MATH. SCAND. 54 (1984), 51–69

STETIGE ABHÄNGIGKEIT DER EIGENWERTE UND EIGENFUNKTIONEN ELLIPTISCHER DIFFERENTIALOPERATOREN VOM GEBIET

JOACHIM WEIDMANN

1. Einleitung.

Ist $P(D)$ ein formal selbstadjungierter Differentialausdruck in $\mathbf{R}^m$, so wird für jede offene Teilmenge G von $\mathbf{R}^m$ durch

$$D(T_0) = C_0^\infty(G),\ T_0 f = P(D)f \quad \text{für } f \in D(T_0)$$

ein symmetrischer Operator in $L_2(G)$ definiert. Ist $P(D)$ halbbeschränkt nach unten, so ist die Friedrichsfortsetzung T von T_0 ein halbbeschränkter selbstadjungierter Operator in $L_2(G)$. Es ist eine naheliegende Frage, ob diese Operatoren (bzw. ihre Spektren, Eigenwerte und Eigenfunktionen) »stetig« vom Gebiet G abhängen.

Eine Schwierigkeit der Behandlung dieses Problems ergibt sich daraus, daß diese Operatoren für verschiedene Gebiete i.allg. in verschiedenen Hilberträumen operieren (die allerdings alle abgeschlossene Teilräume eines hinreichend großen Raumes $L_2(G_0)$ sind). Definiert man jedoch für $T \geqq 1$ die *Quasiinverse* $\hat{T}$ indem man $\hat{T}$ auf $L_2(G)$ gleich T^{-1} und auf $L_2(G_0 \setminus G)$ gleich 0 setzt (vgl. Abschnitt 2 für die genaue Definition), so kann man unter geeigneten Voraussetzungen für »$G_n \to G$« beweisen, daß für die entsprechenden Operatoren T_n gilt $\hat{T}_n \to \hat{T}$ im Sinne der starken Konvergenz. Mit Hilfe eines Resultats aus [9] folgt hieraus die Konvergenz der Eigenwerte von T_n, die unterhalb des wesentlichen Spektrums von T liegen, gegen die entsprechenden Eigenwerte von T; außerdem folgt die Normkonvergenz der entsprechenden Eigenelemente (bzw. Eigenprojektionen) im Sinne der Topologie von $L_2(G_0)$. Für Operatoren mit rein diskretem Spektrum (d.h. im wesentlichen für gleichmäßig beschränkte Gebiete G_n und G) erhält man damit die Konvergenz aller Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Verwandte Resultate wurden für Differentialoperatoren zweiter Ordnung in beschränkten Gebieten von R. Courant–D. Hilbert [2, § IV 4], I. Babuška–R. Výborný [1] und F. Stummel [7] mit völlig anderen Methoden bewiesen.

Eingegangen am 22. Oktober, 1982

R. Rannacher [5] hat die von F. Stummel entwickelten Methoden auf Operatoren über unbeschränkten Gebieten ausgedehnt.

In Abschnitt 2 definieren und untersuchen wir die *Quasiinverse* $\hat{T}$ eines selbstadjungierten Operators T in einem etwas allgemeineren Rahmen als wir dies später benötigen. Insbesondere wird gezeigt, daß T die Quasiinverse von $\hat{T}$ ist, und daß die Aussagen $T \leqq S$ und $\hat{S} \leqq \hat{T}$ äquivalent sind.

In Abschnitt 3 beweisen wir einen abstrakten Satz über die starke Konvergenz der Quasiinversen von Operatoren, die durch halbbeschränkte abgeschlossene Sesquilinearformen auf Teilräumen eines Hilbertraumes definiert sind. Diese Resultate sind in anderer Form im wesentlichen in B. Simon [6, (Theorem 4.1)] enthalten.

Schließlich wenden wir in Abschnitt 4 dieses abstrakte Resultat auf Operatoren der Form $-\Delta + q$ an. Die Beweise machen deutlich, daß entsprechende Aussagen für allgemeinere elliptische Operatoren, insbesondere für Operatoren höherer Ordnung, bewiesen werden können. Auch eine gleichzeitige Variation der Koeffizienten (wie sie z.B. bei R. Rannacher [5] zugelassen ist) macht keine wesentlichen Schwierigkeiten.

Die Resultate dieses Abschnitts sind, abgesehen von der dort zugelassen Variation der Koeffizierten, qualitativ vergleichbar mit den von R. Rannacher [5] erzielten Ergebnissen. Die einfache Form der abstrakten Ergebnisse aus Abschnitt 3 erlaubt es jedoch, auch Beispiele zu behandeln, die von den bisher bekannten Resultaten nicht erfaßt werden:

(i) In Abschnitt 5 zeigen wir, daß die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Dirichletproblems sich stetig ändern, wenn das Gebiet »durchgeschnitten« wird.

(ii) Etwas einfacher kann gezeigt werden, daß die Eigenwerte und Eigenfunktionen stetig von der Lage eines Schnittes innerhalb des Gebietes abhängen (auf Einzelheiten kann hier verzichtet werden).

Diese Beispiele machen deutlich, daß die Resultate aus Abschnitt 4 in vielen Punkten verschärft werden könnten. Die Formulierung der Resultate würde dadurch jedoch sehr unübersichtlich werden. Es empfiehlt sich vielmehr, in konkreten Einzelfällen eine Anpassung der Sätze aus Abschnitt 4 zu versuchen.

2. Eine verallgemeinerte Inverse.

Obwohl die Operatoren der in dieser Arbeit betrachteten Operatorfolgen i.allg. in verschiedenen Hilberträumen definiert sind (die allerdings immer Teilräume eines »großen« Hilbertraumes sind, z.B. $L_2(\mathrm{R}^m)$), wollen wir ein Analogon zur starken Resolventenkonvergenz verwenden. Dazu benötigen wir die im folgenden definierte verallgemeinerte Inverse (wir nennen sie kurz Quasiinverse) eines Operators, der als Operator in einem geeigneten abgeschlossenen Teilraum selbstadjungiert ist. Es ist übrigens offensichtlich, daß diese Definition wörtlich auf Operatoren ausgedehnt werden kann, die als Operatoren in geeigneten Teilräumen normal sind; eine Ausdehnung auf beliebige Operatoren scheint jedoch nicht ohne weiteres möglich zu sein.

Sei H ein Hilbertraum, T ein Operator in H, der $D(T)$ in $\overline{D(T)}$ abbildet und also Operator in $H(T)=\overline{D(T)}$ selbstadjungiert ist. Die *Quasiinverse* $\hat{T}$ von T sei definiert durch

$$D(\hat{T}) = R(T)\oplus D(T)^{\perp} = R(T)\oplus H(T)^{\perp}\,,$$

$$\hat{T}(f+g) = T^{-1}f \quad \text{für } f\in R(T) \text{ und } g\in D(T)^{\perp}$$

(dabei sei T^{-1} die Inverse der Einschränkung von T auf $D(T)\ominus N(T)$). Diese Definition beruht auf der Vorstellung, daß T auf $D(T)^{\perp}$ »unendlich groß« ist, d.h. daß dort die Inverse verschwindet.

In der folgenden Bemerkung stellen wir einige wichtige Eigenschaften der Quasiinversen zusammen, die sehr leicht zu beweisen sind.

