MATH SCAND. 54 (1984), 189–208

LES $(e_1,\ldots,e_q)$-CONVEXES DE $\mathbf{R}^n$; LA PROPRIETÉ D'INTERSECTION ET LES FILTRES MAXIMAUX DE CONVEXES

G. COQUET, J. C. DUPIN et R. FOURNEAU

0. Introduction.

Le concept de $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe étudie le comportement à l'infini d'un convexe A en analysant successivement le comportement à l'infini des sections de A par des variétes linéaires emboîtées de dimension allant de 1 à q et passant toutes par un point fixé de l'internat de A (voir Définition 1 et (6) de la Remarque 2). Cette notion de $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe se traduit dualement de façon simple en termes de cône-barrière de A et de cohypercône; à cet égard, le Théorème 4 est fondamental dans l'étude qui suit. La notion de cohypercône a été introduite par Hammer sous le nom de codemispace et bien que les cohypercônes et les hypercônes ne soient pas en général fermés, ils sont très maniables (voir [1], [9], [14], [15]). Le Théorème 4 permet alors de mettre en évidence la richesse des propriétés des $(e_1,\ldots,e_q)$-convexes; ces propriétés présentent certaines analogies avec celles des cônes-simplexes de Choquet (voir (1) de la Remarque 2 et 2.3) et de plus ces convexes ont des projections remarquables (Corollaire 8).

Dans le paragraphe 3, la notion de $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe permet de répondre (Théorème 11) à une question de Valentine ([19], Problème 5.1, page 170) demandant d'établir une classification des convexes fermés de $\mathbf{R}^n$ en fonction de leurs cônes-barrière. La démonstration fait appel au Lemme 10 qui est une conséquence d'un théorème de séparation d'Ellis-Hammer.

Dans le paragraphe 4, est étudiée une variante de la propriété d'intersection, à savoir la propriété d'intersection forte. La propriété d'intersection a été étudiée assez récemment (par exemple [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [10], [16], [20], [21]); pour une définition de cette notion, voir le a) de la Définition 12, avec $S=E$; une généralisation de ce concept, à savoir la notion de propriété d'intersection relativement à S (a) de la Définition 12), est étudiée dans [10] et sous une forme encore plus générale dans [21]. Dans [3] (Théorème 2), Brøndsted met en évidence le lien étroit entre la notion de cohypercône et la notion de propriété d'intersection. Le Théorème 15 (et le Théorème 4)

Reçu le 2. février, 1983.

montrent que, dans le cadre de la propriété d'intersection forte que nous introduisons (b) de la Définition 12), ce lien est encore plus étroit.

Le paragraphe 5 est consacré à l'étude des filtres maximaux de convexes dans $\mathbf{R}^n$. Au congrès de Durham ([12]), Fourneau a posé le problème de la caractérisation des filtres maximaux du lattis des convexes fermés de $\mathbf{R}^n$ et une réponse partielle a été fournie dans [13]. Nous caractérisons ici non seulement ces filtres (Théorème 26 et Remarque 28), mais aussi les filtres maximaux de convexes d'intérieur non vide (Théorème 20 et Théorème 21); il est à noter qu'en langage de $(e_1,\ldots,e_n)$-convexe, ces filtres sont caractérisés de façon simple; en outre, le cas des filtres bornés et le cas des filtres non bornés sont traités séparément; Brøndsted avait également été amené à distinguer ces deux cas lors de l'étude de la propriété d'intersection ([2]).

1. Notations.

1.1 E est un espace vectoriel réel euclidien de dimension finie $\geqq 1$.

1.2. $(A_i)_{i\in I}$ étant une famille de parties de E contenant toutes l'origine 0, $\sum_{i\in I} A_i$ désigne l'ensemble suivant:

$$\sum_{i\in I} A_i = \left\{ \sum_{i\in I} a_i \;\middle|\; \forall\, i \in I,\ a_i \in A_i;\ a_i = 0 \text{ sauf pour un nombre fini} \right\}.$$

1.3. q étant un entier $\geqq 1$, $(e_1, e_2,\ldots,e_q)$ désigne une famille ordonnée formée de points de E qui est orthonormale.

