MATH. SCAND. 54 (157-169

SEMI-GROUPES DE MOMENTS SUR UN CONVEXE COMPACT DE $\mathbf{R}^p$

H. BUCHWALTER

La question des semi-groupes de moments, abordée et résolue dans [1] pour le cas d'un intervalle quelconque de $\mathbf{R}$, borné ou non mais stable par l'opération produit $p(x,y)=xy$, et aussi pour le cas du cube $I^p=[0,1]^p$ de $\mathbf{R}^p$, n'a pas été posée pour le cas plus général d'un convexe compact K de $\mathbf{R}^p$, supposé d'intérieur non vide. En fait le problème ne semble présenter aucun intérêt lorsqu'on ne suppose pas vérifiée une condition de stabilité multiplicative sur K, ainsi que la condition $\mathbf{1}=(1,1,\ldots,1)\in K$. Avec ces deux hypothèses sur K, le problème devient au contraire extrêmement intéressant et sa résolution, qui s'appuie sur les critères donnés par Maserick [8] et Cassier [5], n'est pas pour autant évidente.

Définition 1. Soit K un convexe compact de $\mathbf{R}^p$, d'intérieur non vide. On dit que K est stable lorsqu'il vérifie les deux conditions

a) On a $\mathbf{1}=(1,1,\ldots,1)\in K$.
b) Pour tous $x,y\in K$ on a $p(x,y)=xy=(x_jy_j)\in K$.

Exemples. Le cube I^p est évidemment stable, de même d'ailleurs qu'un pavé du type $K=\prod_{m=1}^p[-a_m,1]$ avec $0\leqq a_m\leqq 1$. Les simplexes $S=\{x,0\leqq x_p\leqq x_{p-1}\leqq\ldots\leqq x_1\leqq 1\}$ et $S'=\{x,0\leqq x_1\leqq\ldots\leqq x_p\leqq 1\}$ le sont aussi. Pour $p=2$ le convexe compact $K_{r,s}$, associé à deux nombres r,s tels que $0<s\leqq 1\leqq r$, $s<r$, et défini par

$$K_{r,s} = \{(x,y)\in I^2\ ;\ x^r\leqq y\leqq x^s\}$$

est un exemple de compact stable non polyédral. On voit donc par là que la situation peut être assez variée.

Si la description exacte d'un compact stable paraît difficile à donner, on peut toutefois préciser:

Proposition 1. *Soit K un compact stable de $\mathbf{R}^p$. Alors K est contenu dans le cube $J^p=[-1,+1]^p$ et il contient la diagonale $[0,\mathbf{1}]$ du cube I^p.*

Reçu le 11 mars 1983; révisé le 15 mai 1983.

PREUVE. Par compacité de K il est clair que K ne peut contenir aucun point x admettant une coordonnée x_m telle que $|x_m| > 1$. Par le fait que l'intérieur de K est non vide il existe un point $x = (x_m) \in K$ tel que $|x_m| < 1$ pour tout m. Alors le point x^n tend vers 0 quand $n \to \infty$, donc $0 \in K$ et ainsi $[0,1] \subset K$.

On rappelle maintenant que la stabilité de K permet de définir, sur l'espace $M(K)$ des mesures signées sur K, un produit de convolution multiplicatif $\mu \Box \nu = p(\mu \otimes \nu)$, qui conserve la positivité des mesures et qui est tel que le $n^{\text{ième}}$ moment $\alpha_n(\mu \Box \nu)$ n'est autre que $\alpha_n(\mu)\alpha_n(\nu)$. Il suit facilement de là, par le raisonnement élémentaire de [3], que l'on a:

PROPOSITION 2. *Soit K un compact stable de $\mathbb{R}^p$. On a alors:*

a) *Pour toutes suites $\alpha = (\alpha_n)$ et $\beta = (\beta_n)$, $n \in \mathbb{N}^p$, de moments sur K, la suite produit $\alpha\beta = (\alpha_n \beta_n)$ est une suite de moments sur K.*
b) *Pour toute suite $\alpha = (\alpha_n)$ de moments sur K la suite exponentielle $e^{s\alpha} = [\exp(s\alpha_n)]$ est une suite de moments sur K pour tout $s \geqq 0$.*

Le problème se pose donc plus généralement d'obtenir une caractérisation de toutes les suites $\alpha = (\alpha_n)$ qui engendrent un semi-groupe de moments, c'est-à-dire qui vérifient la conclusion de b); c'est le *problème des semi-groupes de moments sur K*.