BEMERKUNG.

1. $\hat{T}$ ist als Operator in

$$H(\hat{T}) = \overline{D(\hat{T})} = \overline{R(T)}\oplus D(T)^{\perp} = N(T)^{\perp}$$

selbstadjungiert. In $\overline{R(T)}$ stimmt $\hat{T}$ mit T^{-1} überein; in $D(T)^{\perp}$ ist $\hat{T}$ der Nulloperator.

2. Ist T dicht definiert (d.h. $H(T)=H$) und injektiv, so ist $\hat{T}=T^{-1}$. In diesem Fall ist nämlich $D(T)^{\perp}=\{0\}$ und somit

$$D(\hat{T}) = R(T) \quad \text{und} \quad \hat{T}f = T^{-1}f \quad \text{für } f\in D(\hat{T})$$

3. Ist T nichtnegativ (d.h. $\langle f, Tf\rangle \geqq 0$ für alle $f\in D(T)$), so gilt dies auch für $\hat{T}$ und est gilt $(\hat{T})^{\frac{1}{2}}=(T^{\frac{1}{2}})^{\wedge}$ (dabei ist die Quadratwurzel von T die eindeutig bestimmte nichtnegative Quadratwurzel des nichtnegativen selbstadjungierten Operators T in $H(T)$).

4. Ist $T \geqq 1$ (d.h. $\langle f, Tf \rangle \geqq \|f\|^2$ für alle $f \in D(T)$, so ist $\hat{T} \in B(H)$ mit $\|\hat{T}\| \leqq 1$.

5. Natürlich hat auch der Nulloperator N ($D(N) = H$, $Nf = 0$ für alle $f \in H$) eine Quasiinverse: Es ist $D(\hat{N}) = \{0\}$.

Der folgende Satz zeigt, daß die Definition der Quasiinversen vernünfrig ist.

SATZ 2.1. *Sei T selbstadjungiert in $H(T) = \overline{D(T)}$, $\hat{T}$ die Quasiinverse von T. Dann ist T die Quasiinverse von $\hat{T}$*, d.h. $\hat{\hat{T}} = T$.

Der *Beweis* ergibt sich sofort aus

$$D(T) = (D(T) \ominus N(T)) \oplus N(T) = R(\hat{T}) \oplus D(\hat{T})^{\perp}$$

$$T(f+g) = Tf = \hat{T}^{-1}f \quad \text{für } f \in R(\hat{T}) = D(T) \ominus N(T),\ g \in D(\hat{T})^{\perp} = N(T)\,.$$

Für zwei Operatoren S und T im Hilbertraum H, die als Operatoren in den Teilräumen $H(S) = \overline{D(S)}$ bzw. $H(T) = \overline{D(T)}$ selbstadjungiert und nichtnegativ sind, schreiben wir $S \leqq T$, wenn gilt

$$D(T^{\frac{1}{2}}) \subset D(S^{\frac{1}{2}})\,,$$

$$\|S^{\frac{1}{2}}f\| \leqq \|T^{\frac{1}{2}}f\| \quad \text{für alle } f \in D(T^{\frac{1}{2}})\,.$$

Es gilt dann offensichtlich

$$H(T) = \overline{D(T)} = \overline{D(T^{\frac{1}{2}})} \subset \overline{D(S^{\frac{1}{2}})} = \overline{D(S)} = H(S)\,.$$

SATZ 2.2. *Seien S und T nichtnegative selbstadjungierte Operatoren in $H(S) = \overline{D(S)}$ bzw. $H(T) = \overline{D(T)}$. Es gilt $S \leqq T$ genau dann, wenn $\hat{T} \leqq \hat{S}$ gilt.*

BEWEIS. Aus Symmetriegründen (vgl. Satz 2.1) genügt es, eine Richtung zu beweisen. Sei $S \leqq T$, d.h. es gilt

$$D(T^{\frac{1}{2}}) \subset D(S^{\frac{1}{2}}) \quad \text{und} \quad \|S^{\frac{1}{2}}f\| \leq \|T^{\frac{1}{2}}f\| \quad \text{für } f \in D(T^{\frac{1}{2}})\,.$$

Es ist zu zeigen:

$$D(\hat{S}^{\frac{1}{2}}) \subset D(\hat{T}^{\frac{1}{2}}) \quad \text{und} \quad \|\hat{T}^{\frac{1}{2}}g\| \leq \|\hat{S}^{\frac{1}{2}}g\| \quad \text{für } g \in D(\hat{S}^{\frac{1}{2}})\,.$$

Es gilt

$$N(\hat{S}^{\frac{1}{2}}) = N(\hat{S}) = H(S)^{\perp} \subset H(T)^{\perp} = N(\hat{T}) = N(\hat{T}^{\frac{1}{2}}) \subset D(\hat{T}^{\frac{1}{2}})\,.$$

Deshalb genügt es zu zeigen:

$$R(S^{\frac{1}{2}}) = D(\hat{S}^{\frac{1}{2}}) \ominus N(\hat{S}^{\frac{1}{2}}) \subset D(\hat{T}^{\frac{1}{2}})\,,$$

$$\|\hat{T}^{\frac{1}{2}}g\| \leqq \|\hat{S}^{\frac{1}{2}}g\| \quad \text{für } g \in R(S^{\frac{1}{2}})\,.$$

Für jedes $g \in D(\hat{T}^{\frac{1}{2}})$ ist $\hat{T}^{\frac{1}{2}}g \in D(T^{\frac{1}{2}})$ und somit nach Voraussetzung

$$\|S^{\frac{1}{2}}\hat{T}^{\frac{1}{2}}g\| \leqq \|T^{\frac{1}{2}}\hat{T}^{\frac{1}{2}}g\| = \|g\| \quad \text{für alle } g \in D(\hat{T}^{\frac{1}{2}})\,.$$

Für jedes $f \in D(S^{\frac{1}{2}})$ ist deshalb

$$F_f : D(\hat{T}^{\frac{1}{2}}) \to \mathbf{C}, \quad g \mapsto \langle S^{\frac{1}{2}}f, \hat{T}^{\frac{1}{2}}g\rangle$$

ein stetiges lineares Funktional mit Norm $\leqq \|f\|$:

$$\begin{aligned}|F_f(g)| &= |\langle S^{\frac{1}{2}}f, \hat{T}^{\frac{1}{2}}g\rangle| = |\langle f, S^{\frac{1}{2}}\hat{T}^{\frac{1}{2}}g\rangle| \\ &\leqq \|f\|\,\|S^{\frac{1}{2}}\hat{T}^{\frac{1}{2}}g\| \leqq \|f\|\,\|g\|\,.\end{aligned}$$

Wegen

$$H(\hat{S}) = N(S)^{\perp} \subset N(T)^{\perp} = H(\hat{T})$$

bedeutet das, daß das Element

$$S^{\frac{1}{2}}f \in D(\hat{S}^{\frac{1}{2}}) \subset H(\hat{S}) \subset H(\hat{T})$$

im Definitionsbereich von $(\hat{T}^{\frac{1}{2}})^* = \hat{T}^{\frac{1}{2}}$ liegt (Adjungierte im Sinne der Operatoren in $H(\hat{T})$), d.h.