1.4. On désigne par $D(e_1,e_2,\ldots,e_q)$ le cohypercône suivant (voir [9, p. 3]):

$$D(e_1,\ldots,e_q) = (\{x_k e_k + \ldots + x_q e_q \mid 1 \leqq k \leqq q,\ x_k < 0\} \cup \{0\}) + \{e_1,\ldots,e_q\}^{\perp}.$$

Si on complète $(e_1,\ldots,e_q)$ en une base orthonormale $(e_1,\ldots,e_q,\ldots,e_n)$ de E, on peut donc dire qu'un vecteur x de E est dans $D(e_1,\ldots,e_q)$ si et seulement si ou bien toutes les composantes de x d'indice $\leqq q$ sont nulles, ou bien, dans le cas contraire, la première composante non nulle est <0. Ce cohypercône $D(e_1,\ldots,e_q)$ est un cône convexe de sommet 0 et $\{e_1,\ldots,e_q\}^{\perp}$ est le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans ce cohypercône; ce sous-espace vectoriel sera appelé arête. Si $q = n = \dim E$, alors $D(e_1,\ldots,e_n)$ est un cohypercône d'arête $\{0\}$ ou en 0.

Le complément de $D(e_1,\ldots,e_q)$ est également un cône convexe et est maximal parmi les convexes ne rencontrant pas l'arête ([15, p. 133]) et on a:

$$\complement_E D(e_1,\ldots,e_q) = \{x_k e_k + \ldots + x_q e_q + s \mid 1 \leqq k \leqq q,\ x_k > 0 \text{ et } s \in \{e_1,\ldots,e_q\}^{\perp}\}.$$

Notons enfin que dans le cas où $\dim E = n$, la famille orthonormale $(e_1,\ldots,e_n)$

caractérise $D(e_1,\ldots,e_n)$, c'est-à-dire que si $(e'_1,\ldots,e'_n)$ est une famille orthonormale et si $D(e_1,\ldots,e_n)=D(e'_1,\ldots,e'_n)$, alors $e_1=e'_1,\ldots,e_n=e'_n$; cette propriété est, par exemple, une conséquence directe d'une description de $D(e_1,\ldots,e_n)$ donnée par Brøndsted ([3, p. 101]).

1.5. B étant une partie de E, on pose, pour tout $1\leqq k\leqq q$:

$$X_k(B) = \{x_k \mid x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ke_k \in B\}\ .$$

1.6. Si B est convexe, on désigne par $O(B)$ le cône asymptote de B (par définition, $O(B)$ contient une demi-droite pointée Δ d'origine 0, s'il existe une translatée de Δ contenue dans B).

1.7. Si a est un point non nul de E, $\Delta^+(a)$ désigne la demi-droite pointée d'origine 0 contenant a.

1.8. Si A un convexe de E, $B(A)$ désigne le cône-barrière de A:

$$B(A) = \left\{y \in E \;\middle|\; \sup_{x\in A}\langle x \mid y\rangle < +\infty\right\}.$$

Si A est contenu dans un sous-espace vectoriel L de E, on prendra garde de me pas confondre $B(A)$ avec le cône-barrière de A considéré comme convexe de L; ce dernier cône sera noté $B_L(A)$; en fait, si $A\neq\emptyset$, $B_L(A)=B(A+L^\perp)$.

1.9. A étant une partie de E, ${}^iA$, ${}^sA$, ${}^lA$ désignent respectivement l'internat relatif de A, le sous-espace vectoriel engendré par A, la variété linéaire engendrée par A.

A est dit algébriquement ouvert si ${}^iA=A$.

$K(A)$ désigne le cône pointé de sommet 0 engendré par A, c'est-à-dire:

$$K(A) = \{\lambda x \mid \lambda\geqq 0,\ x \in A\}\ .$$

A étant une partie de E contenant 0, $\mathrm{Nl}\,(A)$ désigne le noyau linéaire de A, c'est-à-dire le plus grand sous-espace vectoriel de E contenu dans A.