Pour résoudre ce problème il convient d'introduire la notation suivante: pour toute suite $\alpha = (\alpha_n)$, n $\in \mathbb{N}^p$, et tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_p]$, on note $P(\alpha)$ la suite $\beta = (\beta_n)$ définie par

$$(1) \qquad \beta_n = \sum u_r \alpha_{n+r} \quad \text{si } P = \sum u_r X^r .$$

Il est clair que pour deux polynômes P et Q on a l'égalité

$$(2) \qquad P(Q\alpha) = (PQ)(\alpha) = Q(P\alpha)$$

et de même que dans [4], on a, par calcul des moments, le lemme:

LEMME 1. *Soit $\alpha = (\alpha_n)$, $n \in \mathbb{N}^p$, une suite quelconque et P, Q deux polynômes tels que les suites $\beta = P(\alpha)$ et $\gamma = Q(\alpha)$ soient les suites des moments des deux mesures respectives σ et τ sur K. Alors les deux mesures $Q d\sigma$ et $P d\tau$ coïncident.*

Rappelons encore les résultats obtenus par Maserick [8] et Cassier [5], et résolvant le problème des moments sur K. On désigne par $A(K) = \mathbb{R}_1[X_1, \ldots, X_p]$ l'espace des formes affines sur $\mathbb{R}^p$, par $A_+(K)$ le cône convexe saillant des $T \in A(K)$ qui sont positives ou nulles sur K, par $G(K)$ l'ensemble des $T \in A_+(K)$ qui engendrent une génératrice extrêmale de $A_+(K)$, par $G_1(K)$ l'ensemble des $T \in G(K)$ tels que $\|T\|_K = 1$, et enfin par $\Delta(K)$ l'ensemble des polynômes T qui sont des produits finis d'éléments de $G_1(K)$, la constante 1 correspondant au produit « vide ». On a alors:

THÉORÈME 1 ([8] et [5]). *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\alpha=(\alpha_n)$, $n \in \mathbf{N}^p$, soit une suite de moments sur K est que la forme linéaire L, définie sur l'espace des polynômes par $L(X^n)=\alpha_n$, vérifie la condition $L(T)\geqq 0$ pour tout polynôme $T\in \Delta(K)$.*

On donne d'habitude une seconde condition, exprimée en termes de matrice de type positif. Il suffit d'associer à la suite $\alpha=(\alpha_n)$ et à tout polynôme $T=\sum u_r X^r$, la matrice infinie

$$M_T(\alpha) = [m_{ij}] \quad \text{avec} \quad m_{ij} = \sum_r u_r \alpha_{i+j+r} \,. \tag{3}$$

Comme $m_{ij}=\beta_{i+j}$ avec $\beta=P(\alpha)$ on a l'égalité

$$M_{PQ}(\alpha) = M_P(Q\alpha) = M_Q(P\alpha) \,. \tag{4}$$

On trouve dans [3] qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\alpha=(\alpha_n)$, $n \in \mathbf{N}^p$, soit une suite de moments sur K est que toutes les matrices $M_T(\alpha)$ soient de type positif lorsque T décrit l'ensemble $\Delta(K)$. Nous devons au « referee » la remarque qu'un résultat plus fort peut être énoncé, valable dans le cadre élargi de la théorie des semi-groupes ([2, Corollaire 2.5.] et [8, p. 146]), et qui s'adapte à notre étude selon

THÉORÈME 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\alpha=(\alpha_n)$, $n \in \mathbf{N}^p$, soit une suite de moments sur K est que toutes les matrices $M_T(\alpha)$ soient de type positif lorsque T décrit l'ensemble $G(K)$.*

PREUVE. Par convexité on déduit de l'hypothèse que les matrices $M_T(\alpha)$ sont de type positif lorsque T décrit le cône $A_+(K)$. En particulier la matrice $M=[\alpha_{i+j}]$ est de type positif ce qui permet de placer sur l'espace E des polynômes le semi-produit scalaire $(P\,|\,Q)=(PQ\alpha)_0$. Pour $T\in G_1(K)$ on a $1-T\in A_+(K)$ donc les matrices $M_T(\alpha)$ et $M_{1-T}(\alpha)$ sont de type positif, ce qui se traduit par les conditions $(TP\,|\,P)\geqq 0$ et $((1-T)P\,|\,P)\geqq 0$, pour tout $P\in E$. Ainsi dans l'espace de Hilbert H associé naturellement à E, l'opérateur $\hat{T}$ de multiplication par T est tel que $0\leqq \hat{T}\leqq I$, de sorte que $\hat{T}$ est un opérateur positif et borné pour tout $T\in G(K)$. Si $T_1, T_2,\ldots, T_q$ sont des polynômes éléments de $G_1(K)$, alors $T=T_1T_2\ldots T_q$ est élément de $\Delta(K)$, et l'opérateur $\hat{T}$ associé sur H apparaît comme un produit d'opérateurs positifs commutant deux à deux. On a donc $\hat{T}\geqq 0$, ce qui signifie encore que la matrice $M_T(\alpha)$ est de type positif et tout est ramené au résultat cité de [3].

Avant d'énoncer le résultat essentiel rappelons la définition des matrices de type quasi-positif ([3]).

