MATH. SCAND. 53 (1983), 281-301

SYMÉTRISATION DANS L'ESPACE DE GAUSS

ANTOINE EHRHARD

Introduction.

En 1975, Christer Borell démontre une inégalité isopérimétrique dans les espaces de Gauss (en dimension infinie) [8] à partir des inégalités de E. Schmidt [26] et du « lemme de Poincaré » ([21], [15]). Cependant, alors que les propriétés extrémales des demi-espaces pour la mesure de Gauss, déjà mises en évidence par H. J. Landau et L. A. Shepp en 1971 [20], apparaissaient clairement, aucune méthode ne permettait de démontrer directement de telles inégalités.

Les inégalités isopérimétriques ont préoccupé les géomètres depuis fort longtemps: certains résultats sont déjà mentionnés par Archimède. Les approches modernes sont de deux types essentiellement. La méthode analytique, qui traite le problème d'isopérimétrie par le « calcul des variations », a été utilisée pour la première fois par Jacques et Jean Bernoulli (In Acta eruditorum Mai 1697), puis généralisée par Léonard Euler en 1744 dans « Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti » et par Joseph-Louis Lagrange en 1762 (Misc. Soc. Taur.). La méthode géométrique qui nous intéresse est la symétrisation de Steiner. Elle a été introduite par Jakob Steiner en 1836 pour montrer les propriétés extrémales des cercles et des disques dans les problèmes classiques d'isopérimétrie. Felix Bernstein a obtenu en 1904 l'inégalité isopérimétrique sur la sphère euclidienne par une méthode similaire (Math. Ann. 60 (1905), 117–136). Enfin Erhard Schmidt a généralisé ces raisonnements aux espaces sphériques et hyperboliques de dimension quelconque en 1948.

Notre but ici, est de montrer que les ideées de J. Steiner (c.f. W. Blaschke [3]) s'appliquent dans l'espace de Gauss et permettent de démontrer de manière élémentaire et d'interpréter géométriquement l'inégalité isopérimétrique de Borell. A cet effet, nous introduisons une « symétrisation » adaptée à la situation gaussienne. Remarquons de plus que, suivant l'interprétation de Schwarz (cf. [2], [22], [3], [13]) la symétrisation de Steiner est une représentation géométrique des réarrangements équimesurables des fonctions

Reçu le 23. juin, 1982; révisé le 18. novembre 1982.

pour la mesure de Lebesgue. Cette observation donne lieu à d'élégants énoncés comme le théorème de H. A. Schwarz, H. Brunn et H. Minkowski: nous prouvons un théorème du même type pour la mesure de Gauss.

Cet article est divisé en quatre parties. Aprés avoir introduit nos notations et rappelé quelques résultats classiques, nous consacrons le paragraphe 1 à la définition des symétrisations gaussiennes et à l'étude de leurs propriétés de base. Dans le paragraphe 2 nous démontrons l'inégalité isopérimétrique de Borell (cf. [8] pour la généralisation en dimension infinie). Le paragraphe 3 est l'extension du théorème de Schwarz–Brunn–Minkowski à l'espace de Gauss. Au paragraphe 4 nous donnons quelques applications du 3 dont une à l'équation de la diffusion.

0. Notations et rappels.

Pour tout couple (A, B) de sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, nous posons:

$$A+B = \{x+y \; ; \; x \in A, \; y \in B\} \quad \text{et} \quad \lambda A = \{\lambda x \; ; \; x \in A\} .$$

Pour tout $r>0$ nous notons $B_n(0,r)$ la boule euclidienne fermée de centre 0 et de rayon r dans $\mathbf{R}^n$ et $S_{n-1}(0,r)$ sa frontière.

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbf{R}^n$ et pour tout nombre $r>0$ nous désignons par A_r l'ensemble défini par:

$$A_r = A + B_n(0,r) .$$

Le produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$ étant noté $\langle \cdot , \cdot \rangle$, pour tout u dans $S_{n-1}(0,1)$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, nous désignerons par $H(u,\lambda)$ le demi-espace ouvert de $\mathbf{R}^n$ défini par:

$$H(u,\lambda) = \{x \in \mathbf{R}^n \; ; \; \langle x, u \rangle > \lambda\} .$$

Si E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^n$ tels que $E \subseteqq F$ nous notons $E_F^\perp$ le supplémentaire orthogonal de E dans F, et nous posons pour simplifier: $E^\perp = E_{\mathbf{R}^n}^\perp$.

Nous notons $\mathcal{O}$, respectivement $\mathcal{F}$, respectivement $\mathcal{K}$, l'ensemble des parties ouvertes, respectivement fermées, respectivement compactes (non vides), de $\mathbf{R}^n$. Nous munissons $\mathcal{K}$ de la distance de Hausdorff, notée d_H, définie pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{K}$ par:

$$d_H(A,B) = \inf\{r>0 \; ; \; A_r \supseteqq B, \; B_r \supseteqq A\} ,$$

et pour laquelle $(\mathcal{K}, d_H)$ est un espace métrique complet. Si $\{A_j ; j \in \mathbf{N}\}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{K}$, nous notons

$$\lim_{j\to\infty} A_j = A \,,$$

si et seulement si

$$A \in \mathscr{K} \quad \text{et} \quad \lim_{j\to\infty} d_H(A_j, A) = 0 \,.$$

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux parties non vides de $\mathscr{P}(\mathsf{R}^n)$; une application $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est appelée transformation d'ensembles de domaine $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathscr{A}$ et d'image $\mathrm{Im}\,(f) \subseteq \mathscr{B}$. La transformation d'ensembles $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est dite monotone si pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathscr{A}$ tel que $A \subseteq B$, on a: $f(A) \subseteq f(B)$. Nous dirons que $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est ouverte, respectivement fermée, si pour tout A ouvert, respectivement fermé, dans $\mathscr{A}$ l'ensemble $f(A)$ est ouvert, respectivement fermé. Soit $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ une transformation d'ensembles; f est dire intérieurement continue si pour toute suite croissante d'ouverts $\{G_j;\, j \in \mathsf{N}\}$ dans $\mathscr{A}$ telle que $\bigcup G_j \in \mathscr{A}$, on a: $f(\bigcup G_j) = \bigcup f(G_j)$; f est dire extérieurement continue si pour toute suite décroissante de fermés $\{F_j;\, j \in \mathsf{N}\}$ dans $\mathscr{A}$ telle que $\bigcap F_j \in \mathscr{A}$, on a: $\bigcap f(F_j) = f(\bigcap F_j)$.

Une transformation $f\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ est dite régularisante si, pour tout fermé F de $\mathscr{A}$ et pour tout $r > 0$ tel que $F_r \in \mathscr{A}$, on a:

$$f(F_r) \supseteq f(F)_r \,.$$

Les résultats suivants sont utiles (cf. [24])

0.1. Proposition. *Soit $f\colon \mathscr{O} \cup \mathscr{F} \to \mathscr{P}(\mathsf{R}^n)$ une transformation d'ensembles montone, intérieurement continue; si f est régularisante, alors f est ouverte.*

0.2. Proposition. *Soit $\{f_j;\, j \in \mathsf{N}\}$ une suite de transformations d'ensembles, de domaine $\mathscr{A}$ contenant $\mathscr{O} \cup \mathscr{F}$, telle que pour tout $j \geqq 1$, f_j soit fermée et régularisante; si pour tout fermé F dans R^n il existe un nombre R_0 tel que:*

$$\forall\, R > R_0, \quad \lim_{j\to\infty} f_j(F) \cap B_n(0, R) = f_0(F) \cap B_n(0, R) \,,$$

alors f_0 est régularisante.

