = \frac{u_j}{u_j(x_j)},$$

est une projection continue de $l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'}$ sur $[x_i]_{i \geqq 1}$.

Donc P' est une projection continue de $(l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'})'$ avec $\operatorname{Im} P'$ isomorphe à $(l_{q'})'$.

Pour $i=1,2,\ldots$ et $x \in l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'}$ en utilisant (12) nous avons

$$(P'u_i)x = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x)u_i(x_j) = u_i(x)\,,$$

d'où

$$[u_i]_{i \geqq 1} \subset \operatorname{Im} P'\,. \tag{19}$$

Notons que les sous-espaces fermés engendrés par $u_1, u_2, \ldots$ dans $l_p \hat{\otimes} l_r$ et $(l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'})'$ coïncident puisque $l_p \hat{\otimes} l_r$ est fermé dans $(l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'})'$.

Nous allons considérer deux éventualités:

1) $p=r=\infty$ et

2) $p \neq \infty$ ou $r \neq \infty$.

1) Dans ce cas $q=\infty$, $q'=1$ et

$$\|Px\|_\varepsilon = \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x)|, \qquad x \in l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'} = l_1 \hat{\hat{\otimes}} l_1\,.$$

Comme (u_i) est une suite-base normalisée, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier n et toute famille $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de scalaires

$$\alpha \max_{1 \leqq i \leqq n} |a_i| \leqq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \right\|_\pi .$$

D'autre part, pour tout $x \in l_1 \hat{\hat{\otimes}} l_1$ nous avons en utilisant (19) et (12)

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right)(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x) u_i(x_i)\right| \leqq \max_{1 \leqq i \leqq n} |a_i| \sum_{i=1}^{n} |\varphi_i(x)|$$

$$\leqq \max_{1 \leqq i \leqq n} |a_i| \, \|Px\|_\varepsilon \leqq \|P\| \max_{1 \leqq i \leqq n} |a_i| \, \|x\|_\varepsilon ,$$

d'où

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right\|_\pi \leqq \|P\| \max_{1 \leqq i \leqq n} |a_i| .$$

Par conséquent le sous-espace $[u_i]_{i \geqq 1}$ de $c_0 \hat{\otimes} c_0$ est isomorphe à c_0. Il est complémenté dans $c_0 \hat{\otimes} c_0$ puisque $c_0 \hat{\otimes} c_0$ est séparable.

2) Dans ce cas $q \neq \infty$, $q' \neq 1$, $(l_{q'})' = l_q$ et $\operatorname{Im} P'$ est donc isomorphe à l_q. Il suffit de démontrer que $[u_i]_{i \geqq 1} = \operatorname{Im} P'$ car alors la restriction de P' sur $l_p \hat{\otimes} l_r$ est une projection continue de $l_p \hat{\otimes} l_r$ sur $[u_i]_{i \geqq 1}$. Pour cela il nous reste à montrer que $\operatorname{Im} P' \subset [u_i]_{i \geqq 1}$. Remarquons que la suite-base (u_i) de $l_p \hat{\otimes} l_r$ est « boundedly complete » puisqu'elle est inconditionnelle et $[u_i]_{i \geqq 1}$, étant isomorphe à un sous-espace de l_q, ne contient aucun sous-espace isomorphe à c_0.

Fixons $u = P'u \in (l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'})'$. Pour tout $x \in l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'}$ nous avons

$$u(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{u(x_j)}{u_j(x_j)} u_j\right)(x) = \lim_{n \to \infty} v_n(x)$$

ce qui montre que la suite (v_n) est bornée dans $(l_{p'} \hat{\hat{\otimes}} l_{r'})'$ et donc aussi dans $l_p \hat{\otimes} l_r$. La suite-base (u_i) étant « boundedly complete », la suite (v_n) converge dans $l_p \hat{\otimes} l_r$ et par conséquent sa limite $u \in [u_i]_{i \geqq 1}$ ce qui achève la démonstration.

Théorème 4. *Soient* $1 \leqq p, q, r \leqq \infty$. *Si le produit tensoriel* $l_p \hat{\otimes} l_r$ *contient un sous-espace isomorphe à* l_q *alors* $q = p$ *ou* $q = r$ *ou* $q = s$ *où* $s = 1$ *si* $p \leqq r'$ *et* $1/s = 1/p + 1/r$ (*avec* $1/\infty = 0$) *si* $p > r'$.