DÉFINITION 2. On dit qu'une matrice réelle $M=[m_{ij}]$, $i, j \in \mathbf{N}^p$, est de type quasi-positif lorsque l'on a la condition

$$\sum_{i,j} m_{i,j}\xi_i\xi_j \geqq 0$$

pour toute suite finie (ξ_i) de réels telle que $\sum \xi_i=0$.

Les matrices M de type quasi-positif sont en fait très étudiées et on les trouve sous au moins trois noms différents dans la littérature: conditionnellement définies positives dans [9]; presque positives dans [6]; $-M$ est définie négative dans [7]. Un théorème classique de Schoenberg ([1], [6] ou [7]) affirme que M est de type quasi-positif si et seulement si les matrices $\exp sM$ sont de type positif pour tout $s \geqq 0$, et cette propriété constitue, d'une certaine façon, la clé de la théorie des semi-groupes de moments.

Tous ces préparatifs étant donnés, on a le théorème principal, explicitant complètement différentes conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une suite $\alpha=(\alpha_n)$ engendre un semi-groupe de moments sur un convexe compact stable de $\mathbf{R}^p$.

THÉORÈME 3. *Soir K un convexe compact stable de $\mathbf{R}^p$. Alors relativement à une suite réelle quelconque $\alpha=(\alpha_n)$, $n \in \mathbf{N}^p$, les assertions suivantes sont équivalentes*:

a) *La suite α engendre un semi-groupe $e^{s\alpha}=[\exp(s\alpha_n)]$, $s \geqq 0$, de moments sur K.*
b) *Pour tout polynôme S, de degré quelconque, tel que $S(1)=0$ et $S \geqq 0$ sur K, la suite $\beta^S=S(\alpha)$ est une suite de moments sur K.*
c) *Même énoncé avec $S \in G(K)$, tel que $S(1)=0$.*
d) *Même énoncé avec $S \in A_+(K)$, tel que $S(1)=0$.*
e) *Pour tout polynôme $T \geqq 0$ sur K, la matrice $M_T(\alpha)$ est de type quasi-positif si $T(1)>0$ et de type positif si $T(1)=0$.*
f) *La matrice $M=[\alpha_{i+j}]$ est de type quasi-positif et les matrices $M_T(\alpha)$ sont de type positif avec $T=RS$, $R \in G_1(K)$, $S \in G_1(K)$, $S(1)=0$ et $R \neq S$.*

PREUVE. Elle est longue et nécessite des intermédiaires.

a $\Rightarrow$ b: Posons $\beta=S(\alpha)$. Il suffit de vérifier que la forme linéaire L, définie sur l'espace des polynômes par $L(X^n)=\beta_n$, est telle que $L(T) \geqq 0$ pour tout polynôme $T \geqq 0$ sur K. Posons $T=\sum u_q X^q$ et $ST=\sum v_r X^r$. L'hypothèse a) implique l'existence, pour chaque $s \geqq 0$, d'une mesure positive unique μ_s sur K telle que

$$\exp(s\alpha_n) = \int t^n \, d\mu_s(t) \qquad n \in \mathbf{N}^p$$

de sorte que

$$\sum v_r e^{s\alpha_r} = \int ST \, d\mu_s \geqq 0$$

puisque $ST \geqq 0$ sur K. Mais $(ST)(\mathbf{1}) = 0$, donc $\sum v_r = 0$, ce qui permet d'écrire l'inégalité précédente sous la forme

$$\sum v_r \frac{e^{s\alpha_r} - 1}{s} \geqq 0 \qquad \text{pour tout } s > 0 \, .$$

Le passage à la limite $s \downarrow 0$ donne l'inégalité $\sum v_r \alpha_r \geqq 0$, qui peut s'écrire $(ST\alpha)_0 = (T\beta)_0 \geqq 0$. Or on a

$$(T\beta)_0 = \sum u_q \beta_q = L(T)$$

d'où l'inégalité cherchée $L(T) \geqq 0$.

b $\Rightarrow$ c: évident.

c $\Rightarrow$ d: évident par convexité et extrêmalité.

d $\Rightarrow$ a: c'est là le point le plus délicat. Introduisons les suites $\Delta_m(\alpha) = (1 - X_m)(\alpha)$, $1 \leqq m \leqq p$, qui d'après d) sont des suites de moments sur K, donc associées à des mesures positives v_m sur K telles de plus que, d'après le Lemme 1, on ait, pour $l \neq m$:

$$(5) \qquad (1 - X_l) dv_m = (1 - X_m) dv_l \, .$$

Posons alors $v = v_1 + \ldots + v_p$ et $R = \sum_{m=1}^{p} (1 - X_m) = p - (X_1 + \ldots + X_p)$. Evidemment la suite $R(\alpha)$ est la suite des moments associée à la mesure v, et avec (5) on a, par sommation