Nous notons γ_n la mesure canonique de Gauss sur $(\mathsf{R}^n, \mathscr{B}(\mathsf{R}^n))$ elle a pour densité:

$$\gamma_n(dx) = [\exp\,(-\tfrac{1}{2}\langle x, x\rangle)]\, dx/(2\pi)^{n/2} \,.$$

Plus généralement, tout sous-espace affine L de dimension k dans R^n porte une mesure gaussienne canonique γ_k dont la moyenne est la projection orthogonale de l'origine sur L (cf. [11]).

Nous notons Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi $\mathscr{N}(0, 1)$, Φ est donnée par:

$$\forall t,\ -\infty \leqq t \leqq +\infty, \qquad \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\tfrac{1}{2}u^2\right) du/\sqrt{2\pi}\ .$$

1. Symétrisation, construction et premières propriétés.

Soit T un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, de dimension $n-k$ $(1 \leqq k \leqq n)$, soit u un élément de $S_{n-1}(0,1)$ orthogonal à T; nous notons $S = S(T,u)$ l'application qui à tout ouvert (respectivement fermé) A de $\mathbf{R}^n$ associe le sous-ensemble mesurable $A' = S(A)$ de $\mathbf{R}^n$ qui satisfait aux conditions suivantes:

Pour tout $x \in T$, l'ensemble $A' \cap (x + T^\perp)$ est

(i) $\emptyset$, si $\gamma_k(A \cap (x+T^\perp)) = 0$;

(ii) $x + T^\perp$, si $\gamma_k(A \cap (x+T^\perp)) = 1$,

(iii) $H(u,a) \cap (x+T^\perp)$ (respectivement $\overline{H(u,a)} \cap (x+T^\perp)$), si $\gamma_k(A \cap (x+T^\perp)) \in]0,1[$, où $a = a(x,A)$ est le nombre réel solution de l'equation:

$$\gamma_k(H(u,a) \cap (x+T^\perp)) = \gamma_k(A \cap (x+T^\perp))\ .$$

1.1. Definition. Nous appelons k-symétrisation gaussienne suivant T dans la direction orthogonale u, l'application $S(T,u)$.

La proposition suivante rassemble les propriétés de stabilité des symétrisations qui résultent immédiatement de leur définition. Ces propriétés sont tout à fait analogues à celles des symétrisations classiques, on pourra les comparer à celles qui sont énoncées dans [17], [22] et [3] (cf. aussi [10]).

1.2. Proposition.

(1.2.1) *Pour toute* k-symétrisation $S(T,u)$ *dans* $\mathbf{R}^n$ *et pour tout* $A \in \mathcal{O} \cup \mathcal{F}$, *on a*:

$$S(T,u)[\complement_{\mathbf{R}^n} A] = \complement_{\mathbf{R}^n} S(T,-u)[A]\ .$$

(1.2.2) *Toute* k-symétrisation *est monotone.*

(1.2.3) *Toute* k-symétrisation *est intérieurement et extérieurement continue.*

(1.2.4) *Pour toute* k-symétrisation S *dans* $\mathbf{R}^n$ *et pour tout fermé* F *de* $\mathbf{R}^n$, *on a*:

$$\gamma_n(S[F]) = \gamma_n(F)\ .$$

Afin de pouvoir composer entre elles nos symétrisations, il nous faut prouver la proposition suivante.

1.3. PROPOSITION.

(1.3.1) *Pour tout borélien* $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R})$ *et pour tout* $r>0$, *on a*:

$$\Phi^{-1} \circ \gamma_1(A_r) \geqq \Phi^{-1} \circ \gamma_1(A)+r .$$

(1.3.2) *Toute* 1-symétrisation *dans* $\mathbf{R}^n$ *est régularisante et par suite, ouverte et fermée.*

REMARQUE: L'affirmation (1.3.1) de la proposition précédente n'est autre que l'inégalité de Borell dans $\mathbf{R}$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.3. Désignons par S_+ et S_- les deux symétrisations dans $\mathbf{R}$: $S_+ = S(\{0\}, 1)$ et $S_- = S(\{0\}, -1)$.

Pour tout fermé F dans $\mathbf{R}$ on a:

$$S_+[F] = [-\Phi^{-1}(\gamma_1(F)), +\infty[\quad \text{et}$$

$$S_-[F] =]-\infty, \Phi^{-1}(\gamma_1(F))] .$$

Par conséquent, l'inégalité (1.3.1) appliquée à F s'écrit:

$$S_-[F_r] \supseteqq S_-[F]_r \quad \text{et} \quad S_+[F_r] \supseteqq S_+[F]_r .$$

Pour démontrer 1.3.1, il suffit de prouver l'une des inclusions précédentes lorsque A est une réunion finie d'intervalles. Nous procédons par récurrence. Dans le cas d'un intervalle, 1.3.1 résulte d'un calcul facile. Supposons que 1.3.1 soit vrai lorsque A est une réunion de m intervalles. Soient $(I_1, \ldots, I_{m+1})$ une famille de $m+1$ intervalles fermés et disjoints dans $\mathbf{R}$, tels que:

$$\forall j,\ 1 \leqq j \leqq m, \quad I_j + \mathbf{R}_+ \supseteqq I_{j+1} .$$

Il suffit de démontrer 1.3.1 pour tout $r>0$ tel que:

$$\forall k,\ \forall j \neq k, \quad (I_j)_r \cap (I_k)_r = \varnothing ,$$

ce que nous supposons.

Sous ces hypothèses et en posant $J = I_2 \cup \ldots \cup I_m$, on a:

$$S_-[\cup I_j] = S_-[S_-[I_1] \cup J \cup S_+[I_{m+1}]], \quad \text{et} \tag{1.3.3}$$

$$S_-[\cup (I_j)_r] = S_-[S_-[(I_1)_r] \cup J_r \cup S_+[(I_{m+1})_r]] .$$

L'étude du cas d'un intervalle fournit les inclusions:

$$S_-[(I_1)_r] \supseteqq S_-[I_1]_r \quad \text{et} \quad S_+[(I_{m+1})_r] \supseteqq S_+[I_{m+1}]_r ,$$

la monotonie de S_- implique ensuite l'inclusion:

$$S_-[\bigcup (I_j)_r] \supseteqq S_-[S_-[I_1]_r \cup J_r \cup S_+[I_{m+1}]_r] . \tag{1.3.4}$$

Posons $F = S_-[I_1]_r \cup J_r \cup S_+[I_{m+1}]_r$. Le complémentaire de F est une réunion de m intervalles et on a:

$$(\complement_{\mathbf{R}} F)_r = \complement_{\mathbf{R}} (S_-[I_1] \cup J \cup S_+[I_{m+1}]) .$$

D' où l'on déduit par l'hypothèse de récurrence que:

$$S_+[(\complement_{\mathbf{R}} F)_r] \supseteqq S_+[\complement_{\mathbf{R}} F]_r .$$

Ce qui grâce à (1.2.1), s'écrit aussi:

$$S_-[S_-[I_1]_r \cup (I_2)_r \cup \ldots \cup (I_m)_r \cup S_+[I_{m+1}]_r]$$
$$\supseteqq S_-[S_-[I_1] \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m \cup S_+[I_{m+1}]]_r .$$

Avec (1.3.3) et (1.3.4) on a donc:

$$S_-\left[\bigcup_{j=1}^{m+1} (I_j)_r\right] \supseteqq S_-\left[\bigcup_{j=1}^{m+1} I_j\right]_r .$$

Ce qui prouve 1.3.1 pour toute réunion de $m+1$ intervalles, et achève la démonstration de la première affirmation de la proposition.