1.10. Si L est un sous-espace vectoriel de E, p_L désigne la projection orthogonale de E sur L; dans le cas particulier où $L={}^s\{a\}$, la projection p_L sera notée plus brièvement p_a.

1.11. *Notion de U-filtre.* Soient U et F deux parties non vides de l'ensemble $C(E)$ des convexes de E telles que $F\subset U$. On dira que F est un U-filtre si on a (U_1), (U_2), (U_3):

(U_1): $\varnothing \notin F$;

(U_2): l'intersection de 2 éléments de F est élément de F;

(U_3): tout élément de U contenant un élément de F est élément de F.

Un U-filtre sera dit U-maximal si tout U-filtre contenant les éléments de F est égal à F. Un U-filtre U-maximal sera appelá plus brièvement filtre U-maximal.

Dans le paragraphe 4, l'ensemble des convexes d'intérieur non vide (respectivement: convexes fermés d'intérieur non vide) de E sera noté $C_i(E)$ (respectivement: $C_{fi}(E)$); $C_f(E)$ désigne l'ensemble des convexes fermés de E. Remarquons que si $F \subset U \subset V \subset C(E)$, alors F est un U-filtre si F est un V-filtre. Par contre, la réciproque est fausse, par exemple un $C_f(E)$-filtre n'est pas un $C(E)$-filtre car un $C_f(E)$-filtre est formé de convexes fermés. Toutefois, tout $C_i(E)$-filtre (respectivement: $C_{fi}(E)$-filtre) est un $C(E)$-filtre (respectivement; $C_f(E)$-filtre).

2. Les $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$-convexes.

2.1. DÉFINITION 1. Une partie A de E est dite un $(e_1, \ldots, e_q)$-convexe si A est un convexe non vide et s'il existe dans E un translaté A' de A tel que $X_k(A')$ soit non majoré pour tout entier k tel que $1 \leqq k \leqq q$.

REMARQUE 2. (1). Si A est un $(e_1, \ldots, e_q)$-convexe, il en est de même de tout translaté de A et de tout homothétique de A dans une homothétie de centre quelconque et de rapport >0.

(2). A étant un convexe non vide de E, A est un (e_1)-convexe si et seulement si $\Delta^+(e_1)$ est contenu dans $O(A)$; plus précisément, dans ce cas, le convexe A' (dont il est question à la définition 1) contient une demi-droite du type $\{\lambda e_1 \mid \lambda \geqq \lambda_0\}$ (λ_0 étant fixé dans R). Mais, si A est un (e_1, e_2)-convexe, $\Delta^+(e_2)$ n'est pas forcément dans $O(A)$.

Notons encore que l'existence d'un entier q ($q \geqq 1$; voir 1.4) et d'une famille $(e_1, \ldots, e_q)$ tels que A soit un $(e_1, \ldots, e_q)$-convexe équivaut au fait que A est non borné.

(3). Si A est un $(e_1, \ldots, e_q)$-convexe, alors A est un $(e_1, \ldots, e_{q'})$-convexe pour tout $q' \leqq q$.

(4). Soient $(e_1, \ldots, e_q)$ une famille de E, A un convexe non vide de E avec E sous-espace de l'espace euclidien F; alors A est un $(e_1, \ldots, e_q)$-convexe dans E si et seulement si A est un $(e_1, \ldots, e_q)$-convexe dans F. Ce résultat est immédiat si l'on remarque que si $y \notin E$, on a $X_k(A+y) = \varnothing$.

(5). La Définition 1 pourrait se formuler dans un espace vectoriel quelconque et ne pas faire appel à l'orthonormalité de $(e_1, \ldots, e_q)$; toutefois, cette orthonormalité a l'avantage pour certains convexes A de fournir une famille $(e_1,\ldots,e_q)$ unique.