$$(6) \qquad R dv_m = (1 - X_m) dv \, .$$

Par ailleurs on a $R \geqq 0$ sur K et $R > 0$ sur $K \setminus \{\mathbf{1}\}$ puisque K est contenu dans le cube $J^p = [-1, +1]^p$. On introduit alors, sur l'espace localement compact $K \setminus \{\mathbf{1}\}$, la mesure positive θ, non nécessairement bornée, définie par $d\theta = dv/R$, de sorte que $dv = R d\theta$ sur $K \setminus \{\mathbf{1}\}$, et que sur K, on a les égalités

$$(7) \qquad R d\theta = dv - v(\{\mathbf{1}\}) d\delta_{\mathbf{1}}$$

$$(8) \qquad (1 - X_m) d\theta = dv_m - v_m(\{\mathbf{1}\}) d\delta_{\mathbf{1}}$$

où $\delta_{\mathbf{1}}$ est la mesure de Dirac au point $\mathbf{1}$ de K. Maintenant on a l'énoncé:

LEMME 2. *Pour tout* $n = (n_1, \ldots, n_p) \in \mathbf{N}^p$ *on a*

$$\alpha_n = \alpha_0 - \int (1-t^n)\,d\theta(t) - (n_1 a_1 + \ldots + n_p a_p)$$

avec $a_m = \nu_m(\{\mathbf{1}\}) \geqq 0$ *pour* $1 \leqq m \leqq p$.

PREUVE. On développe (de façon non unique) $1 - X^n$ selon

$$1 - X^n = \sum_{m=1}^{p} (1 - X_m) H_m \tag{9}$$

avec, par exemple,

$$H_m = (1 + X_m + \ldots + X_m^{n_m - 1}) X_{m+1}^{n_{m+1}} \ldots X_p^{n_p},$$

de sorte que

$$\int (1-t^n)\,d\theta(t) = \sum_m \int H_m (1 - X_m)\,d\theta$$
$$= \sum_m \int H_m\,d\nu_m - \sum H_m(\mathbf{1})\nu_m(\{\mathbf{1}\}).$$

Mais d'une part on a

$$H_m(\mathbf{1}) = \left.\frac{\partial t^n}{\partial t_m}\right|_{t=\mathbf{1}} = n_m \tag{10}$$

et d'autre part, par l'association de ν_m à la suite $\Delta_m(\alpha) = (1 - X_m)(\alpha)$

$$\int H_m\,d\nu_m = (H_m(\Delta_m(\alpha)))_0 \tag{11}$$
$$= ((1 - X_m) H_m \alpha)_0$$

donc

$$\sum_m \int H_m\,d\nu_m = ((1 - X^n)\alpha)_0 = \alpha_0 - \alpha_n \tag{12}$$

ce qui termine la preuve du lemme.

Distinguons maintenant deux cas:

(i) le premier est celui où $\int d\theta < +\infty$. Alors la suite $m_n = \int t^n\,d\theta(t)$ est une suite de moments sur K, et du Lemme 2 on déduit

$$\alpha_n = M + m_n - \sum_m n_m a_m$$

où M est une constante. Par exponentiation positive on a

$$\exp(s\alpha_n) = e^{sM} . \exp(s m_n) . (e^{-sa})^n$$

avec $a=(a_m)$ et $e^{-sa}=(e^{-sa_m})$. Avec la Proposition 2 on aura bien le résultat annoncé d) pourvu que le point e^{-sa} qui apparaît ici soit un point de K. C'est là qu'une difficulté sérieuse est soulevée car s'il est évident que l'on a $e^{-sa} \in K$ lorsque K est le cube I^p, ce qui est le cas étudié dans [3] et [4], la question n'est pas aussi claire dans le cas général. Admettons provisoirement toutefois qu'il en est bien ainsi, quitte à justifier cette affirmation par une étude ultérieure.

(ii) le deuxième est celui où $\int d\theta = +\infty$. On opère alors par troncature en introduisant l'ensemble

$$A_q = K \cap \left\{p-(X_1+\ldots+X_p) \geqq \frac{1}{q}\right\}$$

pour $q \geqq 2$ entier, et sa fonction indicatrice g_q. La mesure tronquée $d\theta_q = g_q d\theta$ est bornée sur K, de sorte qu'avec l'étude du premier cas, la suite

$$\alpha_n(q) = \alpha_0 - \int (1-t^n)\, d\theta_q(t) - (n_1 a_1 + \ldots + n_p a_p)$$

engendre un semi-groupe de moments sur K. Par passage à la limite $q \to \infty$, la fonction g_q tends vers la fonction indicatrice de $K \setminus \{\mathbf{1}\}$ de façon monotone croissante, de sorte que $\alpha_n(q) \to \alpha_n$ puisque θ est portée par $K \setminus \{\mathbf{1}\}$. Alors la suite exponentielle $[\exp(s\alpha_n)]$, $s \geqq 0$, est limite d'une suite de moments sur K, donc est elle-même une suite de moments sur K.