Grâce à la proposition 0.1 et à (1.2.1), il suffit pour montrer (1.3.2) de prouver que dans $\mathbf{R}^n$ toute 1-symétrisation est régularisante. Soit $S = S(T, u)$, avec $T = (\mathbf{R}u)^\perp$, une 1-symétrisation dans $\mathbf{R}^n$; pour tout $x \in T$ nous posons $L_x = x + \mathbf{R}u$. Pour tout fermé F de $\mathbf{R}^n$ et pour tout $r > 0$ on a:

$$S[F]_r = \bigcup_{x \in T} S[F \cap L_x]_r .$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $x \in T$, on a:

$$S[F \cap L_x]_r \subseteqq S[(F \cap L_x)_r] .$$

Or pour tout $y \in T$, on a l'égalité:

$$S[F \cap L_x]_r \cap L_y = S[F \cap L_x] + (B_n(0, r) \cap L_{y-x}) ,$$

et comme $B_n(0, r) \cap L_{y-x}$ est un segment symétrique (éventuellement vide) dans l'espace affine de dimension 1, L_{y-x}, on déduit de 1.3.1 l'inclusion:

$$S[F \cap L_x] + (B_n(0, r) \cap L_{y-x}) \subseteqq S[(F \cap L_x) + (B_n(0, r) \cap L_{y-x})]$$
$$= S[(F \cap L_x)_r \cap L_y] .$$

Pour tout $y \in T$, on a montré l'inclusion:

$$S[F \cap L_x]_r \cap L_y \subseteqq S[(F \cap L_x)_r] \cap L_y ,$$

cela prouve (1.3.2.) et achève la démonstration de la Proposition 1.3.

La Proposition 1.3 nous permet de composer les 1-symétrisations puisqu'elles sont ouvertes et fermées. Nous allons voir dans l'exemple suivant qu'elle permet aussi d'approcher toute 2-symétrisation par une succession de 1-symétrisations.

1.4. EXEMPLE. Dans $\mathbf{R}^2$ nous désignons par $\{u_j;\, j \in \mathbf{N}\}$ la suite de vecteurs unitaires qui vérifie les conditions suivantes:

$$u_0 = (0,1),\ u_1 = (1,0) \text{ et pour tout } j \geqq 2,$$
$$\langle u_j, u_{j-1} + u_0 \rangle = 0 \text{ avec } \langle u_j, u_0 \rangle < 0 .$$

Nous posons de plus $v_j = u_{j-1} + u_0$ pour tout $j \geqq 1$. Nous notons g_j la 1-symétrisation de direction u_j dans $\mathbf{R}^2$, et posons pour tout $j \in \mathbf{N}$: $f_j = g_j \circ \ldots \circ g_0$.

Nous allons montrer la

1.5. PROPOSITION. *Pour tout fermé F de $\mathbf{R}^2$, pour tout $j \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in f_j(F)$, on a l'inclusion*:

$$x + \mathbf{R}_+ u_0 + \mathbf{R}_+ u_j \subseteqq f_j(F) . \tag{1.5.1}$$

La proposition 1.5. est une conséquence directe de l'inégalité de Borell dans $\mathbf{R}$ (Proposition 1.3, 1.3.1), elle en est une interprétation géométrique.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.5. Nous démontrons la Proposition 1.5. par récurrence. Le cas $j=0$ résulte de la définition d'une 1-symétrisation. Remarquons que pour prouver (1.5.1), il suffit de montrer que pour tout F fermé dans $\mathbf{R}^2$ et pour tout $j \in \mathbf{N}$ on a:

$$f_j(F) + \mathbf{R}_+ u_0 \subseteqq f_j(F) , \tag{1.5.2}$$

car on a par définition de f_j: $f_j(F) + \mathbf{R}_+ u_j = f_j(F)$. Supposons que (1.5.2) soit vérifié pour un j fixé, $j \in \mathbf{N}$; pour tout $a \in \mathbf{R}$ et pour tout $r > 0$ on a donc:

$$f_j(F) \cap (a v_{j+1} + \mathbf{R} u_{j+1}) + r\{\lambda u_0 + (1-\lambda) u_j;\ \lambda \in [0,1]\} \subseteqq f_j(F) . \tag{1.5.3}$$

Comme l'ensemble

$$A(j,r) \overset{\text{déf}}{=} r\{\lambda u_0 + (1-\lambda) u_{j+1};\ \lambda \in [0,1]\}$$

est de la forme:

$$A(j,r) = \alpha v_{j+1} + [-\beta, \beta] u_{j+1}, \qquad \text{avec } \alpha > 0,\ \beta > 0\,,$$

et que u_{j+1} est orthogonal à v_{j+1}, en appliquant la 1-symétrisation g_{j+1} au deux membres de (1.5.3) nous obtenons grâce à (1.3.1):

$$f_{j+1}(F) \cap (av_{j+1} + \mathbf{R}u_{j+1}) + A(j,r) \subseteqq f_{j+1}(F)\,.$$

En faisant varier a et r on en déduit:

$$f_{j+1}(F) + \mathbf{R}_+ u_0 + \mathbf{R}_+ u_{j+1} \subseteqq f_{j+1}(F)$$

et la Proposition 1.5 est démontrée.

L'affirmation (1.5.1) est essentielle pour la suite. Elle fournit le théorème suivant:

1.6. Théorème. *Soient* $\{f_j; j \in \mathbf{N}\}$ *la suite de transformations d'ensembles définie dans l'Exemple* 1.4 *et* f *la* 2*-symétrisation* $f = S(\{0\}, u_1)$ *dans* $\mathbf{R}^2$; *pour tout* $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, *il existe un nombre réel* $R(\varepsilon)$ *tel que pour tout fermé* F *de* $\mathbf{R}^2$ *vérifiant* $\gamma_2(F) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ *et pour tout* $R > R(\varepsilon)$, *on ait*:

$$\lim_{j\to\infty} f_j(F) \cap B_2(0,R) = f(F) \cap B_2(0,R)\,.$$

De plus la convergence est uniforme sur $\{F \in \mathscr{F};\ \gamma_2(F) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]\}$.

Démonstration du Théorème 1.6. Le nombre ε étant fixé comme cidessus, choisissons R assez grand pour que: $\gamma_2(B_2(0,R)) > 1-\varepsilon$, de sorte que pour tout borélien A tel que $\gamma_2(A) \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, on ait:

$$A \cap B_2(0,R) \neq \varnothing \qquad \text{et} \qquad (\complement_{\mathbf{R}^2} A) \cap B_2(0,R) \neq \varnothing\,.$$

De ce fait et grâce à (1.2.4), pour tout fermé F vérifiant les hypothèses du Théorème 1.6 et pour tout $j \in \mathbf{N}$, il existe (x', x'') dans $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ tel que:

$$x' \in f_j(F) \cap B_2(0,R) \qquad \text{et} \qquad x'' \in (\complement_{\mathbf{R}^2} f_j(F)) \cap B_2(0,R)\,.$$

Comme $B_2(0,R)$ est connexe par arcs, on en déduit qu'il existe $x_j \in B_2(0,R) \cap \partial f_j(F)$. La Proposition 1.5 (1.5.1) fournit alors les inclusons:

$$(x_j + \mathbf{R}_+ u_0 + \mathbf{R}_+ u_j) \subseteqq f_j(F) \subseteqq \complement_{\mathbf{R}^2} (x_j + \mathbf{R}_- u_0 + \mathbf{R}_- u_j)^\circ$$

