MATH. SCAND. 54 (1984), 177-182

SEMI-GROUPES DE MOMENTS

CHRISTIAN BERG

La question des semi-groupes de moments, abordée et résolue par Buchwalter et Cassier [3], [4] pour le cas d'un intervalle fermé et stable par l'opération produit $p(x,y)=xy$, et résolue par Buchwalter [5] pour le cas d'un compact convexe stable de R^p, se pose également dans le cadre de l'analyse harmonique sur un semi-groupe abélien S. Les cas particulier $S=(\mathsf{N}_0^p,+)$ correspond ainsi aux travaux [3]–[5]. À tout semi-groupe abélien S est associé le semi-groupe compact $\hat{S}$ des semi-caractères bornés. Dans le travail de Berg, Christensen et Ressel [1] les semi-groupes $(\mu_t)_{t\geqq 0}$ de sous-probabilités sur $\hat{S}$ sont caractérisés par les fonctions appelées définies négatives. En utilisant ce résultat nous allons caractériser les semi-groupes $(\mu_t)_{t\geqq 0}$ portés par un compact stable K de $\hat{S}$, c'est-à-dire un sous-semi-groupe compact K de $\hat{S}$, et nous obtenons ainsi une généralisation du Théorème 4 de [5]. Dans ce qui suit nous utilisons la terminologie de [2] qui parfois diffère de celle de [1].

Soit S un semi-groupe abélien admettant un élément neutre 0. On appelle semi-caractère de S toute application $\varrho\colon S\to\mathsf{R}$ vérifiant $\varrho(s+t)=\varrho(s)\varrho(t)$ et $\varrho(0)=1$. Un semi-caractère borné prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1,1]$. Pour la topologie de la convergence simple l'ensemble $\hat{S}$ des semi-caractères bornés est un semi-groupe abélien compact, l'élément neutre étant la fonction $s\curvearrowright 1$, notée 1. Nous rappelons la définition suivante:

DÉFINITION 1. Une fonction $\varphi\colon S\to\mathsf{R}$ est *définie positive* (respectivement *définie négative*) lorsque l'on a la condition

$$\sum_{i,j=1}^{n}\varphi(s_i+s_j)c_ic_j\geqq 0\qquad(\text{respectivement }\leqq 0)$$

pour toute suite finie $s_1,\ldots,s_n\in S$ et toute suite finie $c_1,\ldots,c_n\in\mathsf{R}$ (respectivement telle que $\sum c_i=0$). (Au lieu de définie positive (négative) on dit aussi de *type positif* (*négatif*).)

Notons que $\varphi\colon S\to\mathsf{R}$ est définie négative si et seulement si la matrice $(-\varphi(s_i+s_j))$ est de type quasi-positif quel soient $s_1,\ldots,s_n\in S$, utilisant la terminologie de [4], [5].

Reçu le 6. mai, 1983

Nous rappelons le résultats principaux sur les fonctions définies positives et négatives. Le théorème suivant est dû à Lindahl et Maserick [6] et fut retrouvé indépendamment par Berg, Christensen et Ressel, cf. [1] ou [2, Theorem 4.2.8].

THÉORÈME 1. *Pour une fonction* $\varphi\colon S \to \mathbf{R}$ *les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) φ *est bornée et définie positive.*

(ii) φ *admet une représentation*

$$\varphi(s) = \int_{\hat{S}} \varrho(s)\, d\mu(\varrho)$$

où μ *est une mesure de Radon positive sur* $\hat{S}$, *uniquement déterminée.*

L'application $\mu \curvearrowright \hat{\mu}$, où

$$\hat{\mu}(s) := \int \varrho(s)\, d\mu(\varrho) \qquad \text{pour } s \in S\,,$$

est donc une bijection affine du cône $M_+(\hat{S})$ des mesures de Radon positives sur $\hat{S}$ sur le cône $P^b(S)$ des fonctions bornées et définies positives sur S. On démontre facilement le *théorème de continuité* suivant: $\mu \curvearrowright \hat{\mu}$ est un homéomorphisme pour la topologie étroite (=vague) sur $M_+(\hat{S})$ et la topologie de la convergence simple sur $P^b(S)$, cf. [2, Theorem 4.2.11].