$$R(S^{\frac{1}{2}}) \subset D(\hat{T}^{\frac{1}{2}})\,.$$

Es gilt für alle $f \in D(S^{\frac{1}{2}})$, $g \in D(\hat{T}^{\frac{1}{2}})$

$$\begin{gathered}\langle \hat{T}^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}f, g\rangle = \langle f, S^{\frac{1}{2}}\hat{T}^{\frac{1}{2}}g\rangle\,, \\ |\langle \hat{T}^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}f, g\rangle| \leqq \|f\|\,\|g\|\,.\end{gathered}$$

Da $\hat{T}^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}f$ in $H(\hat{T})$ ist und da $D(\hat{T}^{\frac{1}{2}})$ in $H(\hat{T})$ dicht ist, folgt

$$\|\hat{T}^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}f\| \leqq \|f\| \quad \text{für alle } f \in D(S^{\frac{1}{2}})\,.$$

Ersetzen wir hier $f \in D(S^{\frac{1}{2}})$ durch $\hat{S}^{\frac{1}{2}}g$ mit $g \in R(S^{\frac{1}{2}})$, so erhalten wir

$$\|\hat{T}^{\frac{1}{2}}g\| = \|\hat{T}^{\frac{1}{2}}S^{\frac{1}{2}}\hat{S}^{\frac{1}{2}}g\| \leqq \|\hat{S}^{\frac{1}{2}}g\| \quad \text{für } g \in R(S^{\frac{1}{2}})\,,$$

was noch zu beweisen war.

3. Ein allgemeiner Konvergenzsatz.

Ist t eine abgeschlossene Sesquilinearform im Hilbertraum H mit

$$t(f,f) \geqq \|f\|^2 \quad \text{für alle } f \in D(t)\,,$$
$$\text{kurz: } t \geqq 1$$

(wobei $D(t)$ nicht in H dicht sein muß), und ist

$$H_t := \overline{D(t)}\,,$$

so wird durch

$$D(T) = \{f \in D(t): \text{es existiert ein } \tilde{f} \in H_t \text{ so, daß}$$
$$\text{für alle } g \in D(t) \text{ gilt } \langle \tilde{f}, g\rangle = t(f,g)\}\,,$$
$$Tf = \tilde{f} \text{ für } f \in D(T) \text{ mit obigem } \tilde{f}$$

ein selbstadjungierter Operator T in H_t definiert mit

$$\langle f, Tf\rangle \geqq \|f\|^2 \quad \text{für alle } f \in D(T), \quad \text{d.h. } T \geqq 1\,.$$

Es gilt $D(t) = D(T^{\frac{1}{2}})$ und

$$\langle f, Tg\rangle = t(f,g) \quad \text{für } f \in D(t),\ g \in D(T)\,.$$

Auf $D(t)$ wird durch

$$\|f\|_t = t(f,f)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm definiert, bezüglich der $D(t)$ vollständig ist (das ist die Abgeschlossenheit von t). Für eine Teilmenge M von $D(t)$ bezeichnen wir mit $\bar{M}^t$ die Abschließung von M in $D(t)$ bezüglich der Norm $\|.\|_t$.

Im folgenden schreiben wir für zwei nichtnegative Sesquilinearformen s und t in H $s \leqq t$, falls gilt

$$D(t) \subset D(s) \quad \text{und} \quad s(f,f) \leqq t(f,f) \quad \text{für } f \in D(t)\,.$$

Es gilt also $s \leqq t$ genau dann, wenn für die zugehörigen Operatoren S und T gilt $S \leqq T$ (im Sinne von Abschnitt 2).

SATZ 3.1. *Seien s_n, t_n, u_n und t abgeschlossene Sesquilinearformen in H, alle $\geqq 1$.*

a) *Ist $s_n \geqq s_{n+1} \geqq t$ und gilt*

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(s_n)}^t = D(t)\,,$$
$$s_n(f,g) \to t(f,g) \quad \textit{für } f, g \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(s_n)\,,$$

so gilt $\hat{S}_n \xrightarrow{s} \hat{T}$ (starke Operatorkonvergenz).

b) *Ist $u_n \leqq u_{n+1} \leqq t$ und gilt*

$$\left\{f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(u_n): \sup u_n(f,f) < \infty\right\} = D(t)\,,$$
$$u_n(f,g) \to t(f,g) \quad \textit{für } f, g \in D(t)\,,$$

so gilt $\hat{U}_n \xrightarrow{s} \hat{T}$.

c) *Sind* s_n *und* u_n *wie in* a) bzw. b) *und gilt* $u_n \leqq t_n \leqq s_n$, *so folgt* $\hat{T}_n \xrightarrow{s} \hat{T}$.

Beweis. a) Nach Bemerkung 4 aus Abschnitt 2 sind die Operatoren $\hat{S}_n$ aus $B(H)$ und nach Satz 2.2 gilt

$$\hat{S}_n \leqq \hat{S}_{n+1} \leqq \hat{T} \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}\,.$$

Deshalb ist die Folge $(\hat{S}_n)$ stark konvergent (vgl. [8, Satz 4.28 b)], d.h. es existiert ein $A \in B(H)$ mit

$$\hat{S}_n \xrightarrow{s} A, \ \hat{S}_n \leqq A \leqq \hat{T} \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}\,.$$

Es bleibt zu zeigen, daß $A = \hat{T}$ gilt. Aus $\hat{S}_n \leqq A \leqq \hat{T}$ folgt nach Satz 2.2

$$T \leqq \hat{A} \leqq S_n\,,$$

also, wenn a die abgeschlossene Sesquilinearform ist, die $\hat{A}$ erzeugt, (d.h. $D(a) = D(\hat{A}^{\frac{1}{2}})$ und $a(f, g) = \langle \hat{A}^{\frac{1}{2}} f, \hat{A}^{\frac{1}{2}} g \rangle$),

$$D(s_n) \subset D(a) \subset D(t)\,,$$

$$t(f, f) \leqq a(f, f) \leqq s_n(f, f) \quad \text{für } f \in D(s_n)\,.$$

Daraus folgt

$$\bigcup_{m \in \mathbf{N}} D(s_m) \subset D(a) \subset D(t)$$

und, wegen $s_n(f, f) \to t(f, f)$ für $f \in \bigcup_{m \in \mathbf{N}} D(s_m)$,

$$a(f, f) = t(f, f) \quad \text{für } f \in \bigcup_{m \in \mathbf{N}} D(s_m)\,.$$

Da $\bigcup_{m \in \mathbf{N}} D(s_m)$ in $D(t)$ dicht ist bezüglich $\|\,.\,\|_t$, ist auch $D(a)$ in $D(t)$ dicht bezüglich $\|\,.\,\|_t$. Die Norm $\|\,.\,\|_a$ stimmt aber in $D(a)$ mit $\|\,.\,\|_t$ überein, also ist $D(a) = D(t)$. Aus $a(f, f) = t(f, f)$ für $f \in D(a) = D(t)$ folgt mit der Polarisierungsidentität $a = t$, also $\hat{A} = T$ und somit $A = \hat{\hat{A}} = \hat{T}$.

b) Es ist $\hat{U}_n \in B(H)$ und es gilt

$$\hat{U}_n \geqq \hat{U}_{n+1} \geqq \hat{T} \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}\,.$$