Notons $C_j = x_j + \mathbf{R}_+ u_0 + \mathbf{R}_+ u_j$,

$$D_j = \complement_{\mathbf{R}^2} (x_j + \mathbf{R}_- u_0 + \mathbf{R}_- u_j)^\circ$$

et $H_j = x_j + \mathbf{R} u_0 + \mathbf{R}_+ u_j$. Si A et B sont des fermés de $\mathbf{R}^2$ tels que $A \cap B_2(0,R) \neq \varnothing$ et $B \cap B_2(0,R) \neq \varnothing$, nous posons:

$$d_R(A,B) = d_H(A \cap B_2(0,R), B \cap B_2(0,R)).$$

Avec ces notations on a:

$$d_R(f_j[F], f[F]) \leqq d_R(f_j[F], H_j) + d_R(H_j, f[F]).$$

Pour le premier terme du membre de droite de cette inégalité on a:

$$d_R(f_j[F], H_j) \leqq d_R(C_j, D_j) \leqq 2R(\theta_j + \pi/2),$$

où θ_j désigne l'argument de u_j, $\theta_j \in]-\pi/2, \pi/2]$; pour le second:

$$d_R(H_j, f[F]) \leqq \Phi^{-1}(\gamma_2(D_j)) - \Phi^{-1}(\gamma_2(C_j)).$$

On a d'une part:

$$\lim_{j\to\infty} \theta_j = -\frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, puisque:

$$\gamma_2(C_j) \leqq \gamma_2(F) \leqq \gamma_2(D_j)$$

et

$$\begin{aligned}\gamma_2(D_j) - \gamma_2(C_j) &= \gamma_2(x_j + \mathrm{R}_+ u_0 + \mathrm{R}_- u_j) + \gamma_2(x_j + \mathrm{R}_- u_0 + \mathrm{R}_+ u_j) \\ &\leqq 2 \int_{\mathrm{R}_+ u_0 + \mathrm{R}_- u_j} \exp(R\|x\|)\gamma_2(dx),\end{aligned}$$

il découle de la continuité uniforme de Φ^{-1} sur l'intervalle $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ que:

$$\lim_{j\to\infty} \Phi^{-1}(\gamma_2(D_j)) - \Phi^{-1}(\gamma_2(C_j)) = 0.$$

On en déduit:

$$\lim_{j\to\infty} d_R(f_j[F], f[F]) = 0,$$

uniformément pour R fixé. Le nombre R ne dépendant que de ε, le Théorème 1.6 est démontré.

Grâce à la Proposition 0.2, le Théorème 1.6 pour conséquence immédiate le

1.7. COROLLAIRE. *Dans* R^2 *toute symétrisation est régularisante.*

Le prochain paragraphe est consacré à la généralisation en dimension quelconque de cet énoncé.

2. L'inegalité de Borell dans $\mathbb{R}^n$: Regularité des symétrisations.

Nous allons démontrer le théorème suivant:

2.1. THÉORÈME. *Dans* $\mathbb{R}^n$ *toute k-symétrisation* $S=S(T,u)$ *est régularisante*:

$$\forall F\in\mathscr{F},\ \forall r>0,\qquad S[F+B_n(0,r)]\supseteqq S[F]+B_n(0,r);$$

S est donc ouverte et fermée.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1. Nous démontrons le Théorème 2.1 par récurrence sur la dimension de l'espace considéré. Pour $n=2$ le théorème est déja démontré. Supposons l'assertion du Théorème 2.1 vérifiée dans $\mathbb{R}^n$. Soit $S=S(T,u)$ une k-symétrisation, $1\leqq k\leqq n$, dans $\mathbb{R}^{n+1}$; pour tout $x\in T$ posons $L_x=x+T^\perp$. Pour tout fermé F de $\mathbb{R}^{n+1}$ et pour tout $r>0$, on a:

$$S[F]_r=\bigcup_{x\in T}S[F\cap L_x]_r\,.$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $x\in T$, on a:

$$S[F\cap L_x]_r\subseteqq S[(F\cap L_x)_r]\,.$$

A cet effet, nous allons prouver que pour tout $(x,y)\in T\times T$, on a:

$$S[F\cap L_x]_r\cap L_y\subseteqq S[(F\cap L_x)_r]\cap L_y\,. \tag{2.1.1}$$

Remarquons tout d'abord que nous avons les égalités:

$$S[F\cap L_x]_r\cap L_y = S[F\cap L_x]+(B_{n+1}(0,r)\cap L_{y-x})\,,$$
$$S[(F\cap L_x)_r]\cap L_y = S[(F\cap L_x)+(B_{n+1}(0,r)\cap L_{y-x})]\,.$$

Comme $B_{n+1}(0,r)\cap L_{y-x}$ est une boule euclidienne dans l'espace affine L_{y-x} de dimension $k\leqq n$, on déduit de l'hypothèse de récurrence:

$$S[F\cap L_x]+(B_{n+1}(0,r)\cap L_{y-x})\subseteqq S[(F\cap L_x)+(B_{n+1}(0,r)\cap L_{y-x})]\,,$$

ce qui amène la conclusion du Théorème 2.1 pour toute les k-symétrisations avec $k\neq n+1$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, reste à le prouver pour les $n+1$-symétrisations. Comme les k-symétrisations, $1\leqq k\leqq n$, dans $\mathbb{R}^{n+1}$, sont ouvertes et fermées, nous utilisons pour cela le Lemme 2.2:

2.2. LEMME. *Soient* $S_1=S(T_1,u)$ *et* $S_2=S(T_2,u)$ *deux symétrisations ouvertes et fermées dans* $\mathbb{R}^m$ *avec* $T_2\supseteqq(T_1+\mathbb{R}u)^\perp$; *on a*:

$$S_2\circ S_1 = S(T_1\cap T_2,u)\,.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.2. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^m$, par définition de S_1

on a: $S_1[F]=S_1[F]+(T_1+\mathbf{R}u)^\perp$. D'autre part, pour tout $v \in T_2$ et pour tout $A \in \operatorname{Dom}(S_2)$, on a: $S_2[A+v]=S_2[A]+v$. Puisqu'ici $(T_1+\mathbf{R}u)^\perp \subseteqq T_2$, on a:

$$\begin{aligned} \forall F \in \mathscr{F}, \quad S_2 \circ S_1[F] &= S_2[S_1[F]+(T_1+\mathbf{R}u)^\perp]+(T_2+\mathbf{R}u)^\perp \\ &= S_2 \circ S_1[F]+(T_1+\mathbf{R}u)^\perp+(T_2+\mathbf{R}u)^\perp . \end{aligned}$$

Comme $(T_1+\mathbf{R}u)^\perp+(T_2+\mathbf{R}u)^\perp=(T_1 \cap T_2+\mathbf{R}u)^\perp$, on en déduit le Lemme 2.2 par identification.

Si $S=S(\{0\},u)$ est une $(n+1)$-symétrisation dans $\mathbf{R}^{n+1}$, choisissons un sous-espace vectoriel T_1 de $\mathbf{R}^{n+1}$ orthogonal à u, de dimension $n-k+1$ avec $2 \leqq k \leqq n$ et posons:

$$S_1 = S(T_1,u) \quad \text{et} \quad S_2 = S((T_1+\mathbf{R}u)^\perp,u) .$$

Les symétrisations S_1 et S_2 sont ouvertes et fermées et d'après le Lemme 2.2 on a: $S_1 \circ S_2=S$. On en déduit que S est fermée, ouverte et régularisante puisque S_2 et S_1 le sont. Le Théorème 2.1 est démontré.