(6). Si A est un $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe, il peut exister un entier k, $1 \leqq k \leqq q$, tel que $X_k(A)$ soit majoré. Toutefois, cette éventualité ne peut se produire si $0 \in {}^iA$: en effet, posons $A' = A - b$ (A' désignant le translaté de A introduit à la Définition 1). Il est clair que $b \in {}^sA$ car, d'après le (2) de la Remarque 2 et le fait que $0 \in {}^iA$, A et A' ont des points en commun sur $\Delta^+(e_1)$. Il existe donc d'après le Lemme 3 qui suit un réel $\varrho > 0$ tel que $\varrho A \supset A'$; chaque $X_k(A)$ est donc non majoré.

LEMME 3. *Si A est un convexe d'un espace vectoriel F et si $0 \in {}^iA$, alors, à tout $b \in {}^sA$, on peut associer un réel $\varrho > 0$ tel que $\varrho A \supset A - b$.*

DÉMONSTRATION. Comme $0 \in {}^iA$, il existe $\lambda > 0$ tel que $-\lambda b \in A$. Comme A est convexe, l'homothétique de A dans l'homothétie de centre $-\lambda b$ et de rapport $\lambda/(\lambda+1)$ $(\lambda/(\lambda+1) < 1)$ est inclus dans A. Donc, $\lambda/(\lambda+1)$ $(A-b) \subset A$.

(7). Si A_1 et A_2 sont deux $(e_1,\ldots,e_q)$-convexes, alors

$$O(A_1 - A_2) \supset {}^s\{e_1,\ldots,e_q\}\ .$$

La démonstration se fait par récurrence sur l'entier q à partir du (2) de la Remarque 2.

2.2. Le Théorème 4 qui suit est essentiel car il permet de ramener l'étude des $(e_1,\ldots,e_q)$-convexes à celle des cohypercônes.

THÉORÈME 4. *Pour tout convexe A de E, les propriétés* (1) *et* (2) *sont équivalentes*:

(1): $B(A) \subset D(e_1,\ldots,e_q)$;
(2): *A est un $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe.*

DÉMONSTRATION. Les propriétés (1) et (2) étant invariantes par translation sur A, on peut supposer que $0 \in {}^iA$.

non(2) $\Rightarrow$ non(1). D'après le (6) de la Remarque 2, il existe k, avec $1 \leqq k \leqq q$, tel que $X_k(A)$ soit majoré. Donc, $e_k \in B(A \cap {}^s\{e_1,\ldots,e_k\})$. Puisque ${}^iA \cap {}^{is}\{e_1,\ldots,e_k\}$ est non vide (cet ensemble contient 0), on a (voir [4, Lemma]):

$$B(A \cap {}^s\{e_1,\ldots,e_k\}) = B(A) + B({}^s\{e_1,\ldots,e_k\})\ ,$$

donc $e_k \in B(A) + {}^s\{e_{k+1}, \ldots, e_q\} + \{e_1, \ldots, e_q\}^\perp$. $B(A)$ contient donc un point du type $e_k + x_{k+1}e_{k+1} + \ldots + x_q e_q + s$ avec $s \in \{e_1, \ldots, e_q\}^\perp$. Il en résulte (voir 1.4) que:

$$B(A) \not\subset D(e_1, \ldots, e_q) .$$

non(1) $\Rightarrow$ non(2). Puisque $B(A) \not\subset D(e_1, \ldots, e_q)$ et que $B(A)$ est un cône, il existe $1 \leqq k \leqq q$ tel que $B(A)$ contienne un point du type $y = e_k + x_{k+1}e_{k+1} + \ldots + x_q e_q + s$ avec $s \in \{e_1, \ldots, e_q\}^\perp$. On a donc, si $x = x_1 e_1 + \ldots + x_k e_k \in A$, $\langle y \mid x \rangle = x_k$; ceci montre que $X_k(A)$ est majoré (puisque $\{\langle y \mid a \rangle \mid a \in A\}$ est majoré). Or $0 \in {}^iA$, donc, d'après le (6) de la Remarque 2, la propriété (2) est fausse.