Also existiert ein $B \in B(H)$ mit

$$\hat{U}_n \xrightarrow{s} B, \ \hat{U}_n \geqq B \geqq \hat{T} \quad \text{für allen} \in \mathbf{N}\,.$$

Es bleibt $B = \hat{T}$ zu beweisen. Zunächst folgt aus $\hat{U}_n \geqq B \geqq \hat{T}$

$$U_n \leqq \hat{B} \leqq T\,,$$

d.h. (wobei b die Sequilinearform ist, die $\hat{B}$ erzeugt)

$$D(t) \subset D(b) \subset D(u_n),$$

$$b(f,f) \leqq t(f,f) \quad \text{für } f \in D(t), \qquad u_n(f,f) \leqq b(f,f) \quad \text{für } f \in D(b).$$

Also ist $D(t) \subset D(b) \subset \bigcap D(u_n)$ und wegen $u_n(f,f) \to t(f,f)$ für $f \in D(t)$ gilt $b(f,g) = t(f,g)$ für $f,g \in D(t)$. Ist $f \in D(b)$, so ist $\sup u_n(f,f) \leqq b(f,f) < \infty$, also $f \in D(t)$ und somit $D(t) = D(b)$. Also ist $b = t$, d.h. $\hat{B} = T$ bzw. $B = \hat{T}$.

c) Teil c) folgt offensichtlich aus a) und b), da $\hat{S}_n \leqq T_n \leqq \hat{U}_n$ gilt.

Unter geeigneten zusätzlichen Voraussetzungen kann die Normkonvergenz der Spektralprojektionen und damit die Konvergenz der Eigenwerte und (zumindest bei einfachen Eigenwerten) die Konvergenz der zugehörigen Eigenelemente bewiesen werden.

Satz 3.2. *Seien s_n, t_n, u_n und t wie in Satz 3.1. Außerdem existiere eine abgeschlossene Form $v \geqq 1$ mit $t_n \geqq v$ für alle n so, daß das wesentliche Spektrum des zugehörigen selbstadjungierten Operators V in $[\mu, \infty)$ enthalten ist. Dann gilt*

$$\|E_{T_n}(\lambda) - E_T(\lambda)\| \to 0 \quad \textit{für } n \to \infty \textit{ und alle } \lambda < \mu, \textit{ die nicht Eigenwerte von } T \textit{ sind.}$$

Beweis. $\hat{V}$ und $\hat{T}_n$ sind in $B(H)$ mit Norm $\leqq 1$. Das wesentliche Spektrum von $\hat{V}$ ist in $[0, \mu^{-1}]$ enthalten.

Nach [9] gilt: »Seien A_n, A und B beschränkte selbstadjungierte Operatoren, B_- sei kompakt und es gelte $A_n \geqq B$ und $A_n \xrightarrow{s} A$. Dann hat A unterhalb 0 ein rein diskretes Spektrum und es gilt

$$\|E_{A_n}(\lambda) - E_A(\lambda)\| \to 0 \quad \text{für alle } \lambda < 0, \text{ die nicht Eigenwerte von } A \text{ sind.«}$$

Ersetzen wir in diesem Ergebnis

$$A_n \text{ durch } \mu^{-1} - \hat{T}_n,$$

$$A \text{ durch } \mu^{-1} - \hat{T},$$

$$B \text{ durch } \mu^{-1} - \hat{V},$$

so ergibt sich sofort das gewünschte Resultat, wenn man beachtet, daß gilt

$$E_{T_n}(\lambda) = I - E_{\hat{T}_n}(\lambda^{-1}) = E_{-\hat{T}_n}(-\lambda^{-1}) = E_{\mu^{-1}-\hat{T}_n}(\mu^{-1} - \lambda^{-1}),$$

$$E_T(\lambda) = E_{\mu^{-1}-\hat{T}}(\mu^{-1} - \lambda^{-1}).$$

4. Anwendung auf elliptische Differentialoperatoren mit variablem Gebiet.

Für halbbeschränkte elliptische Differentialoperatoren erlauben die

Resultate aus Abschnitt 3 den Beweis der stetigen Abhängigkeit der diskreten Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen vom Gebiet. Dies ist im Prinzip für Operatoren beliebiger Ordnung unter sehr verschiedenen Voraussetzungen möglich. Es ist jedoch nicht das Ziel dieser Arbeit, ein möglichst allgemeines Resultat zu beweisen. Statt dessen betrachten wir als Beispiel Operatoren der Form $-\Delta+q$ mit Dirichlet-Randbedingung (genauer: die Friedrichsfortsetzung von $-\Delta+q$ auf C_0^∞). Wir beschränken uns auch darauf, das Gebiet zu variieren. Ohne große Schwierigkeit ist es möglich, auch das Potential q zu variieren; dies führt allerdings zu einem erheblichen Mehraufwand in der Darstellung. Keinerlei Schwierigkeiten macht es, den Hauptteil $-\Delta$ durch einen allgemeineren elliptischen Hauptteil zu ersetzen.

(4.1). Sei $G_0 \subset \mathbf{R}^m$ offen (beschränkt oder unbeschränkt) und $q\colon G_0 \to \mathbf{R}$ eine meßbare Funktion mit $q \in L_{1,\mathrm{lok}}(G_0)$, d.h. q sei über jede kompakte Teilmenge von G_0 summierbar.

Im Hilbertraum $H = L_2(G_0)$ sei die Sesquilinearform t_0' definiert durch

$$D(t_0') = C_0^\infty(G_0)\,,$$

$$t_0'(f,g) = \int_{G_0} \{(\operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x)) + q(x)\overline{f(x)}g(x)\}\,dx\,.$$

(4.2) Die Form t_0' sei nach unten halbbeschränkt und abschließbar; o.E. werden wir stets annehmen, daß

$$t_0'(f,f) \geqq \|f\|^2 \qquad \text{für alle } f \in C_0^\infty(G_0) \text{ gilt}\,.$$

Die Halbbeschränktheit von t_0' ist z.B. sicher dann gewährleistet, wenn für den negativen Teil q_- von q gilt

(4.3) $|q_-|^{\frac{1}{2}} \in M_\varrho(\mathbf{R}^m)$ mit einem $\varrho<2$ (vgl. [8, § 10.3]). Unter dieser Voraussetzung gilt nämlich für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ (vgl. [8, Satz 10.17 b])

$$\int_{G_0} q(x)|f(x)|^2\,dx \geqq \int_{G_0} q_-(x)|f(x)|^2\,dx \geqq -\varepsilon\|\operatorname{grad} f\|^2 - C_\varepsilon\|f\|^2\,.$$

Hieraus folgt

$$t_0'(f,f) \geqq (1-\varepsilon)\|\operatorname{grad} f\|^2 - C_\varepsilon\|f\|^2 \geqq -C_\varepsilon\|f\|^2; \tag{4.4}$$

das ist die Halbbeschränktheit von t_0'.