Le corollaire suivant est utile, il résulte de la démonstration du Théorème 2.1.

2.3. COROLLAIRE. *Soient* $S_1=S(T_1,u)$ *et* $S_2=S(T_2,u)$ *deux symétrisations, de même direction dans* $\mathbf{R}^n$, *telles que* $(T_1 \cap T_2)^\perp_{T_1}$ *est orthogonal à* $(T_1 \cap T_2)^\perp_{T_2}$; *on a alors*:

$$S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1 = S(T_1 \cap T_2,u) .$$

En particulier dans $\mathbf{R}_n$, $n \geqq 3$, *toute* k*-symétrisation avec* $k \geqq 2$, *peut s'ecrite comme la composée de* $(k-1)$ *deux-symétrisations.*

En prenant $k=n$ dans le Théorème 2.1, on obtient par intégration l'inégalité de Borell dans $\mathbf{R}^n$:

2.4. THÉORÈME. *Pour tout borélien* $A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}^n)$ *et pour tout* $r \geqq 0$, *on a*:

$$\Phi^{-1} \circ \gamma_n(A+B_n(0,r)) \geqq \Phi^{-1} \circ \gamma_n(A)+r .$$

Dans le prochain paragraphe nous étudions les symétrisés des parties convexes de $\mathbf{R}^n$.

3. Le théorème de H. A. Schwartz, H. Brunn et H. Minkowski dans l'espace de Gauss.

L'objet de ce paragraphe est le théorème suivant:

3.1. THÉORÈME. *Soient C une partie ouverte ou fermeée de* R^n *et S une symétrisation gaussienne dans* R^n; *si C est convexe alors $S[C]$ l'est aussi.*

C'est l'analogue du théorème de H. A. Schwarz, H. Brunn et H. Minkowski pour la symétrisation de Steiner dans l'espace euclidien, tel que l'énonce Blaschke dans [3] (Dritter Teil), cf. aussi [4]. Nous en déduirons de la même manière que dans [3] et [4] les inégalités suivantes:

3.2. THÉORÈME. *Soient A et B, deux boréliens non vides de* R^n; *si A et B sont convexes, alors, pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a*:

$$(3.2.1) \qquad \Phi^{-1}\circ\gamma_n(\lambda A+(1-\lambda)B) \geqq \lambda\Phi^{-1}\circ\gamma_n(A)+(1-\lambda)\Phi^{-1}\circ\gamma_n(B)\,.$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1. Nous démontrons d'abord le Théorème 3.1 pour les 1-symétrisations dans R^n, n quelconque; puis pour les deux-symétrisations en utilisant le Théorème 1.6. Le Corollaire 2.2 permet ensuite de conclure.

Soit C une partie convexe et fermée de R^n et $S=S((\mathsf{R}u)^\perp, u)$ une 1-symétrisation; puisque $S(C)$ est une réunion de demi-droites parallèles à $\mathsf{R}u$, il nous suffit pour avoir 3.1 de montrer que pour tout $(x_1,x_2)\in(\mathsf{R}u)^\perp\times(\mathsf{R}u)^\perp$, et pour tout $\lambda\in[0,1]$, on a:

$$S[C]\cap(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2+\mathsf{R}u) \supseteqq \lambda[S[C]\cap(x_1+\mathsf{R}u)]+(1-\lambda)[S[C]\cap(x_2+\mathsf{R}u)]\,,$$

c'est à dire:

$$S[C\cap(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2+\mathsf{R}u)] \supseteqq \lambda S[C\cap(x_1+\mathsf{R}u)]+(1-\lambda)S[C\cap(x_2+\mathsf{R}u)]\,.$$

L'ensemble C étant convex et S étant montone, il suffit de prouver:

$$(3.1.2) \qquad S[\lambda(C\cap(x_1+\mathsf{R}u))+(1-\lambda)(C\cap(x_2+\mathsf{R}u))] \supseteqq \lambda S[C\cap(x_1+\mathsf{R}u)]+(1-\lambda)S[C\cap(x_2+\mathsf{R}u)]\,.$$

En général, pour $j=1,2$, $C\cap(x_j+\mathsf{R}u)$ est un segment (éventuellement vide) dans $(x_j+\mathsf{R}u)$, il s'écrit:

$$C\cap(x_j+\mathsf{R}u) = x_j+[a_j,b_j]u\,,$$

avec $a_j\leqq b_j$; de la même manière, $S[C\cap(x_j+\mathsf{R}u)]$ est une demi-droite dans $(x_j+\mathsf{R}u)$ qui s'écrit:

$$S[C \cap (x_j + \mathbf{R}u)] = x_j + [c_j, +\infty[u ,$$

avec c_j tel que:

$$\gamma_1([a_j, b_j]) = \gamma_1([c_j, +\infty[) ,$$

c'est à dire: $c_j = \Phi^{-1}(\Phi(b_j) - \Phi(a_j))$.

L'inclusion (3.1.2) s'écrit:

$$S[[\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2, \lambda b_1 + (1-\lambda)b_2]u + \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]$$
$$\supseteq \lambda S[[a_1, b_1]u] + (1-\lambda)S[[a_2, b_2]u] + \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 ,$$

et équivaut à l'inégalité suivante:

$$\Phi^{-1}(\Phi(\lambda b_1 + (1-\lambda)b_2) - \Phi(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2))$$
$$\lambda \Phi^{-1}(\Phi(b_1) - \Phi(a_1)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\Phi(b_2) - \Phi(a_2))$$

qui exprime que la fonction g définie sur $\{(a,b) \in \mathbf{R}^2,\ a<b\}$ par $g(a,b) = \Phi^{-1}(\Phi(b) - \Phi(a))$ est concave. Ce que nous montrons dans le:

3.3. LEMME. *La fonction* $g(a,b) = \Phi^{-1}(\Phi(b) - \Phi(a))$ *est concave.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 3.3. Posons: $r = d^2g/da^2$, $s = d^2g/dadb$ et $t = d^2g/db^2$. On a:

$$r = (a \cdot \exp(\tfrac{1}{2}a^2) + g \cdot \exp(\tfrac{1}{2}g^2)) \exp(-a^2 + \tfrac{1}{2}g^2) ,$$
$$s = -g \cdot \exp(-\tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{2}b^2 + g^2)$$
$$t = (-b \cdot \exp(\tfrac{1}{2}b^2) + g \cdot \exp(\tfrac{1}{2}g^2)) \exp(-b^2 + \tfrac{1}{2}g^2) .$$

On remarque que r et t sont négatifs, il faut montrer:

$$s^2 - rt = (abe^{\frac{1}{2}a^2}e^{\frac{1}{2}b^2} + (be^{\frac{1}{2}b^2} - ae^{\frac{1}{2}a^2})ge^{\frac{1}{2}g^2})e^{-a^2}e^{-b^2}e^{g^2} \leqq 0 .$$

Nous montrons:

$$ge^{\frac{1}{2}g^2} \leqq [b^{-1} \cdot \exp(-\tfrac{1}{2}b^2) - a^{-1} \cdot \exp(-\tfrac{1}{2}a^2)]^{-1} = F(a,b) .$$

L'étude de la fonction F sur les courbes où g est constante, qui peut se faire par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous indique qu'il suffit de vérifier que pour tout p strictement positif, on a:

$$g(-p,p) \cdot \exp(\tfrac{1}{2}g^2(-p,p)) = \Phi^{-1}(2\Phi(p)-1) \cdot \exp(\tfrac{1}{2}[\Phi^{-1}(2\Phi(p)-1)]^2)$$
$$\leqq \tfrac{1}{2}p \cdot \exp(\tfrac{1}{2}p^2) .$$