a $\Rightarrow$ e: Fixons $T = \sum u_r X^r$ comme en e). D'après l'hypothèse a), toutes les matrices $M_T(e^{s\alpha})$ sont de type positif pour $s>0$. On peut donc écrire

$$\sum_{i,j} \sum_r u_r e^{s\alpha_{i+j+r}} \xi_i \xi_j \geqq 0 \tag{13}$$

pour toute suite finie (ξ_i) de réels. Si $T(\mathbf{1})=0$ on a alors $\sum u_r = 0$ et (13) se ramène à

$$\sum_{i,j} \sum_r u_r \frac{e^{s\alpha_{i+j+r}}-1}{s} \xi_i \xi_j \geqq 0 \tag{14}$$

ce qui, par passage à la limite $s \downarrow 0$, donne la positivité de la matrice $M_T(\alpha)$. Si maintenant $T(\mathbf{1})$ est strictement positif, alors on se ramène à (14) en supposant $\sum \xi_i = 0$, et la quasi-positivité de $M_T(\alpha)$ est ainsi obtenue.

f $\Rightarrow$ c: Fixons $S \in G_1(K)$ tel que $S(\mathbf{1})=0$ et soit $\beta = S(\alpha)$. Il s'agit de prouver, grâce à f), que β est une suite de moments sur K. Pour cela utilisons le critère du Théorème 2 et soit $R \in G_1(K)$ un polynôme fixé. On sait que $M_R(\beta) = M_{RS}(\alpha)$, donc $M_R(\beta)$ est de type positif d'après f) si $R \neq S$. Si $R=S$ alors $M_R(\beta) = M_{S^2}(\alpha)$

est de type positif en vertu du lemme suivant, car $S(\mathbf{1})=0$ et $M=M_1(\alpha)$ est de type quasi-positif. D'où le résultat, qui termine la preuve du Théorème 3 sous réserve de l'examen de la question délicate laissée en suspens dans la preuve de l'implication d $\Rightarrow$ a.

REMARQUE. Un problème intéressant, qui n'est pas résolu ici, serait de savoir si l'on peut remplacer l'hypothèse f) par l'énoncé e) écrit seulement pour les polynômes $T \in G(K)$.

Le lemme utilisé pour conclure est le suivant:

LEMME 3. *Soit $\alpha=(\alpha_n)$, $n \in \mathbf{N}^p$, une suite quelconque et soit L la forme linéaire sur l'espace des polynômes définie par $L(X^n)=\alpha_n$. Pour tout polynôme R on a:*

a) *La matrice $M_R(\alpha)$ est de type positif si et seulement si on a $L(RQ^2)\geqq 0$ pour tout polynôme Q.*
b) *La matrice $M_R(\alpha)$ est de type quasi-positif si et seulement si on a $L(RQ^2)\geqq 0$ pour tout polynôme Q tel que $Q(\mathbf{1})=0$.*

PREUVE. Elle est évidente en explicitant $R=\sum u_r X^r$ et $Q=\sum \xi_i X^i$ puisque

$$L(RQ^2) = \sum_{r,i,j} u_r \alpha_{i+j+r} \xi_i \xi_j \quad \text{et} \quad Q(\mathbf{1}) = \sum \xi_i .$$

LA QUESTION EN SUSPENS. Il s'agit de prouver, sous l'hypothèse d) du Théorème 3, que l'on a $e^{-sa} \in K$ pour tout $s>0$, avec $a=(a_m)$ et $a_m=\nu_m(\{\mathbf{1}\})$, la mesure ν_m étant associée à la suite de moments $\Delta_m(\alpha)=(1-X_m)(\alpha)$. Remarquons déjà que tout $S \in A_+(K)$ tel que $S(\mathbf{1})=0$ peut se mettre sous la forme

$$S = \sum_{m=1}^{p} b_m(1-X_m) = (b\,|\,\mathbf{1}-X)$$

avec $b=(b_m) \in \mathbf{R}^p$. On est donc en droit d'introduire le cône convexe fermé C dans $\mathbf{R}^p$, défini par

$$b \in C \Leftrightarrow S = (b\,|\,\mathbf{1}-X) \geqq 0 \quad \text{sur } K . \tag{15}$$

Déjà C est un cône convexe saillant car K est d'intérieur non vide. Par ailleurs l'inclusion $K \subset J^p=[-1,+1]^p$ garantit que la base canonique $e_1,\ldots,e_p$ de $\mathbf{R}^p$ est telle que $e_m \in C$. De plus $b=e_m$ correspond justement au polynôme $S=(1-X_m)$.