Ist (4.3) erfüllt und gilt außerdem $t_0' \geqq 1$, so ist t_0' auch abschließbar: Sei (f_n) eine t_0'-Cauchyfolge mit $f_n \to 0$ in $L_2(G_0)$. Aus (4.4) folgt dann, daß auch (grad f_n) eine Cauchyfolge in $L_2(G_0)$ ist, d.h. (f_n) ist eine Cauchyfolge bezüglich $\|\,.\,\|_s$ mit

$$s(f,g) = \int_{G_0} \{(\operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x)) + \overline{f(x)}g(x)\}\, dx\,.$$

Da s abschließbar ist, folgt (wegen $f_n \to 0$) auch grad $f_n \to 0$. Mit

$$\begin{aligned}\|q_+^{\frac{1}{2}} f\|^2 &= t_0'(f,f) - \int_{G_0} \{|\operatorname{grad} f(x)|^2\, dx + q_-|f(x)|^2\}\, dx \\ &\leqq t_0'(f,f) - (1-\varepsilon)\int_{G_0} |\operatorname{grad} f(x)|^2\, dx + C_\varepsilon \|f\|^2\end{aligned}$$

folgt, daß auch $(q_+^{\frac{1}{2}} f_n)$ eine Cauchyfolge in $L_2(G_0)$ ist. Zusammen mit $f_n \to 0$ folgt hieraus $q_+^{\frac{1}{2}} f_n \to 0$ und somit insgesamt $t_0'(f_n, f_n) \to 0$, d.h. t_0' ist abschließbar.

Sei t_0 die Abschließung von t_0'. Diese Form definiert in eindeutiger Weise einen selbstadjungierten Operator T_0 in $H = L_2(G_0)$ mit $T_0 \geqq 1$,

$$\begin{aligned}D(T_0) &= \{f \in D(t_0) : \text{es existiert ein } h \in H \text{ mit} \\ &\qquad\qquad \langle h, g\rangle = t_0(f,g) \text{ für alle } g \in D(t_0)\}\,, \\ T_0 f &= h \text{ für } f \in D(T_0) \text{ mit obigem } h\,.\end{aligned}$$

T_0 ist gleichzeitig die Friedrichsfortsetzung von T_0' mit $D(T_0') = C_0^\infty(G_0)$, $T_0' = -\Delta f + qf$.

Wir betrachten im folgenden offene Teilmengen G_n und G von G_0, wobei die G_n in geeignetem Sinne »gegen G konvergieren« sollen. Mit t_n und t bzw. T_n und T bezeichnen wir die analog zu t_0 und T_0 definierten Formen und Operatoren in $L_2(G_n)$ und $L_2(G)$. Wir werden zeigen, daß unter geeigneten Voraussetzungen an q, G_n und G folgt $\hat{T}_n \to \hat{T}$ im Sinne der starken Konvergenz.

Setzen wir zusätzlich voraus, daß T_0 unterhalb μ diskretes Spektrum hat, so folgt (wegen $T_0 \leqq T_n$) mit Hilfe von Satz 3.2

$$\|E_{T_n}(\lambda) - E_T(\lambda)\| \to 0, \qquad n \to \infty$$

für alle $\lambda < \mu$, die nicht Eigenwerte von T sind (und somit die Konvergenz der Eigenwerte unterhalb μ und die Normkonvergenz der zugehörigen Eigenfunktionen in $L_2(G_0)$).

Falls G_0 nicht in natürlicher Weise gegeben ist, kann man z.B. $G_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ wählen, gelegentlich auch $G_0 = \mathbb{R}^m$; da nicht $q \in L_{1,\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^m)$ vorausgesetzt ist, kann jedoch nicht immer $G_0 = \mathbb{R}^m$ gewählt werden (i. allg. auch dann nicht, wenn man q außerhalb von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ durch Null fortsetzt. — Bei Verkleinerung des Gebietes G_0 wird i. allg. μ wachsen und somit das Ergebnis schärfer.

Wir betrachten zunächst den Fall, in dem G von innen approximiert wird; in diesem Fall liegt es natürlich nahe $G=G_0$ zu setzen. Im einfachsten Fall nehmen wir zunächst an, daß jede kompakte Teilmenge von G für hinreichend großes n in G_n enthalten ist. Für wachsende Folgen (G_n) mit $G=\bigcup G_n$ ist dies stets erfüllt; der Beweis wird dann noch etwas einfacher.

Satz 4.5. *Sei $G=G_0$ und* (4.1) *und* (4.2) *seien erfüllt. Es gelte $G_n\subset G$ und für jede kompakte Teilmenge C von G_0 existiere ein $n(C)\in\mathbb{N}$ mit $C\subset G_n$ für $n\geqq n(C)$. Dann gilt $\hat{T}_n \xrightarrow{s} \hat{T}$.*

Bemerkung. Da q nur bezüglich G lokal integrierbar sein muß, darf es am Rand von G beliebig »singulär« sein, wenn nur die Halbbeschränktheit und Abschließbarkeit (4.2) gewährleistet sind. — Als einfachster Spezialfall ergibt sich, daß der diskrete untere Teil des Spektrums eines Schrödingeroperators auf $\mathbb{R}^m$ durch die Spektren der entsprechenden Operatoren auf kompakten Teilmengen (z.B. Kugeln) approximiert wird:

Beweis. Wir setzen

$$\tilde{G}_n := \text{offener Kern von } \bigcap_{k=n}^{\infty} G_k .$$

Dann ist $(\tilde{G}_n)$ wachsend und erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Satzes. Seien s_n die durch $\tilde{G}_n$ erzeugten Formen. Um $\hat{T}_n \xrightarrow{s} \hat{T}$ zu beweisen, genügt es nach Satz 3.1c (wobei $u_n=t$ gesetzt wird)

$$D(t) \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(s_n)}^{t}$$

zu beweisen; die umgekehrte Relation ist offensichtlich.

Da $D(t)$ der $\|.\|_t$-Abschluß von $C_0^\infty(G)$ ist, ergibt sich die gewünschte Beziehung unmittelbar aus

$$C_0^\infty(G) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(s_n) \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D(s_n)}^{t}$$

was auf Grund der Eigenschaften der Folge $(\tilde{G}_n)$ offensichtlich ist.

Der vorstehende sehr einfache Satz 4.5 erlaubt nicht, daß die G_n für beliebig große n »Löcher« im Innern von G haben. Für $m\geqq 2$ läßt dies der folgende Satz zu. Dazu sei für eine kompakte Teilmenge K von $\mathbb{R}^m$ die *Kapazität* cap (K) definiert durch

$$\operatorname{cap}(K) := \inf\{\|\varphi\|_1 : \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m),\ \varphi(x)=1 \text{ auf einer Umgebung von } K\},$$

wobei $\|\,.\,\|_1$ die L_2-Sobolevnorm der Ordnung 1 ist (dies ist ein Spezialfall eines allgemeineren Kapazitätsbegriffs $\operatorname{cap}_{p,s}(K) = \inf\{\|\varphi\|_{p,s}: \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m),\ \varphi(x)=1$ auf einer Umgebung von $K\}$, wobei $\|\,.\,\|_{p,s}$ die L_p-Sobolevnorm der Ordnung s ist; vgl. auch J. Frehse [3]). — Wir schreiben $g \in M_{\varrho,\mathrm{lok}}(G)$, wenn für jede kompakte Teilmenge C von G_0 gilt $\chi_C g \in M_\varrho(\mathbf{R}^m)$, wobei χ_C die charakteristische Funktion von C ist. Diese Bedingung ist (unabhängig von ϱ) sicher dann erfüllt, wenn g lokal beschränkt ist; Singularitäten am Rand von G sind zulässig.