2.3. Conséquences.

Corollaire 5. *Si A est un $(e_1, \ldots, e_q)$-convexe, alors ${}^iA$ l'est aussi.*

Démonstration. On remarque que $B(A) = B({}^iA)$ et on applique le Théorème 4.

Corollaire 6. *Soit p un entier $\geqq 1$. Si $A_1, \ldots, A_p$ sont des $(e_1, \ldots, e_q)$-convexes et si $\bigcap_{1 \leqq j \leqq p} {}^iA_j \neq \emptyset$, alors $A = \bigcap_j A_j$ est un $(e_1, \ldots, e_q)$-convexe.*

Démonstration. Comme $\bigcap_j {}^iA_j \neq \emptyset$, on a (voir [4, Lemma]):

$$B\left(\bigcap_j A_j\right) = \sum_j B(A_j) .$$

Donc, en posant $D = D(e_1, \ldots, e_q)$, le Théorème 4 permet d'affirmer que:

$$B\left(\bigcap_j A_j\right) \subset D + \ldots + D .$$

Mais on a $D + D = D$ (voir [9]). Le Théorème 4 assure la conclusion. Le résultat suivant précise le Corollaire 6.

Corollaire 7. *Si E est de dimension n et si A_1 et A_2 sont des $(e_1, \ldots, e_n)$-convexes, il en est de même de $A_1 \cap A_2$. En particulier, on a $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.*

Démonstration. D'après le Corollaire 5, on peut supposer A_1 et A_2 ouverts. Il reste alors, d'après le Corollaire 6, à montrer que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Or, d'après le (7) de la Remarque 2, on voit facilement que $A_1 - A_2 = E$. On a donc $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

Corollaire 8. *Si A_1 et A_2 sont des $(e_1,\ldots,e_q)$-convexes algébriquement ouverts, on a, en posant $S=\{e_1,\ldots,e_q\}^{\perp}$:*

$$p_S(A_1)\cap p_S(A_2) = p_S(A_1\cap A_2).$$

Démonstration. Montrons que $p_S(A_1)\cap p_S(A_2)\subset p_S(A_1\cap A_2)$ (l'inclusion dans l'autre sens est triviale).

Si $x\in p_S(A_1)\cap p_S(A_2)$, la variété linéaire $V=x+{}^s\{e_1,\ldots,e_q\}$ rencontre A_1 et A_2; V, A_1, A_2 étant des $(e_1,\ldots,e_q)$-convexes algébriquement ouverts, le Corollaire 6 permet d'affirmer que $V\cap A_1$ et $V\cap A_2$ sont des $(e_1,\ldots,e_q)$-convexes. D'après le (4) de la Remarque 2, $(V-x)\cap(A_1-x)$ et $(V-x)\cap(A_2-x)$ sont deux $(e_1,\ldots,e_q)$-convexes de l'espace euclidien ${}^s\{e_1,\ldots,e_q\}$. Il résulte alors du Corollaire 7 que l'intersection de ces deux convexes est non vide; on a donc $V\cap A_1\cap A_2\neq\varnothing$ et par suite $x\in p_S(A_1\cap A_2)$.

3. Application aux convexes dualement semblables.

3.1. Définition 9 (voir [19, Définition 5.7, p. 66]). Deux convexes de E sont dualement semblables s'ils ont le même cône-barrière.

Notation. On désigne par $\mathscr{D}(E)$ l'ensemble des cohypercônes $D(e_1,\ldots,e_q)$ de E obtenus lorsque q varie entre 1 et n et $(e_1,\ldots,e_q)$ varie dans E.

3.2. Lemme 10. *Dans E, tout cône convexe C pointé de sommet 0 est l'intersection des éléments de $\mathscr{D}(E)$ contenant C.*

Démonstration. Il suffit de monter que, si $x\notin C$, il existe un élément de $\mathscr{D}(E)$ contenant C et ne contenant pas x.