A côté de C introduisons le cône convexe fermé dual C^*, défini par:

$$x \in C^* \Leftrightarrow (x\,|\,b) \geqq 0 \quad \text{pour tout } b \in C . \tag{16}$$

Evidemment C^* est saillant, car $e_m \in C$, et C^* est d'intérieur non vide puisque C est saillant. Géométriquement on cherche à mettre en évidence avec le cône $\mathbf{1}-C^*$, le cône de sommet $\mathbf{1}$ enveloppe convexe fermée du cône « tangent » au compact K. Ceci est concrétisé par l'énoncé:

PROPOSITION 3. *On fixe un point x intérieur au cône C^*. On a alors $\mathbf{1}-tx \in K$ pour $t>0$ assez petit.*

PREUVE. Il existe $\delta>0$ tel que $x+\delta u \in C^*$ pour tout $u \in \mathsf{R}^p$ tel que $\|u\|=1$ (pour la norme euclidienne). On a donc $(x\,|\,b)+\delta(u\,|\,b)\geqq 0$ et par un bon choix de u, on obtient

$$(x\,|\,b) \geqq \delta\|b\| \quad \text{pour tout } b \in C\,. \tag{17}$$

Par convexité de K il suffit de prouver qu'il existe une suite $t_n \downarrow 0$ telle que $\mathbf{1}-t_n x \in K$. Supposons le contraire; alors il existe $\beta>0$ tel que $0<t\leqq\beta$ implique $\mathbf{1}-tx \notin K$, d'où résulte aisément, par convexité de K et par le fait que K contient $\mathbf{1}$, que l'on a $\mathbf{1}-tx \notin K$ pour tout $t>0$. Par ailleurs il est clair que $x=(x_m)$ est un vecteur tel que $x_m\geqq 0$ puisque $e_m \in C$, de sorte que $\mathbf{1}+tx \notin K$ pour tout $t>0$, par l'inclusion $K\subset J^p$ et la remarque que $x\neq 0$. En résumé la droite affine $\mathbf{1}+\mathsf{R}x$ ne coupe K qu'au point $\mathbf{1}$; elle est donc disjointe de l'ouvert convexe $\breve{K}$. Par le théorème de Hahn-Banach il existe un hyperplan d'équation $(b\,|\,\mathbf{1}-X)=0$, avec $b\neq 0$, tel que $(b\,|\,x)=0$ et tel aussi que $(b\,|\,\mathbf{1}-X)>0$ sur $\overset{\circ}{K}$. Puisque $K=\overline{\overset{\circ}{K}}$, on a donc $b \in C$, de sorte que l'égalité $(b\,|\,x)=0$ contredit (17), ce qui termine la preuve.

On déduit de là:

PROPOSITION 4. *Soit K un convexe compact stable. Alors pour tout $x=(x_m) \in C^*$ on a $e^{-x}=(e^{-x_m}) \in K$.*

PREUVE. Puisque C^* est l'adhérence de son intérieur, il suffit de faire la preuve quand x est intérieur à C^*. Avec la Proposition 3 on a donc $\mathbf{1}-tx \in K$ pour t assez petit, donc aussi $(\mathbf{1}-tx)^q \in K$ pour tout entier $q\geqq 1$ par stabilité multiplicative de K. Avec $t=1/q$ et le passage à la limite $q \to \infty$, on obtient le résultat.

Revenons maintenant à la question laissée en suspens. D'après l'hypothèse d) du Théorème 3, on voit que pour tout vecteur $b \in C$, le polynôme affine $S_b=(b\,|\,\mathbf{1}-X)$ est tel que la suite $S_b(\alpha)$ est une suite de moments sur K. Il lui correspond une mesure positive unique ν_b, d'ailleurs égale à $\nu_{e_m}=\nu_m$ quand $b=e_m$. Considérons maintenant l'application G définie sur C par $G(b)=\nu_b(\{\mathbf{1}\})$. C'est évidemment une fonction coniquement affine sur C, qui est de plus positive ou nulle. Avec $a=(a_m)$ et $a_m=\nu_m(\{\mathbf{1}\})=G(e_m)$, on doit prouver que l'on a $e^{-sa}\in K$ pour tout $s>0$. Pour cela il suffit, avec la Proposition 4, de prouver $a\in C^*$. Fixons donc $b=(b_m)\in C$, et montrons l'inégalité $(a\,|\,b)\geqq 0$, résultant tout simplement des égalités

$$(a\,|\,b) \;=\; \sum a_m b_m \;=\; \sum b_m G(e_m) \;=\; G(\sum b_m e_m) \;=\; G(b)\,.$$

La question est donc complètement réglée et le Théorème 3 définitivement acquis.

Les mesures $\square$-indéfiniment divisibles sur K. De même que pour $K=[0,1]$ ou $K=I^p$ dans $\mathbf{R}^p$, on peut donner une définition des mesures indéfiniment divisibles sur le convexe compact stable K, pour la convolution multiplicative $\square$ des mesures.

Définition 3. On dit qu'une mesure positive μ sur K est $\square$-indéfiniment divisible lorsqu'il existe, pour l'opération $\square$, un semi-groupe (μ_s), $s>0$, de mesures positives tel que $\mu=\mu_1$ et $\mu_s\to\delta_{\mathbf{1}}$ quand $s\downarrow 0$, *où* $\delta_{\mathbf{1}}$ est la mesure de Dirac au point $\mathbf{1}\in K$.