Satz 4.6. *Sei $G = G_0$ und (4.1) und (4.2) seien erfüllt. Außerdem sei*

$$|q|^{\frac{1}{2}} \in M_{\varrho,\mathrm{lok}}(G) \text{ für ein } \varrho < 2\,.$$

Es gelte $G_n \subset G$ und für jede kompakte Teilmenge C von G sei

$$\sum_n \operatorname{cap}(C \setminus G_n) < \infty\,.$$

Dann gilt $\hat{T}_n \xrightarrow{s} \hat{T}$.

Bemerkung. Aus Satz 4.8 entnimmt man, daß es genügt $\operatorname{cap}(C\setminus G_n) \to 0$ vorauszusetzen.

Beweis von Satz 4.6. Die Formen s_n seien definiert durch

$$D(s_n) = \bigcap_{k=n}^{\infty} D(t_k)\,.$$

Wie im Beweis von Satz 4.5 genügt es

$$C_0^\infty(G) \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} D(s_n)}^{\,t}$$

zu beweisen.

Sei $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $C := \operatorname{supp}\varphi$. Nach Voraussetzung gibt es nichtnegative Funktionen $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ mit

$$\varphi_n(x) = 1 \quad \text{auf einer Umgebung von } C\setminus G_n \text{ und}$$
$$\sum_n \|\varphi_n\|_1 < \infty\,.$$

Für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist also die Reihe $\sum_{k=n}^\infty \varphi_k$ in $W_{2,1}(\mathbf{R}^m)$ konvergent und für

$$\tilde{\Psi}_n := \sum_{k=n}^{\infty} \varphi_k$$

gilt

$$\tilde{\Psi}_n(x) \geqq 1 \text{ fast überall auf einer Umgebung von } C \setminus G_k \text{ für } k \geqq n\,,$$

$$\|\tilde{\Psi}_n\|_1 \leqq \alpha_n := \sum_{k=n}^{\infty} \|\varphi_k\|_1 \to 0 \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

Definieren wir

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \tilde{\Psi}_n(x) \geqq 1\,, \\ \tilde{\Psi}_n(x) & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

so gilt $\Psi_n(x) = 1$ fast überall in einer Umgebung von $C \setminus G_k$ für $k \geqq n$, $\|\Psi_n\|_1 \leqq \alpha_n$ (vgl. z.B. H. Leinfelder–C. G. Simader [4, Appendix, Corollary 1]). Daraus folgt

$$(1 - \Psi_n)\varphi \in W_{2,1}(G_k) \quad \text{für } k \geqq n\,,$$

$$(1 - \Psi_n(x))\varphi(x) = 0$$

fast überall außerhalb einer kompakten Teilmenge von G_k für $k \geqq n$, also

$$(1 - \Psi_n)\varphi \in D(s_n)$$

und

$$\|\varphi - (1 - \Psi_n)\varphi\|_1 = \|\Psi_n \varphi\|_1 \leqq C(\varphi)\|\Psi_n\|_1 \to 0 \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

Da $\chi_C |q|^{\frac{1}{2}} \in M_\varrho(\mathbf{R}^m)$ gilt, ist über C die t-Norm äquivalent zu $\|\,.\,\|_1$ (vgl. [8, § 10]). Es gilt also $(1 - \Psi_n)\varphi \to \varphi$ bezüglich der t-Norm. Also ist φ im t-Abschluß von $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} D(s_n)$.

Etwas mühsamer ist der Fall, in dem G von außen approximiert wird. An den Stellen, wo der Rand von G in G_n enthalten ist, muß der Rand eine gewisse Regularität besitzen. Außerdem müssen wir etwas mehr über q voraussetzen.

SATZ 4.7. *Es gelte* (4.1), (4.2) *und* (4.3), *und es existiere eine abgeschlossene Teilmenge A von $\mathbf{R}^m$ mit*

$$|q|^{\frac{1}{2}} \in M_{\varrho,\mathrm{lok}}(\mathbf{R}^m \setminus A)\,.$$

Es sei $G_n \supset G$, für jede kompakte Teilmenge C von $\mathbf{R}^m$ gelte

$$\sum_n \mu(C \cap (G_n \setminus G)) < \infty$$

(μ = *Lebesguemaß*) *und $\bar{G}$ besitze eine lokal endliche offene Überdeckung $(U_j\}$ mit*

$$A \subset U_1, \ U_1 \cap G_n \subset G \quad \textit{für alle } n;$$

Zu jedem $j > 1$ existiere ein $a_j \in \mathbf{R}^m$ mit

$$(U_j \cap \bar{G}) + ta_j \subset G \quad \textit{für } t \in (0,1]$$

(*Segmentbedingung*). *Dann gilt* $\hat{T}_n \xrightarrow{s} \hat{T}$.

Bemerkung. Die Funktion q und der Rand von G_0 dürfen in U_1 beliebige Singularitäten haben. Dafür muß aber in diesem Bereich $U_1 \cap \partial G_n = U_1 \cap \partial G$ für alle n gelten (dies folgt aus $G \subset G_n$ und $U_1 \cap G_n \subset G$). Der folgende Satz 4.8 wird allerdings zulassen, daß G in U_1 von innen durch G_n approximiert wird. — Aus Satz 4.8 entnimmt man, daß es genügt, $\mu(C \cap (G_n \setminus G)) \to 0$ vorauszusetzen.

Beweis von Satz 4.7. Es sei

$$\hat{G}_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} G_k$$

und u_n seien die zugehörigen Formen. Nach Satz 3.1c (wobei $s_n = t$ gesetzt wird) genügt es

$$D(t) \supset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} D(u_n)$$

zu beweisen (die umgekehrte Relation ist wegen $D(t) \subset D(u_n)$ selbstverständlich).

Wir charakterisieren zunächst die Elemente aus $D(t_0)$. Nach Definition von t_0 ist $D(t_0)$ der t_0-Abschluß von $C_0^\infty(G_0)$. Da $|q_-|^{\frac{1}{2}} \in M_\varrho(\mathbf{R}^m)$ ist, gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(G_0)$

$$-\int q_- |\varphi|^2 \, dx = \| |q_-|^{\frac{1}{2}} \varphi \|^2 \leqq \varepsilon \|\text{grad}\,\|^2 + C_\varepsilon \|\varphi\|^2$$

(vgl. [8, Satz 10.17b]). Deshalb konvergiert eine Folge (φ_n) aus C_0^∞ genau dann bezüglich der t_0-Norm gegen ein $f \in D(t_0)$, wenn gilt:

(i) $\varphi_n \to f$ in $L_2(G_0)$,
(ii) $(\text{grad}\,\varphi_n)$ ist Cauchyfolge in $L_2(G_0)^m$,
(iii) $(q_+^{\frac{1}{2}} \varphi_n)$ ist Cauchyfolge in $L_2(G_0)$.