Posons $h(p) = \Phi^{-1}(2\Phi(p)-1)$ et soit $x = x(p)$ la fonction définie par l'équation:

$$\forall p \in \mathbf{R}_+, \quad x(p) \cdot \exp(\tfrac{1}{2}x^2(p)) = \tfrac{1}{2}p \cdot \exp(\tfrac{1}{2}p^2);$$

pour tout p positif on a:

$$0 \leqq x(p) \leqq p \quad \text{et} \quad x'(p) = (p+p^{-1})(x(p)+x(p)^{-1})^{-1} .$$

Nous étudions la différence $\Phi[h(p)]-\Phi[x(p)]$. Lorsque p tend vers l'infini, cette différence tend vers 0, de plus on a:

$$\frac{d}{dp}(\Phi[h(p)]-\Phi[x(p)]) = 2(1-x(p)\cdot x'(p)\cdot p^{-1})\exp(-\tfrac{1}{2}p^2)/\sqrt{2\pi} \geqq 0 .$$

On a donc: $\forall p>0$, $h(p) \leqq x(p)$, ce qui implique:

$$h(p)\cdot \exp(\tfrac{1}{2}h^2(p)) \leqq x(p)\cdot \exp(\tfrac{1}{2}x^2(p)) = \tfrac{1}{2}p\cdot \exp(\tfrac{1}{2}p^2) .$$

La concavité de g en découle. Cela achève la démonstration du Lemme 3.3 et montre le Théorème 3.1 dans $\mathbf{R}^n$ pour toute 1-symétrisation.

Soit $S=S(T,u)$ une 2-symétrisation dans $\mathbf{R}^n$ et soit C une partie convexe, fermée et bornée de $\mathbf{R}^n$; il existe alors un nombre $\varepsilon \in]0,1/2[$, tel que:

$$\forall x \in T, \quad \gamma_2(C \cap (x+T^{\perp})) \in [0,1-\varepsilon[.$$

Quitte à rajouter à C un disque du type $B_n(0,r) \cap T^{\perp}$, on peut supposer de plus que:

$$\forall x \in T, \quad \gamma_2(C \cap (x+T^{\perp})) \in]\varepsilon,1-\varepsilon[\cup \{0\} .$$

Soit v un vecteur unitaire de $(T+\mathbf{R}u)^{\perp}$; posons $u_0=v$ et $u_1=u$ et construisons à partir de ces deux vecteurs, une suite $\{u_j; j \in \mathbf{N}\}$ de vecteurs du plan $(\mathbf{R}u+\mathbf{R}v)$ comme dans l'exemple 1.4; notons $\{f_j;\ j \in \mathbf{N}\}$ la suite de transformations associée. Il découlte immédiatement du Théorème 1.6 l'existence d'un nombre réel $R(\varepsilon)$ tel que pour tout $R>R(\varepsilon)$, on ait:

$$\lim_{j\to\infty} f_j(C) \cap (B_2(0,R)+T^{\perp}) = S(C) \cap (B_2(0,R)+T^{\perp}) ,$$

où $B_2(0,R)$ désigne la boule euclidienne de centre 0 et de rayon R du plan vectoriel $(\mathbf{R}u+\mathbf{R}v)$. Comme pour tout $j \in \mathbf{N}, f_j(C)$ est convexe, on en déduit que $S(C)$ l'est aussi et cela prouve le Théorème 3.1 dans $\mathbf{R}^n$ pour toute 2-symétrisation. Par le corollaire 2.3, toute k-symétrisation, $2 \leqq k \leqq n$, s'exprime comme la composée d'un nombre fini de 2-symétrisations: le Théorème 3.1 est démontré.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2. Le Théorème 3.2 est une conséquence directe du précédent. Considérons deux parties convexes fermées et non vides A et B dans $\mathbf{R}^{n+1}$, respectivement incluses dans deux sous-espaces affines parallèles de dimension n dans $\mathbf{R}^{n+1}$. Notons C l'enveloppe convexe de $A \cup B$; on a:

$$C = \bigcup_{0 \leqq \lambda \leqq 1} (\lambda A + (1-\lambda)B) .$$

Soit S une n-symétrisation dans $\mathbf{R}^{n+1}$, de direction u parallèle aux hyperplans contenant A et B; la convexité de $S(C)$ a pour conséquence l'inégalité (3.2.1). Cela prouve le Théorème 3.2.

On pourra comparer l'inégalité (3.2.1) à celle de [22] et de [7] mais nous ne savons pas si l'inégalité (3.2.1) subsiste lorsque A ou B n'est pas convexe. Cependant, on peut utiliser des théorèmes abstraits de la théorie des mesures gaussiennes de Radon (telle qu'elle est développée dans [8], voir aussi [1], [16]) pour étendre le Théorème 3.2 en dimension infinie.

3.3. THÉORÈME. *Soit (E,γ) un espace de Gauss* ([8]): *E est un espace de Hausdorff localement convexe et γ une mesure gaussienne de Radon sur E; pour tout couple (A,B) de boréliens convexes de E et pour tout $\lambda \in]0,1[$, on a*:

$$\Phi^{-1} \circ \gamma(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqq \lambda \Phi^{-1} \circ \gamma(A) + (1-\lambda)\Phi^{-1} \circ \gamma(B) .$$

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.3. Remarquons d'abord que sous les hypothèses du théorème l'ensemble $\lambda A + (1-\lambda)B$ est γ-mesurable (voir par exemple H. Sato [23]). Nous supposons ensuite que la mesure γ est centrée dans E (c'est possible grâce à un résultat de C. Borell dans [10]), nous désignons par $\{e_k; k \in \mathbf{N}\}$ une base orthonormée de l'espace autoreproduisant de γ, et nous posons pour tout $n \in \mathbf{N}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} e_k \tilde{e}_k$, où $\tilde{e}_k$ est la forme linéaire sur E associée à e_k (cf. [8]). Pour tout C, γ-mesurable dans E, et n dans $\mathbf{N}$, nous notons I_C^n la fonction définie par:

$$I_C^n = \int I_C(s_n + y)[(id_E - s_n) \circ \gamma] \, (dy);$$

c'est une espérance conditionnelle et on a dans $L_0(\gamma)$:

$$\lim_{n \to +\infty} I_C^n = I_C .$$

Grâce à la log-concavité des mesures gaussiennes de Radon on a pour tout n:

$$\{I^n_{\lambda A + (1-\lambda)B} > 1/2\} \supseteqq \lambda\{I^n_A > 1/2\} + (1-\lambda)\{I^n_B > 1/2\} ,$$

et le Théorème 3.3 découle du Théorème 3.2.