Soit $U=\mathrm{Nl}\,(C)$ et soit $q\colon E\to E/U$ l'application canonique de E dans l'espace vectoriel quotient E/U; $q(C)$ est un cône convexe pointé de sommet 0 qui est saillant (c'est-à-dire ne contenant pas de droite passant par 0) et $q(x)\notin q(C)$ car $x+U$ ne rencontre pas C (sinon x serait dans C). $K=q(C)\setminus\{0\}$ est donc un cône convexe épointé. D'après un théorème d'Ellis-Hammer (voir [14, Corollary 1, p. 103]), il existe dans E/U un cohypercône en 0 (voir 1.4) D tel que $q(C)\subset D$ et $q(x)\notin D$; on voit alors que $q^{-1}(D)$ est un cohypercône d'arête U (ce résultat a été remarqué par Hammer: voir [15, Theorem 3, p. 133]); donc $q^{-1}(D)\in\mathscr{D}(E)$ et répond à la question.

Théorème 11. *Pour deux convexes A_1 et A_2 de l'espace vectoriel E de dimension finie n, les assertions* (1) *et* (2) *sont équivalentes*:

(1): *A_1 et A_2 sont dualement semblables;*
(2): *Pour tout entier q tel que $1 \leqq q \leqq n$ et toute famille $(e_1, \ldots, e_q)$, A_1 et A_2 sont simultanément $(e_1, \ldots, e_q)$-convexes ou non.*

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2). C'est une conséquence du Théorème 4.
(2) $\Rightarrow$ (1). Par hypothèse et d'après le Théorème 4, on a:

$$B(A_1) \subset D(e_1, \ldots, e_q) \Leftrightarrow B(A_2) \subset D(e_1, \ldots, e_q) .$$

Donc un élément de $\mathscr{D}(E)$ contient $B(A_1)$ si et seulement s'il contient $B(A_2)$. Le conclusion résulte alors du lemme 10 appliquè à $B(A_1)$ et $B(A_2)$.

4. Application a la proprieté forte d'intersection finie.

4.1. DÉFINITION 12. Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille non vide de convexes de E et soit S un sous-espace vectoriel de E.

a). Si l'ensemble I est fini, on dit que la famille $(C_i)_{i \in I}$ vérifie la propriété d'intersection relativement à S (en abrégé: p.i. S) si, pour toute famille $(x_i)_{i \in I}$ de points de S:

$$\bigcap_{i \in I} (x_i + C_i) \neq \varnothing .$$

b). I étant maintenant fini ou infini, on dira que la famille $(C_i)_{i \in I}$ vérifie la propriété forte d'intersection finie relativement à S (en abrégé: p.f.i.f. S.) si toute famille finie à valeur dans $\{C_i \mid i \in I\}$ vérifie p.i. S.

REMARQUES 13. (1). La propriété p.f.i.f. E sera notée plus rapidement p.f.i.f.

(2). Une famille non vide $(C_i)_{i \in I}$ de convexes vérifie p.f.i.f. $\{0\}$ si et seulement si toute intersection finie d'éléments de la famille est non vide.

(3). Lorsque I est fini, la propriété p.f.i.f. S implique la propriété p.i. S, mais la réciproque est fausse en général. Par exemple, il suffit de prendre, dans $E = \mathbf{R}^2$, pour C_1 un sous-espace vectoriel S de dimension 1 et pour C_2 une droite non parallèle à S: (C_1, C_2) vérifie p.i. S, mais (C_1, C_2, C_2) ne vérifie pas p.i. S.

(4). La notion de p.f.i.f. S est en fait relative à un ensemble à savoir l'ensemble $\{C_i \mid i \in I\}$; on peut donc étendre cette notion à un ensemble de convexes.

REMARQUE 14. Soit $(C_j)_j$ une famille finie ou infinie comprenant avec chaque C_j, l'internat relatif ${}^iC_j$ de C_j. Alors, la famille $(C_j)_j$ vérifie p.f.i.f. S si et seulement si la famille $({}^iC_j)_j$ vérifie p.f.i.f. S.