Eine Funktion f ist folglich genau dann in $D(t_0)$, wenn eine Folge (φ_n) aus $C_0^\infty(G_0)$ mit den obigen Eigenschaften existiert. Dann gilt

$$f \in W_{2,1}(G_0) \quad \text{und} \quad q_+^{\frac{1}{2}} f \in L_2(G_0)\,.$$

Sei $\Psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ mit

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leqq 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geqq 2 \end{cases}, \quad 0 \leqq \Psi(x) \leqq 1\,,$$

$$\Psi_k(x) = \Psi(x/k) \quad \text{für } k \in \mathbf{N}\,.$$

Aus der obigen Charakterisierung von $D(t_0)$ folgt für $f \in D(t_0)$

$$\Psi_k f \in D(t_0) \quad \text{für alle } k \in \mathbf{N},$$

$$\Psi_k f \to f \text{ bezüglich der } t_0\text{-Norm für } k \to \infty .$$

Sei jetzt

$$f \in \bigcap D(u_n) \subset \bigcap L_2(\hat{G}_n) = L_2(G)$$

(bei der letzten Identität haben wir $\mu(C \cap (\hat{G}_n \setminus G)) \to 0$ benutzt, für jede kompakte Teilmenge C von $\mathbf{R}^m$). Dann ist

$$f \in D(t_0) \text{ mit } f(x) = 0 \text{ f.ü. in } \mathbf{R}^m \setminus G .$$

Für $k \in \mathbf{N}$ sei

$$g_k := \Psi_k f .$$

Es gilt

$$\|g_k - f\|_{t_0} \to 0 \quad \text{für } k \to \infty ,$$

$$g_k(x) = 0 \quad \text{f.ü. in } \mathbf{R}^m \setminus G ,$$

$$g_k \text{ hat kompakten Träger} .$$

Es genügt zu zeigen, daß diese g_k in $D(t)$ liegen. Dazu sei im folgenden $g = \Psi f$ eines dieser $g_k = \Psi_k f$.

Sei $r \in \mathbf{N}_0$ so gewählt, daß $U_1, \ldots, U_r$ eine Überdeckung des Trägers von g bilden; $\{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_r\}$ sei eine zugeordnete Zerlegung der Eins. Dann gilt $\vartheta_j g \in D(t_0)$ und

$$\vartheta_j(x) g(x) = 0 \text{ f.ü. in } \mathbf{R}^m \setminus (G_0 \cap U_j) ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \vartheta_j g = g .$$

Wir zeigen zuerst $\vartheta_1 g \in D(t)$. Da

$$f \in \bigcap_n D(u_n) \subset D(t_0)$$

gilt, gibt es eine Folge (φ_n) aus $C_0^\infty(\hat{G}_n) \subset C_0^\infty(G_0)$, die bezüglich der t_0-Norm gegen f konvergiert. Nach der obigen Charakterisierung von $D(t_0)$ gilt also

$$\vartheta_1 \Psi \varphi_n \in C_0^\infty(U_1 \cap \hat{G}_n) \subset C_0^\infty(G)$$

$$\vartheta_1 \Psi \varphi_n \to \vartheta_1 \Psi f = \vartheta_1 g \text{ bezüglich } \|\,.\,\|_t ,$$

d.h. es gilt $\vartheta_1 g \in D(t)$.

Es bleibt $\vartheta_j g \in D(t)$ für $j > 1$ zu beweisen: Die Elemente $\vartheta_j g$ für $j > 1$ sind in

$D(t_0)$ und verschwinden f.ü. außerhalb $U_j \cap G$. Da $q \in M_{\varrho,\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^m \setminus A)$ gilt, stimmen in U_j die t_0-Topologie und die $\|.\|_1$-Topologie überein (dabei haben wir o.E. angenommen, daß $\overline{U_j} \cap A = \emptyset$ gilt für $j > 1$). Für hinreichend kleine $t > 0$ ist

$$(\vartheta_j g)(.-ta_j) \in W_{2,1}(U_j \cap G)$$

mit kompaktem Träger $U_j \cap G$, und es gilt für $t \to 0$

$$\vartheta_j g(.-ta_j) \to \vartheta_j g \quad \text{bezüglich } \|.\|_1 .$$

Durch Glättung kann man $\vartheta_j g(.-ta_j)$ durch Funktionen aus $C_0^\infty(U_j \cap G)$ bezüglich $\|.\|_1$ approximieren. Also sind die Elemente $\vartheta_j g$ durch Elemente aus $C_0^\infty(G)$ im Sinne der t_0-Topologie approximierbar, d.h. es gilt $\vartheta_j g \in D(t)$ auch für $j > 1$.

Durch eine Kombination der Sätze 4.6 und 4.7 können wir nun den allgemeinen Fall behandeln. Auch für die Konvergenz von innen oder von außen erhalten wir dabei schärfere Resultate (vgl. die Bemerkungen im Anschluß an die obigen Sätze).

SATZ 4.8. *Seien* (4.1), (4.2) *und* (4.3) *erfüllt, und es existiert eine abgeschlossene Teilmenge A von $\mathbb{R}^m$ mit*

$$|q|^{\frac{1}{2}} \in M_{\varrho,\mathrm{lok}}(\mathbb{R}^m \setminus A) \quad \textit{für ein } \varrho < 2 .$$

Für jede kompakte Teilmenge C von G gelte

$$\operatorname{cap}(C \setminus G_n) \to 0 \quad \textit{für } n \to \infty .$$

Für jede kompakte Teilmenge C von $\mathbb{R}^m$ gelte

$$\mu(C \cap (G_n \setminus G)) \to 0 \quad \textit{für } n \to \infty$$

und G besitze eine lokal endliche offene Überdeckung $\{U_j\}$ mit

$$A \subset U_1, \; U_1 \cap G_n \subset G \quad \textit{für alle } n;$$

zu jedem $j > 1$ existiere ein $a_j \in \mathbb{R}^m$ mit

$$(U_j \cap \bar{G}) + ta_j \subset G \quad \textit{für } t \in (0,1] .$$

Dann gilt $\hat{T}_n \xrightarrow{s} \hat{T}$.

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, daß jede Teilfolge von $(\hat{T}_n)$ eine stark gegen $\hat{T}$ konvergente Teilfolge enthält. Sei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\mathbb{N}$. Mit dem Diagonalfolgenverfahren findet man eine Teilfolge $(n_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ von (n_k) so, daß gilt:

(i) Für jede kompakte Teilmenge C von G ist

$$\sum_l \operatorname{cap}(C \setminus G_{n_{k_l}}) < \infty ,$$

(ii) Für jede kompakte Teilmenge C von $\mathbf{R}^m$ ist

$$\sum_l \mu(C \cap (G_{n_{k_l}} \setminus G)) < \infty .$$

Durch Anwendung der Sätze 4.6 bzw. 4.7 auf die Folgen

$$(G_{n_{k_l}} \cap G) \text{ bzw. } (G_{n_{k_l}} \cup G)$$

mit den zugehörigen Formen s_l bzw. u_l und Operatoren S_l bzw. U_l folgt $\hat{U}_l \xrightarrow{s} \hat{T}$ bzw. $\hat{S}_l \xrightarrow{s} \hat{T}$. Wegen $\hat{S}_l \leqq \hat{T}_{n_{k_l}} \leqq \hat{U}_l$ folgt $\hat{T}_{n_{k_l}} \xrightarrow{s} \hat{T}$.