4. Réarrangements equimesurables liées aux symétrisations gaussiennes, applications.

Soient (E,γ) un espace de Gauss (c.f. [8]) et f une fonction mesurable sur E, à valeurs réelles; notons f^* la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par:

$$\forall a \in \mathbf{R}, \quad f^*(a) = \inf\{b \in \mathbf{R}\,;\, \Phi(a) \leqq \gamma(\{f \leqq b\})\};$$

de sorte que f^* soit la réarrangée équimesurable croissante de f sur $(\mathbf{R}, \gamma_1)$. Les opérations de réarrangements équimesurables sont étroitement liées aux symétrisations (c.f. [18], [22]). Avec ces notations nous avons le:

4.1. THÉORÈME. *Soient f une fonction mesurable sur E et a_0 un nombre réel;*

(4.1.1) *si $\{f > a_0\}$ est convexe et si la restriction de f à $\{f > a_0\}$ est concave, alors f^* est concave sur $\{f > a_0\}$;*

(4.1.2) *si f est convexe, alors f^* l'est aussi.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.1. Montrons 4.1.2. Si f est convexe les ensembles $\{f \leqq x\}$ sont des convexes et on a:

$$\forall a, b \in \mathbf{R},\ \forall \lambda \in [0,1], \qquad \{f \leqq \lambda a + (1-\lambda) b\} \supseteqq \lambda\{f \leqq a\} + (1-\lambda)\{f \leqq b\}\,.$$

Grâce au Théorème 3.3, on en déduit:

$$\Phi^{-1} \circ \gamma\{f \leqq \lambda a + (1-\lambda) b\} \geqq \lambda \Phi^{-1} \circ \gamma\{f \leqq a\} + (1-\lambda) \Phi^{-1} \circ \gamma\{f \leqq b\}\,.$$

On a montré que la fonction qui à tout $x \in \mathbf{R}$ associe $\Phi^{-1} \circ \gamma\{f \leqq x\}$ est concave lorsque f est convexe. Cela implique que f^* est convexe et prouve 4.1.2. L'assertion 4.1.1 est une conséquence de 4.1.2: il suffit de changer f en $-f$ dans la démonstration précédente. Le Théorème 4.1 est démontré.

Les énoncés suivant sont des applications du Théorème 4.2 qui généralisent partiellement aux espaces de Gauss des inégalités de [5] et [6]. Rappelons tout d'abord l'inégalité de Thunsdorff (c.f. [5]).

Si f est une fonction convexe et positive sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$, alors la fonction m, définie sur $\mathbf{R}_+^\circ$ par:

$$\forall p > 0, \quad m(p) = \left[(p+1) \int_0^1 f^p(x)\, dx\right]^{1/p},$$

est croissante.

Soit $f\colon E \to \mathbf{R}_+$ une fonction mesurable telle que $\gamma\{f > 0\} = \Phi(\nu)$, avec $\nu \in \mathbf{R}$; nous notons μ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^\circ$ par:

$$\forall p > 0, \quad \mu(p) = \left(\frac{E(f^p)}{E(\nu - N)_+^p}\right)^{1/p}$$

où N est une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et où on a posé pour tout

$a \in \mathbf{R}$, $a_+ = \max(a, 0)$. De sorte que l'on ait le:

4.2. LEMME. *Si $\mu(p) < \infty$ alors on a*:

$$E(f^p) = p \int_0^\infty x^{p-1} P\{f \geqq x\}\, dx = p \int_0^\infty x^{p-1} \Phi(-x/\mu(p))\, dx\,.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.2. On a:

$$p \int_0^\infty x^{p-1} \Phi(v - x/\mu(p))\, dx = [\mu(p)]^p p \int_0^\infty x^{p-1} \Phi(v - x)\, dx$$
$$= [\mu(p)]^p p \int_0^\infty x^{p-1} P\{v - N \geqq x\}\, dx\,.$$

C'est à dire:

$$p \int_0^\infty x^{p-1} \Phi(v - x/\mu(p))\, dx = [\mu(p)]^p E(v-N)_+^p = E(f^p)\,,$$

ce qui prouve le Lemme 4.2.

Dans ces conditions on a le théorème suivant:

4.3. THÉORÈME. *Si f est convexe alors μ est croissante.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.3. Par construction on a:

$$\forall p \in \mathbf{R}_+^\circ, \quad \mu(p) = \left(\frac{E(f[N]^p)}{E(v-N)_+^p}\right)^{1/p}.$$

Grâce au Théorème 4.1, il suffit donc de démontrer le Théorème 4.3 pour la fonction $g = f^*$ définie sur $\mathbf{R}$ qui est positive croissante et convexe et qui vérifie $\gamma_1\{g > 0\} = \Phi(v)$. On peut supposer $\mu(p) < \infty$, de sorte que:

$$E(g^p) = p \int_0^\infty x^{p-1} P\{g(N) \geqq x\}\, dx\,.$$

On a alors:

$$p \int_0^\infty x^{p-1} P\{g(N) \geqq x\}\, dx = p \int_0^\infty x^{p-1} \Phi(v - x/\mu(p))\, dx\,.$$

Posons pour tout $a \in \mathbf{R}_+$:

$$\Psi(a) = p \int_a^\infty x^{p-1} [P\{g(N) \geqq x\} - \Phi(v - x/\mu(p))]\, dx\,.$$

Et remarquons que $\Psi(0)=0$ et $\Psi(+\infty)=0$. La dérivée Ψ' de Ψ a, sur $]0,+\infty[$, le même signe que l'expression suivante:

$$-P\{g(N)\geqq x\}+\Phi(\nu-x/\mu(p))\,,$$

c'est à dire le signe de:

$$-\Phi^{-1}\circ P\{g(N)\geqq x\}+(\nu-x/\mu(p))\,.$$

Or $-\Phi^{-1}\circ P\{g(N)\geqq x\}=g^{-1}(x)$ est une fonction concave: Ψ' a donc un et un seul zéro sur l'intervalle $]0,+\infty[$. On en déduit que Ψ est positive sur $]0,+\infty[$. Cela s'écrit:

$$\forall a>0,\quad p\int_a^\infty x^{p-1}P\{g(N)\geqq x\}\,dx\}\,dx\ \geqq\ p\int_a^\infty x^{p-1}\Phi(\nu-x/\mu(p))\,dx\,.$$

Multiplions les deux membres de cette inégalité par a^{q-p}, où $q>p$; en intégrant par parties on obtient:

$$q\int_0^\infty x^{q-1}P\{g(N)\geqq x\}\,dx\ \geqq\ q\int_0^\infty x^{q-1}\Phi(\nu-x/\mu(p))\,dx\,,$$

C'est à dire: $\boldsymbol{E}(g[N]^q)\geqq\mu(p)^q\boldsymbol{E}(\nu-N)_+^q$, ce ce qui prouve le Théorème 4.3.

Notre deuxième application est une généralisation de l'inégalité de Berwald (c.f. [6]) que nous commençons par rappeler:

Soit K un compact convexe de $\mathbf{R}^n$ et soit f une fonction positive et concave définie sur K; dans ces conditions, la fonction M qui à tout $p>0$ associe:

$$M(p)\ =\ \left(\binom{n+p}{n}\int_K f^p(x)\,dx\Big/\int_K dx\right)^{1/p}$$

est décroissante.

Notre analogue gaussien s'énonce comme le Théorème 4.3, nous conservons les mêmes notations:

4.4. Théorème. *Si la fonction f est concave sur l'ensemble $\{f>0\}$ alors μ est décroissante.*

Démonstration du Théorème 4.4. Comme pour le Théorème 4.3, il suffit grâce au théorème 4.1 (4.1.1), de démontrer le Théorème 4.4 pour une fonction $g\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$, croissante, telle que $\gamma_1\{g>0\}=\Phi(\nu)$, et qui est concave sur $\{g>0\}$. En supposant $\mu(p)<\infty$, on a:

$$E(g^p[N]) = p\int_0^\infty x^{p-1}P\{g(N)\geqq x\}\,dx\,.$$

Cette fois $-\Phi^{-1}\circ P\{g(N)\geqq x\}=g^{-1}(x)$ est convexe sur $]0,+\infty[$, il en résulte l'inégalité:

$$\forall a>0,\quad p\int_a^\infty x^{p-1}P\{g(N)\geqq x\}\,dx \leqq p\int_a^\infty x^{p-1}\Phi(v-x/\mu(p))\,dx\,.$$

En intégrant par parties, après avoir multiplié les deux membres de cette inégalité par a^{q-p}, avec $q>p$, on obtient le Théorème 4.4, dont la démonstration est achevée.