Il suit de là que les suites $m_n(s)=\int t^n\,d\mu_s$ sont telles que $m_n(s+t)=m_n(s)m_n(t)$ et $m_n(s)\to 1$ quand $s\downarrow 0$. On obtient donc des suites de la forme $[\exp(s\alpha_n)]=e^{s\alpha}$. La théorie précédente, faite par exemple avec $\alpha_0=0$, de façon que toutes les μ_s soient des probabilités sur K, donne donc un résultat du type Lévy-Khintchine.

Théorème 4. *Soit K un convexe compact stable de $\mathbf{R}^p$. Pour qu'une probabilité μ sur K soit $\square$-indéfiniment divisible, il faut et il suffit qu'il existe une mesure positive bornée ν sur K, telle que $\nu(\{\mathbf{1}\})=0$, et des constantes $a_m\geqq 0$, $1\leqq m\leqq p$, telles que le point $e^{-a}=(e^{-a_m})$ soit élément de K, permettant d'exprimer les moments de μ selon*

$$\int t^n\,d\mu(t) \;=\; \exp\left[-(n_1a_1+\ldots+n_pa_p)-\int\frac{1-t^n}{p-(t_1+\ldots+t_p)}\,d\nu(t)\right]$$

pour tout $n=(n_1,\ldots,n_p)\in\mathbf{N}^p$. La mesure ν et les constantes a_m sont uniques.

Preuve. Il ne reste que l'unicité à vérifier, qui est d'ailleurs un cas particulier d'un résultat plus général d'unicité relatif aux représentations de Lévy-Khintchine dans le cadre abstrait ([1, Théorème 3.7]). Donnons-en toutefois une preuve directe pour être plus complet. La fonction

$$\frac{1-t^n}{p-(t_1+\ldots+t_p)}$$

est bornée sur $K \setminus \{\mathbf{1}\}$ par la valeur $M_n = \operatorname{Max} n_m$. Il suffit en effet d'écrire

$$1 - t^n = (1 - t_1^{n_1}) t_2^{n_2} \dots t_p^{n_p} + (1 - t_2^{n_2}) t_3^{n_3} \dots t_p^{n_p} + \dots + (1 - t_p^{n_p})$$

et de remarquer que $(1 - t_m^{n_m}) \leqq n_m (1 - t_m)$. Il suit de là, par le théorème de Lebesgue, qu'en fixant $n_2, \dots, n_p$ et en faisant tendre n_1 vers l'infini on a

$$e^{-a_1} = \lim_{n_1 \to \infty} (\alpha_n)^{1/n_1} \qquad \text{avec } \alpha_n = \int t^n \, d\mu(t)$$

et de même pour e^{-a_m}. Ainsi les constantes a_m sont déterminées par la suite $\alpha = (\alpha_n)$. Il reste donc à voir que les constantes

$$\beta_n = \int \frac{1 - t^n}{p - (t_1 + \dots + t_p)} \, d\nu(t)$$

déterminent ν sachant que $\nu(\{\mathbf{1}\}) = 0$. Or en écrivant

$$(1 - t^n)(1 - t_1) = (1 - t_1) + (1 - t^n) - (1 - t_1 t^n)$$

et en faisant de même avec $(1 - t^n)(1 - t_m)$, on voit que les constantes β_n déterminent l'intégrale $\int (1 - t^n) \, d\nu(t) = \gamma_n$. Alors ν est déterminée, ce qui termine tout, en vertu du lemme:

Lemme 4. *Soit ν une mesure positive sur le cube $J^p = [-1, +1]^p$, telle que $\nu(\{\mathbf{1}\}) = 0$. Alors ν est déterminée par les intégrales*

$$\gamma_n = \int (1 - t^n) \, d\nu(t), \qquad n \in \mathrm{N}^p .$$

Preuve. Il suffit de retrouver la masse totale $\int d\nu$ à partir des γ_n pour se ramener à la détermination de ν connaissant ses moments. Soit S l'ensemble des sommets $x = (x_m)$ de J^p, distincts de $\mathbf{1}$; on a donc $x_m = \pm 1$ et il existe un indice m tel que $x_m = -1$. Soit $\varrho = (\varrho_m) \in \{0, 1\}^p$; choisissons $n = (n_m)$ tel que $n_m = 2q_m + \varrho_m$. Alors lorsque $n \to \infty$ de façon que chaque $q_m \to \infty$, on a, avec le théorème de Lebesgue

$$\gamma_n \to \int d\nu - \sum_{x \in S} x^\varrho \nu(\{x\}) = F(\varrho)$$

avec $x^\varrho = x_1^{\varrho_1} \dots x_p^{\varrho_p}$. En sommant sur les 2^p valeurs possibles de ϱ on obtient

$$\begin{aligned} \sum_\varrho F(\varrho) &= 2^p \int d\nu - \sum_{x \in S} \nu(\{x\}) \Big(\sum_\varrho x^\varrho \Big) \\ &= 2^p \int d\nu \end{aligned}$$

car $\sum_{\varrho} x^{\varrho}=(1+x_1)\ldots(1+x_p)=0$ pour tout sommet $x \neq \mathbf{1}$ de J^p, ce qui termine la démonstration.