5. Schlußbemerkungen.

Zum Schluß wollen wir noch deutlich machen, daß die in Abschnitt 4 bewiesenen Aussagen nur eine recht zufällige Auswahl aus vielen denkbaren Resultaten darstellen. So ist z.B. die folgende einfache Situation nicht erfaßt:

$$\text{Sei } |q|^{1/2} \in M_\varrho(\mathbf{R}^2) \text{ für ein } \varrho < 2,\ s \in [-1,1),$$

$$G_n = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x|<1,\ x_2 \neq 0\} \cup \left\{(x_1,0) : s < x_1 < s+\frac{1}{n}\right\},$$

$$G = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x|<1,\ x_2 \neq 0\} .$$

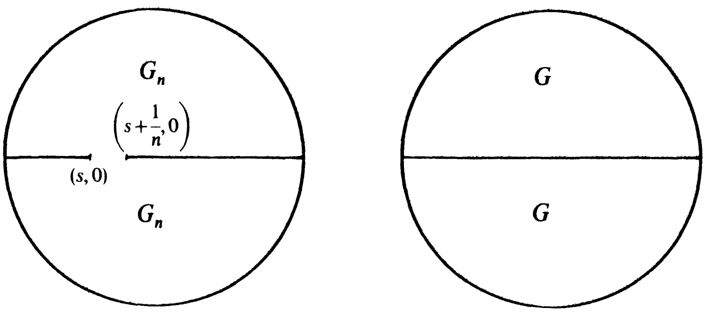

Fig. 1.

Ist $f \in \bigcap D(t_n)$, so gibt es eine Folge (φ_n) mit $\varphi_n \in C_0^\infty(G_n)$ und $\|\varphi_n - f\|_1 \to 0$. Es sei $\eta \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ mit

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| \leqq 1 \\ 1 & \text{für } |t| \geqq 2 \end{cases}, \quad 0 \leqq \eta(t) \leqq 2 .$$

Damit definieren wir eine Folge (Ψ_n) aus $C^\infty(\mathsf{R}^2)$ durch

$$\Psi_n(x) = \eta(n|x-(s,0)|)\,.$$

Dann ist $\Psi_n\varphi_n \in C_0^\infty(G)$ und est gilt

$$\Psi_n\varphi_n \to f \quad \text{in } L_2(G)\,.$$

Um $\Psi_n\varphi_n \to f$ in $W_{2,1}(G)$ zu beweisen, genügt es,

$$\int |\operatorname{grad}[(1-\Psi_n)\varphi_n]|^2\,dx \to 0$$

zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int |\operatorname{grad}[(1-\Psi_n)\varphi_n](x)|^2\,dx\\
&= \int |(1-\Psi_n(x))\operatorname{grad}\varphi_n(x) - \varphi_n(x)\operatorname{grad}\Psi_n(x)|^2\,dx\\
&\leqq \int_{|x-(s,0)|\leqq\frac{2}{n}} |\operatorname{grad}\varphi_n(x)|^2\,dx + Cn^2\int_{\frac{1}{n}\leqq|x-(s,0)|\leqq\frac{2}{n}} |\varphi_n(x)|^2\,dx\,,
\end{aligned}$$

wobei C von n unabhängig ist. Das erste Integral auf der rechten Seite strebt für $n \to \infty$ gegen 0. Es bleibt der zweite Term abzuschätzen: Für $x = (s,0)+(-r\cos\gamma, r\sin\gamma)$ gilt

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x)| &= |\varphi_n((s,0)+(-r\cos\gamma, r\sin\gamma))|\\
&= \left|\int_0^\gamma \frac{\partial}{\partial\varrho}\varphi_n((s,0)+(-r\cos\varrho, r\sin\varrho))\,d\varrho\right|\\
&\leqq \int_0^\gamma r|\operatorname{grad}\varphi_n((s,0)+(-r\cos\varrho, r\sin\varrho))|\,d\varrho\\
&\leqq (2\pi)^{\frac{1}{2}} r\left\{\int_0^{2\pi} |\operatorname{grad}\varphi_n((s,0)+(-r\cos\varrho, r\sin\varrho))|^2\,d\varrho\right\}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{|x-(s,0)|\leqq\frac{2}{n}} |\varphi_n(x)|^2\,dx\\
&\leqq 2\pi\int_0^{2/n}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\operatorname{grad}\varphi_n((s,0)+(-r\cos\varrho, r\sin\varrho))|^2\,d\varrho\,d\gamma r^3\,dr\\
&\leqq (2\pi)\left(\frac{2}{n}\right)^2\int_0^{2\pi}\int_{|x-(s,0)|\leqq\frac{2}{n}} |\operatorname{grad}\varphi_n(x)|^2\,dx\,d\gamma\\
&= \left(\frac{4\pi}{n}\right)^2\int_{|x-(s,0)|\leqq\frac{2}{n}} |\operatorname{grad}\varphi_n(x)|^2\,dx = o((4\pi/n)^2)\,.
\end{aligned}$$

Bei der letzten Identitäten haben wir benutzt, daß $(\operatorname{grad}\varphi_n)$ in $(L_2)^2$ konvergiert. Damit konvergiert in der obigen Abschätzung auch der zweite Term gegen Null.

Sicher wäre es möglich, Satz 4.5 so zu modifizieren, daß auch derartige Fälle erfaßt werden. Die Bedingungen würden dann aber sehr unübersichtlich werden. Es scheint deshalb vernünftiger, es bei diesen Bemerkungen zu belassen. In konkreten Fällen wäre dann eben zu prüfen, ob man den Beweis anpassen kann. So kann man z.B. leicht sehen, daß in dem zuletzt behandelten Beispiel der Schnitt nicht gradlinig verlaufen muß.

LITERATUR

1. I. Babuska and R. Výborný, *Continuous dependence of eigenvalues on the domain*, Czechoslovak Math. J. 15 (1965), 169–178.
2. R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik* II, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1968.
3. J. Frehse, *Capacity methods in the theory of partial differential equations*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 84 (1982), 1–14.
4. H. Leinfelder and C. G. Simader, *Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials*, Math. Z. (1981), 1–19.
5. R. Rannacher, *Zur Stabilität diskreter Teilspektren singulärer Differentialoperatoren zweiter Ordnung gegenüber Störungen der Koeffizienten und der Definitionsgebiete*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 43 (1975), 198–215.
6. B. Simon, *A canonical decomposition for quadratic forms with applications to monotone convergence theorems*, J. Funct. Anal. 28 (1978), 377–385.
7. F. Stummel, *Perturbation of domains in elliptic boundary value problems*, in Applications of methods of functional analysis to problems in mechanics, (Joint Sympos. IUTAM/IMU, Marseille, 1975), eds. P. Germain and B. Nayroles (Lecture Notes in Math. 503) pp. 110–135. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg – New York, 1976.
8. J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, Teubner, Stuttgart, 1976.
9. J. Weidmann, *Continuity of the eigenvalues of self-adjoint operators with respect to the strong operator topology*, Integral Equations Operator Theory 3 (1980), 138–142.

FACHBEREICH MATHEMATIK
DER UNIVERSITÄT FRANKFURT
POSTFACH 11 19 32
D-6000 FRANKFURT AM MAIN
W. GERMANY