Conservons les notation du Lemme 4. Supposons que l_q soit isomorphe à un sous-espace de $l_p \hat{\otimes} l_r$ et que $q \neq p$ et $q \neq r$. Comme $q \neq r$, d'après le Lemme 2, il existe une suite-base (z_i) de $l_p \hat{\otimes} l_r$ équivalente à la base canonique de l_q et une suite strictement croissante d'entiers $n_0 < n_1 < \ldots$ telles que

$$z_i = (P_{n_i} - P_{n_{i-1}}) z_i, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Comme $q \neq p$, d'après le Lemme 2 et la Remarque au Lemme 2, il existe une suite-base bloc normalisée (y_i) de (z_i) et une suite strictement croissante d'entiers $M_0 < M_1 < \ldots$ telles que la suite

$$u_i = (R_{M_i} - R_{M_{i-1}}) y_i$$

est équivalente à la base canonique de l_q. Soit la suite (y_i) de la forme

$$y_i = \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} \lambda_j z_j;$$

notons $N_i = n_{p_i}$. Alors

$$(P_{N_i} - P_{N_{i-1}})y_i = \sum_{j=p_{i-1}+1}^{p_i} \lambda_j (P_{N_i} - P_{N_{i-1}})(P_{n_j} - P_{n_{j-1}})z_j = y_i$$

et donc, en utilisant (14),

$$(P_{N_i} - P_{N_{i-1}})u_i = (R_{M_i} - R_{M_{i-1}})(P_{N_i} - P_{N_{i-1}})y_i = u_i \, .$$

En définitive, nous avons trouvé une suite (u_i) de $l_p \hat{\otimes} l_r$ équivalente à la base canonique de l_q et vérifiant (15). Nous concluons en utilisant le Lemme 4.

Par la méthode de la démonstration du Théorème de [12] du Lemme 4 découle le

THÉORÈME 5. *Soit X un sous-espace fermé de dimension infinie de $l_p \hat{\otimes} l_r$. Alors X contient un sous-espace complémenté dans $l_p \hat{\otimes} l_r$ isomorphe à l_q avec $q = p$ ou $q = r$ ou $q = s$ où $s = 1$ si $p \leqq r'$ et $1/s = 1/p + 1/r$ (avec $1/\infty = 0$) si $p > r'$.*

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).
2. S. Heinrich, *The weak sequential completeness of Banach operator ideals*, Sibirsk. Mat. Ž. 17 (1976), 1160–1167 (Russian). (English translation: Siberian Math. J. 17 (1976), 857–862.)
3. J. R. Holub, *Hilbertian operators and reflexive tensor products*, Pacific J. Math. 36 (1971), 185–194.
4. N. J. Kalton, *Schauder decompositions in locally convex spaces*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 68 (1970), 377–392.
5. N. J. Kalton, *Spaces of compact operators*, Math. Ann. 208 (1974), 267–278.
6. D. R. Lewis, *Conditional weak compactness in certain inductive tensor products*, Math. Ann. 201 (1973), 201–209.
7. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces* I (Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete 92), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1977.
8. E. Oja, *Unconditional Schauder decompositions in locally convex spaces*, (Russian. Estonian and English summaries) Tartu Riikl. Ül. Toimetised 374 (1975), 90–116.
9. E. Oja, *Unconditional Schauder decompositions, and semi-reflexive spaces*, (Russian. Estonian and English summaries) Tartu Riikl. Ül. Toimetised 431 (1977), 82–97.
10. W. H. Ruckle, *The infinite sum of closed subspaces of an F-space*, Duke Math. J. 31 (1964), 543–554.

11. C. Samuel, *Sur la reproductibilité des espaces l_p*, Math. Scand. 45 (1979), 103–117.
12. C. Samuel, *Sur les sous-espaces de $l_p \hat{\hat{\otimes}} l_q$*, Math. Scand. 47 (1980), 247–250.
13. B. L. Sanders, *Decompositions and reflexivity in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 204–208.

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE TARTU
46, VANEMUISE
202400 TARTU
URSS

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE-INFORMATIQUE
FACULTÉ DES SCIENCES DE LUMINY
70, ROUTE LÉON-LACHAMP
13288 MARSEILLE CEDEX 9
FRANCE