4.2. THÉORÈME 15. *Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille finie ou infinie, non vide de convexes* *de E. On suppose que cette famille contient en même temps que C_i chaque internat relatif ${}^iC_i$. Soit S un sous-espace vectoriel de E de dimension $q \geqq 1$. On suppose que $(p_{S^\perp}({}^iC_i))_{i\in I}$ vérifie* p.f.i.f. $\{0\}$. *Alors les propriétés* (1), (2) *et* (3) *sont équivalentes*:

(1): $(C_i)_{i\in I}$ *vérifie* p.f.i.f. S;
(2): $\mathrm{Nl}\,(\sum_{i\in I} B(C_i)) \subset S^\perp$;
(3): *il existe $e_1,\dots,e_q$ dans S tels que chaque C_i soit un $(e_1,\dots,e_q)$-convexe.*

DÉMONSTRATION. Elle repose sur le Lemme 16 suivant:

LEMME 16. *Soient $A_1, A_2,\dots,A_p$ (p entier $\geqq 1$) des $(e_1,\dots,e_q)$-convexes de E et soit V une variété parallèle à ${}^s\{e_1,\dots,e_q\}$. Si on a à la fois ${}^iA_1 \cap V \neq \emptyset,\dots,{}^iA_p \cap V \neq \emptyset$, alors $V \cap (\bigcap_{1\leqq j\leqq p} A_j)$ est un $(e_1,\dots,e_q)$-convexe de E.*

DÉMONSTRATION. On peut supposer, grâce au (1) de la Remarque 2, que $V = {}^s\{e_1,\dots,e_q\}$. Comme V est un $(e_1,\dots,e_q)$-convexe, d'après 6, ${}^iA_1 \cap V,\dots,{}^iA_p \cap V$ sont des $(e_1,\dots,e_q)$-convexes de E, donc aussi des $(e_1,\dots,e_q)$-convexes de V (d'après le (4) de la Remarque 2).

$$\bigcap_{1\leqq j\leqq p} ({}^iA_j \cap V) = V \cap \left(\bigcap_{1\leqq j\leqq p} {}^iA_j\right)$$

est donc un $(e_1,\dots,e_q)$-convexe de V d'après le Corollarire 7 (car $\dim V = q$); d'où la conclusion.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 15. Compte tenu de la Remarque 14, de l'égalité $B(C_i) = B({}^iC_i)$ et du Corollaire 5, on peut supposer que chaque C_i est algébriquement ouvert.

(3) $\Rightarrow$ (1). Soit $(C'_k)_k$ une famille finie à valeur dans $\{C_i \mid i \in I\}$ et soit $(x_k)_k$ une famille correspondante de points de S. Il faut noter que

$$\bigcap_k (x_k + C'_k) \neq \emptyset\,.$$

On va en fait montrer que cette intersection est même un $(e_1,\dots,e_q)$-convexe.

Comme $(p_{S^\perp}(C_i))_i$ vérifie p.f.i.f. $\{0\}$, on a:

$$\bigcap_k p_{S^\perp}(C'_k) \neq \emptyset\ ;$$

désignons donc par x un élément commun à chaque $C'_k + S$; on a, pour tout k:

$$(x_k + C'_k) \cap (x + S) \neq \emptyset\,.$$

On applique alors le Lemme 16 à la famille de convexes algébriquement ouverts $A_k = x_k + C'_k$ et à $V = x + S$.

(1) $\Rightarrow$ (2). $\sum_{i \in I} B(C_i)$ étant un cône, on peut se ramener au cas où $(C_i)_{i \in I}$ est une famille finie: en effet, si D est une droite homogène contenue dans $\sum_{i \in I} B(C_i)$, alors D est contenue dans une somme finie des $B(C_i)$ précédents.