THÉORÈME 2. *Pour une fonction* $\psi\colon S \to \mathbf{R}$ *les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) ψ *est bornée inférieurement et définie négative.*

(ii) $\Delta_a\psi(s) = \psi(s+a) - \psi(s)$ *est définie positive et bornée pour tout* $a \in S$.

(iii) *Il existe une constante* $c \in \mathbf{R}$, *une fonction* $h\colon S \to [0, \infty[$ *additive et une mesure de Radon positive* μ *sur* $\hat{S} \setminus \{1\}$ *telles que*

$$\psi(s) = c + h(s) + \int_{\hat{S}\setminus\{1\}} (1 - \varrho(s))\, d\mu(\varrho)\,.$$

(*Formule de type Lévy–Khinchine.*)

REMARQUES (1). Pour la démonstration voir [1] ou [2, Theorem 4.3.20]. Dans [1] on suppose $\psi \geqq 0$. Il faut donc appliquer le résultat de [1] à $\psi - \psi(0)$.

(2) Le triplet (c, h, μ) dans (iii) est uniquement déterminé et l'on a $c = \psi(0)$, $h(s) = \lim_{n\to\infty} (1/n)\psi(ns)$ et μ est la *mesure de Lévy* déterminée par

$$(1-\varrho(a))\mu + h(a)\varepsilon_1 = \sigma_a \quad \text{pour } a \in S$$

où $\sigma_a \in M_+(\hat{S})$ est telle que $\Delta_a \psi = \hat{\sigma}_a$.

(3) On voit facilement de la démonstration dans [1] que la condition suivante est encore équivalente aux conditions (i)–(iii).

(ii)′ *$\Delta_a\psi$ est définie positive et bornée pour tout $a \in G$, où G est un ensemble générateur de S,* i.e. *tout élément $s \in S \setminus \{0\}$ est somme finie d'éléments de G.*

En effet, avec la notation de [1] les ensembles $\mathcal{O}_a$, $a \in G$ forment encore un recouvrement ouvert de $\hat{S} \setminus \{1\}$. Les mesures $\mu \in M_+(\hat{S} \setminus \{1\})$ qui peuvent apparaître dans (iii) sont caractérisées par $\int (1-\varrho(a))\, d\mu(\varrho) < \infty$ pour tout $a \in S$ ou même seulement pour tout a dans un ensemble générateur.

Le lien entre les fonctions définies positives et négatives est donné par le *théorème de Schoenberg*, cf. [1] ou [2, Theorem 3.2.2]: $\psi: S \to \mathbf{R}$ est définie négative si et seulement si $\exp(-t\psi)$ est définie positive pour tout $t \geqq 0$.

DÉFINITION 2. Un semi-groupe de convolution sur $\hat{S}$ est une famille $(\mu_t)_{t \geqq 0}$ de mesures de Radon positives sur $\hat{S}$ telle que

(i) $\mu_t * \mu_s = \mu_{t+s}$
(ii) $\mu_0 = \varepsilon_1$
(iii) $t \curvearrowright \mu_t$ est continue.

(La convolution $\mu * \nu$ de deux mesures sur $\hat{S}$ est définie comme la mesure image de $\mu \otimes \nu$ par l'application produit de $\hat{S} \times \hat{S}$ dans $\hat{S}$.)

Par le théorème de Schoenberg et le Théorème 1 il y a une correspondance bijective entre l'ensemble $\mathcal{N}^i(S)$ des fonctions définies négatives $\psi: S \to \mathbf{R}$ qui sont bornées inférieurement et l'ensemble des semi-groupes de convolution $(\mu_t)_{t \geqq 0}$ sur $\hat{S}$, établie par $\exp(-t\psi) = \hat{\mu}_t$ pour $t \geqq 0$.