Pour illustrer le Théorème 3.2 donnons en une application à un problème de diffusion. Soit A une partie convexe, ouverte et non vide de $\mathbf{R}^d$, $d\in\mathbf{N}^+$, et soit $u\colon \mathbf{R}^d\times\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$ la fonction solution de l'équation de la chaleur:

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u(x,t) = \partial u/\partial t, & \text{si } t>0 \text{ et } x\in A\,,\\ u(x,t) = 0, & \text{si } t\geqq 0 \text{ et } x\notin A\\ u(x,0) = I_A(x)\,. \end{cases}$$

4.5. THÉORÈME. *Pour tout $t\in\mathbf{R}_+$, la fonction $\Phi^{-1}\circ u(x,t)$ est concave dans A.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.5. Soit $\{X(s);\,s\geqq 0\}$ le mouvement brownien dans $\mathbf{R}^d$ ([19]); pour tout $M\subset\mathbf{R}^d$, désignons par ζ_M le premier temps d'atteinte de M:

$$\zeta_M = \inf\{t>0;\ X(t)\in M\}\,.$$

Suivant [13], l'ensemble A étant fixé comme ci-dessus, la solution de (I) est donnée pour tout $(x,t)\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}_+$ par:

$$u(x,t) = P_x\{\zeta_{A^c}>t\}\,.$$

Fixons $t>0$, pour tout sous-ensemble fini S de $[0,t]$, le Théorème 3.2 implique l'inégalité:

$$\begin{aligned} &\forall x,y\in\mathbf{R}^d,\ \forall\lambda\in[0,1]\,,\\ &\qquad\Phi^{-1}\circ P\{\forall s\in S,\ X(s)\in\lambda(A-x)+(1-\lambda)(A-y)\}\\ &\qquad\geqq \lambda\Phi^{-1}\circ P\{\forall s\in S,\ X(s)\in A-x\}\\ &\qquad\quad+(1-\lambda)\Phi^{-1}\circ P\{\forall s\in S,\ X(s)\in A-y\}\,. \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on a la même inégalité lorsque S est une partie dénombrable dense dans $[0,t]$; mais alors S est séparante pour $\{X(s);\,0\leqq s\leqq t\}$, on a donc:

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}\circ P\{\forall s\in[0,t],\ X(s)+\lambda x+(1-\lambda)y\in A\}\\ \geqq \lambda\Phi^{-1}\circ P\{\forall s\in[0,t],\ X(s)+x\in A\}\\ +(1-\lambda)\Phi^{-1}\circ P\{\forall s\in[0,t],\ X(s)+y\in A\}\,.\end{aligned}$$

C'est l'inégalité du Théorème 4.5.

Le Théorème 4.5 est, dans cette situation, un renforcement d'un résultat de H. J. Brascamp et E. H. Lieb [12] qui, appliqué à (I) montre que pour tout $t>0$ fixé, la fonction $u(x,t)$ est log-concave. Cela se déduit de 4.5 car Φ est elle même log-concave. De plus Φ^{-1} étant convexe sur $[1/2,1[$, on voit ici que la fonction

$$x\mapsto u(x,t)\cdot I_{\{u(x,t)\geqq\frac{1}{2}\}}$$

est concave sur son support qui est un convexe non vide pour t assez petit.

REFERENCES

1. A. Badrikian et S. Chevet, *Mesures cylindriques, espaces de Wiener et fonctions aléatoires Gaussiennes* (Lectures Notes in Math. 379), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1974.
2. C. Bandle, *Isoperimetric inequalities and applications* (Monographs Stud. Math. 7), Pitman, Boston, London, Melbourne, 1980.
3. W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Weit & Comp. Leipzig, 1916.
4. T. Bonnessen and W. Fenchel, *Theorie der Konvexen Körper*, Springer-Verlag, Berlin, 1934.
5. C. Borell, *Complements of Liapunov's inequality*, Math. Ann. 205 (1973), 323–331.
6. C. Borell, *Inverse Hölder inequalities in one and several dimensions*, J. Math. Anal. Appl. 41 (1973), 300–312.
7. C. Borell, *Convex measure on locally convex spaces*, Ark. Math. 12 (1974), 239–252.
8. C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Invent. Math. 30 (1975), 207–216.
9. C. Borell, *Gaussian Radon measures on locally convex spaces*, Math. Scand. 38 (1976), 265–284.
10. C. Borell, *A Gaussian correlation inequality for certain convex bodies in* $\mathbf{R}^n$, Math. Ann. 256 (1981), 569–572.
11. N. Bourbaki, *Eléments de mathématique, Fasc.* XXXV, *Livre* VI: *Intégration.* Chapitre IX: *Intégration sur les espaces topologiques séparés* (Actualités Sci. Indust. 1343),Hermann, Paris, 1969.
12. J. H. Brascamp and E. H. Lieb, *On extension of the Brunn-Minkowski and Prekopa-Leidler theorem including inequalities for* log-*concave function, and with application to the diffusion equation*, J. Funct. Anal. 22 (1976), 366–389.
13. H. Busemann, *Convex surfaces* (Interscience Tracts in Pure Appl. Math. 6) Interscience Publishers, Inc. New York, 1958.
14. A. Friedman, *Stochastic differential equations and applications*, *Vol.* 1 (Probab. and Math. Stat. 28), Academic Press, New York, San Fransisco, London, 1975.

15. L. Gallardo, *Au sujet du contenu probabiliste d'un lemme d'Henri Poincaré*, Ann. Sci. Univ. Clermont Math. No. 69, Fasc. 19 (1981), 185–190..
16. L. Gross, *Measurable functions on Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 372–390.
17. H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, (Grundlehren Math. Wiss. 93), Springer-Verlag , Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1957.
18. G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.
19. K. Ito and H. P. Mc Kean, *Diffusion processes and their sample paths* (Grundlehren Math. Wiss. 125), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1974.
20. H. J. Landau and L. A. Shepp, *On the supremum of a Gaussian process*, Sankhyā Ser. A 31 (1971), 369–378.
21. G. Letac, *Isotropy and sphericity: Some characterisations of the normal distribution*, Ann. Statist. 9 (1981), 408–416.
22. G. Polya and G. Szego, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics* (Ann. Math. Stud. 27), Princeton University Press, Princeton, 1951.
23 A. Prekopa, *Logarithmic concave measures with application to stochastic programming*, Acta Sci. Math. (Szeged) 32 (1971), 301–316.
24. J. Sarvas, *Symmetrization of.condensers in n-space*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No. 522 (1972).
25. H. Sato, *Souslin support and Fourier expansion of a gaussian Radon measure* in *Probability in Banach spaces* III, (Proc. Conf. Tufts Univ., Medford, Mass., 1980), ed. A. Beck, (Lecture Notes in Math. 860), pp. 299–313. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1981.
26. E. Schmidt, *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und Ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie* I, Math. Nachr. 1 (1948) 81–157 und II, Math. Nachr. 2 (1949), 171–244.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
LABORATOIRE ASSOCIÉ AU C.N.R.S.
UNIVERSITÉ LOUIS-PASTEUR
7 RUE RENÉ-DESCARTES
67084 STRASBOURG CEDEX
FRANCE