REMARQUE. Il est facile et immédiat de vérifier que si $H \subset \mathbf{R}^p$ est un ensemble non vide multiplicativement stable c'est-à-dire tel que $x, y \in H$ implique $xy \in H$, alors l'ensemble $K=\overline{\text{conv}}\,(H \cup \{\mathbf{1}\})$, est un convexe compact stable au sens de la Définition 1 pourvu que H soit borné et d'intérieur non vide. Il suit de là que tout convexe compact stable K, qui contient l'ensemble $\exp(-C^*)$ d'après la Proposition 4, contient donc le « fuseau » $K^*=\overline{\text{conv}}\exp(-C^*)$ et ce fuseau, qui contient les points 0 et $\mathbf{1}$ car $x \in C^*$ implique $e^{-sx} \in K^*$ pour tout $s>0$, est contenu dans le cube unité I^p. D'où:

PROPOSITION 5. *Tout convexe compact stable K contient le convexe compact stable $K^*=\overline{\text{conv}}\exp(-C^*)$, appelé fuseau de K, déterminé par le cône C^*.*

On peut dire encore que $K^* \subset I^p$ est le plus petit convexe compact stable admettant le même cône C^* que le convexe compact K. Par exemple en dimension $p=2$, si C^* est le cône délimité par les deux demi-droites de pentes respectives r et s, avec $s \leqq 1 \leqq r$ et $s<r$, alors $K^*=K_{r,s}$ est l'adhérence de l'ensemble $\exp(-C^*)$ (le passage à l'enveloppe convexe est inutile), et c'est le fuseau contenu dans le carré I^2 et délimité par les deux courbes $y_1=x^r$ et $y_2=x^s$. En dimension $p \geqq 3$ il ne semble pas que $\exp(-C^*)$ soit convexe, d'où la définition de K^*.

Maintenant si K est un convexe compact stable symétrique par rapport à l'origine, il est immédiat que $\text{conv}\,(K \cup -K)$ est aussi un convexe compact stable. D'où:

COROLLAIRE. *Tout convexe compact stable K, symétrique par rapport à l'origine, contient le convexe compact stable*

$$L^* = \text{conv}\,(K^* \cup -K^*)$$

lui-même symétrique par rapport à l'origine.

Ainsi, sans donner une description détaillée de tous les convexes compacts stables K de $\mathbf{R}^p$, on précise cependant que la donnée de leur cône C^* associé, contenu dans le cône positif de $\mathbf{R}^p$, les détermine partiellement puisque la proposition et son corollaire mettent en évidence les plus petits convexes compacts stables (et symétriques par rapport à l'origine pour L^*) compatibles avec le cône C^*.

Nous tenons à remercier le « referee » pour ses suggestions constructives qui nous ont permis d'apporter au texte initial des améliorations sensibles (en particulier dans les énoncés des Théorèmes 2 et 3 f)), et aussi pour avoir attiré notre attention sur des articles antérieurs que nous ignorions.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Berg, J. P. R. Christensen et P. Ressel, *Positive definite functions on abelian semi-groups*, Math. Ann. 223 (1976), 253–272.
2. C. Berg et P. H. Maserick, *Exponentially bounded positive definite functions*, Preprint 81101, Dept. Math., Pennsylvania State Univ., à paraître dans Illinois J. Math., 19»».
3. H. Buchwalter et G. Cassier, *Semi-groupes dans le problème des moments*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983), 389–391.
4. H. Buchwalter et G. Cassier, *Semi-groupes dans le problème des moments*, J. Funct. Anal. 52 (1983), 129–145.
5. G. Cassier, *Le problème des moments pour un convexe compact de* R^n, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983), 195–197.
6. W. F. Donoghue, Jr., *Monotone matrix functions and analytic continuation*, (Grundlehren Math. Wiss. 207), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1974.
7. C. S. Herz, *Une ébauche d'une théorie générale des fonctions définies-négatives* in *Théorie du Potentiel*, Séminaire Brelot-Choquet-Deny, 7e année, 1962–63. Fac. Sci. Paris, Secrétariat Mathématique, Paris, 1964.
8. P. H. Maserick, *Moments of measures on convex bodies*, Pacific J. Math. 68 (1977), 135–152.
9. K. R. Parthasarathy et K. Schmidt, *Positive definite kernels, continuous tensor products, and central limit theorems of probability theory*, (Lecture Notes in Math. 272), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1972.

LABORATOIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ CLAUDE-BERNARD - LYON I
69622 VILLEURBANNE CEDEX
FRANCE