Soit $K \subseteqq \hat{S}$ un compact *stable* de $\hat{S}$, c'est-à-dire K est un sous-semi-groupe de $\hat{S}$ tel que $1 \in K$. Le théorème suivant caractérise les semi-groupes de convolution portés par K.

THÉORÈME 3. *Soit $K \subseteqq \hat{S}$ un compact stable. Alors relativement à une fonction $\psi: S \to \mathbf{R}$ les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe un semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t \geqq 0}$ sur $\hat{S}$ porté par K tel que*

$$\exp(-t\psi) = \hat{\mu}_t \quad \text{pour tout } t \geqq 0\,.$$

(ii) La fonction ψ est élément de $\mathcal{N}^i(S)$ *et admet la représentation*

$$\psi(s) = \psi(0)+h(s)+\int_{K\setminus\{1\}} (1-\varrho(s))\,d\mu(\varrho)$$

où la mesure de Lévy μ est portée par $K\setminus\{1\}$ et $\exp(-th) \in K$ *pour tout* $t \geqq 0$.

PREUVE. « (i) $\Rightarrow$ (ii) ». Il est clair que $\psi \in \mathcal{N}^i(S)$. La mesure de Lévy μ est donnée par

$$\mu = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\mu_t \mid \hat{S}\setminus\{1\})$$

pour la topologie vague associée à l'espace localement compact $\hat{S}\setminus\{1\}$ (cf. [1] ou [2, Lemma 4.3.12]), et il en découle que μ est portée par l'ouvert $K\setminus\{1\}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ la fonction $s \curvearrowright (1/n)\psi(ns)$ appartient au cône $\mathcal{N}^i(S)$ et correspond au semi-groupe de convolution $(p_n(\mu_{t/n}))_{t\geqq 0}$ où $p_n\colon \hat{S} \to \hat{S}$ est l'application $p_n(\varrho)=\varrho^n$:

$$\exp\left(-\frac{t}{n}\psi(ns)\right) = \int \varrho(ns)\,d\mu_{t/n}(\varrho) = \int \varrho(s)^n\,d\mu_{t/n}(\varrho)\,.$$

On a

$$\operatorname{supp}(p_n(\mu_{t/n})) = p_n(\operatorname{supp}(\mu_{t/n})) \subseteqq K\,.$$

Pour tout $t>0$ la fonction $\varrho(h,t) := \exp(-th)$ est un semi-caractère borné sur S, et

$$\lim_{n\to\infty} \exp\left(-\frac{t}{n}\psi(ns)\right) = \exp(-th(s)), \qquad s \in S\,.$$

Par le théorème de continuité la suite $(p_n(\mu_{t/n}))$ tend vers la mesure de Dirac au point $\varrho(h,t)$ quand $n \to \infty$ et par conséquent $\varrho(h,t) \in K$.

« (ii) $\Rightarrow$ (i) ». Posons

$$\psi_\mu(s) = \int_{\hat{S}\setminus\{1\}} (1-\varrho(s))\,d\mu(\varrho), \qquad s \in S$$

et soit $(\sigma_t)_{t\geqq 0}$ le semi-groupe correspondant à ψ_μ. Alors

$$\mu_t = \exp(-t\psi(0))\varepsilon_{\varrho(h,t)} * \sigma_t, \qquad t > 0\,,$$

et il suffit donc de vérifier $\operatorname{supp}(\sigma_t) \subseteqq K$ pour tout $t>0$. Pour un compact $L \subseteqq \hat{S}\setminus\{1\}$ posons

$$\psi_{\mu,L}(s) = \int_L (1-\varrho(s))\,d\mu(\varrho) = \mu(L)-(\mu \mid L)\hat{\ }(s)\,.$$

La mesure $\sigma_{t,L}$ sur $\hat{S}$ telle que $\exp(-t\psi_{\mu,L}) = \hat{\sigma}_{t,L}$ est donnée par la formule suivante

$$\sigma_{t,L} = \exp(-t\mu(L)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (\mu \mid L)^{*n},$$

et on voit directement que $\operatorname{supp}(\sigma_{t,L}) \subseteq K$ sous l'hypothèse que μ soit portée par $K \setminus \{1\}$. Quand L croît vers $\hat{S} \setminus \{1\}$ alors $\psi_{\mu,L}(s)$ croît vers $\psi_\mu(s)$ et le théorème de continuité entraîne $\lim_L \sigma_{t,L} = \sigma_t$ pour la topologie vague sur $\hat{S}$, en particulier $\operatorname{supp}(\sigma_t) \subseteq K$.

Pour $S = \mathbf{N}_0^p$ les semi-caractères bornés sont donnés par $n \curvearrowright x^n$ où $x \in [-1,1]^p$. Ou peut donc identifier le semi-groupe compact $\hat{S}$ au cube $[-1,1]^p$ avec la composition $(x,y) \curvearrowright xy = (x_i y_i)$. Les fonctions $\psi \in \mathcal{N}^i(\mathbf{N}_0^p)$ sont données par

$$\psi(n) = \psi(0) + \langle a, n \rangle + \int_{[-1,1]^p \setminus \{\mathbf{1}\}} (1 - x^n)\, d\mu(x)$$

où $a \in \mathbf{R}_+^p$ et μ est une mesure de Radon positive sur $[-1,1]^p \setminus \{\mathbf{1}\}$ telle que

$$\int_{[-1,1]^p \setminus \{\mathbf{1}\}} (p - x_1 - \ldots - x_p)\, d\mu(x) < \infty .$$

(Ici $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$.)

Comme cas particulier du Théorème 3 nous pouvons énoncer le résultat suivant qui généralise le Théorème 4 de [5]. Dans [5] le compact stable $K \subseteq [-1,1]^p$ est supposé convexe et d'intérieur non vide, mais la condition $(e^{-ta_i}) \in K$ pour tout $t > 0$ est remplacée par la condition $(e^{-a_i}) \in K$.

THÉORÈME 4. *Soit $K \subseteq [-1,1]^p$ un semi-groupe compact tel que $\mathbf{1} \in K$ et soit $\psi\colon \mathbf{N}_0^p \to \mathbf{R}$ une fonction. Pour qu'il existe un semi-groupe de convolution $(\mu_t)_{t \geqq 0}$ sur $[-1,1]^p$ porté par K tel que*

$$\exp(-t\psi(n)) = \int_K x^n\, d\mu_t(x) \qquad \textit{pour } t \geqq 0,\ n \in \mathbf{N}_0^p$$

il faut et il suffit que ψ admette la représentation

$$\psi(n) = \psi(0) + \langle a, n \rangle + \int_{K \setminus \{\mathbf{1}\}} (1 - x^n)\, d\mu(x),$$

où $a = (a_i) \in \mathbf{R}_+^p$ satisfait à la condition $(e^{-ta_i}) \in K$ pour tout $t > 0$, et μ est une mesure de Radon positive sur $K \setminus \{\mathbf{1}\}$ telle que

$$\int_{K \setminus \{\mathbf{1}\}} (p - x_1 - \ldots - x_p)\, d\mu(x) < \infty .$$

REFERENCES

1. C. Berg, J. P. R. Christensen et P. Ressel, *Positive definite functions on abelian semigroups*, Math. Ann. 223 (1976), 253–272.
2. C. Berg, J. P. R. Christensen et P. Ressel, *Harmonic analysis on semigroups*, (Graduate texts in Math. 100) Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1984.
3. H. Buchwalter et G. Cassier, *Semi-groupes dans le problème des moments*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983), 389–391.
4. H. Buchwalter et G. Cassier, *Semi-groupes dans le problème des moments*, J. Funct. Anal. 52 (1983), 129–145.
5. H. Buchwalter, *Semi-groupes de moments sur un convexe compact de* $\mathbb{R}^p$, Math. Scand. 54 (1984), 157–169.
6. R. J. Lindahl et P. H. Maserick, *Positive-definite functions on involution semigroups*, Duke Math. J. 38 (1971), 771–782.

MATEMATISK INSTITUT
UNIVERSITETSPARKEN 5
2100 KØBENHAVN Ø
DENMARK