Posons $C = \bigcap_{i \in I} C_i$; par hypothèse, pour tout $(x, y) \in S^2$,

$$(x+C) \cap (y+C) = \left(\bigcap_{i \in I} (x+C_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I} (y+C_i)\right) \neq \varnothing .$$

Montrons qu'on a:

$$\mathrm{Nl}\,(B(C)) \subset S^\perp .$$

Supposons le contraire: $\mathrm{Nl}\,(B(C))$ contient un point du type $v = s + t$ avec $s \in S$, $t \in S^\perp$, $s \neq 0$. Par définition même du cône-barrière, il existe un réel M tel que:

$$C \subset \{x \mid |\langle x \mid v\rangle| < M\} .$$

Soit k un réel >0 et soit x quelconque dans C. On a:

$$\begin{aligned} \langle ks + x \mid v\rangle &= k\langle s \mid s\rangle + \langle x \mid v\rangle \\ &> -M + k\langle s \mid s\rangle , \end{aligned}$$

donc $\langle ks + x \mid v\rangle > M$ si $k\langle s \mid s\rangle > 2M$; par suite, on a, pour k assez grand:

$$ks + C \subset \{x \mid \langle x \mid v\rangle > M\} ,$$

donc $C \cap (ks + C) = \varnothing$, d'où la contradiction. On a donc $\mathrm{Nl}\,(B(C)) \subset S^\perp$.

La conclusion s'obtient en remarquant que $B(C) = \sum_{i \in I} B(C_i)$ d'après un résultat de Brøndsted (voir [4, Lemma]) car on a $\bigcap_{i \in I} {}^iC_i \neq \varnothing$.

(2) $\Rightarrow$ (3). D'après l'hypothèse (et la démonstration du Lemme 10), il existe un cohypercône $D(e_1, \ldots, e_q)$ d'arête $S^\perp = \{e_1, \ldots, e_q\}^\perp$ et contenant $\sum_{i \in I} B(C_i)$.

Puisque $\sum_{i \in I} B(C_i) \subset D(e_1, \ldots, e_q)$, on a donc, pour tout i, $B(C_i) \subset D(e_1, \ldots, e_q)$. Chaque C_i est donc un $(e_1, \ldots, e_q)$-convexe d'après le Théorème 4.

Corollaire 17. *Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille finie ou infinie, non vide de convexes. Alors les propriétés* (1), (2) *et* (3) *sont équivalentes*:

(1): $(C_i)_{i \in I}$ *vérifie* p.f.i.f.;
(2): $\mathrm{Nl}\,(\sum_{i \in I} B(C_i)) = \{0\}$ (i.e.: $\sum_{i \in I} B(C_i)$ *est un cône saillant*);
(3): *il existe* $e_1, \ldots, e_n$ *tels que chaque* C_i *soit un* $(e_1, \ldots, e_n)$*-convexe.*

Démonstration. D'après le 3.2 de [2], $(C_j)_{j \in I}$ vérifie p.f.i.f. si et seulement si $({}^iC_j)_{j \in I}$ vérifie p.f.i.f. D'après le Corollaire 5, C_j est un $(e_1, \ldots, e_n)$-convexe si et seulement si ${}^iC_j$ l'est. La conclusion résulte du Théorème 15.

COROLLAIRE ET DÉFINITION 18. *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille finie ou infinie, non vide de convexes de E. On suppose que cette famille contient en même temps que C_i chaque ${}^iC_i$ et que la famille $({}^iC_i)_{i\in I}$ vérifie* p.f.i.f. $\{0\}$. *Alors, on a*:

(1): *Il existe un plus grand sous-espace vectoriel S de E tel que $(C_i)_{i\in I}$ vérifie* p.f.i.f. *S. Ce sous-espace vectoriel S sera noté $\mathscr{L}((C_i)_{i\in I})$ ou $\mathscr{L}(\{C_i \mid i\in I\})$ (voir (4) de la Remarque 13) et on a*:

$$\mathscr{L}((C_i)_{i\in I}) = L^\perp \textit{ avec } L = \mathrm{Nl}\left(\sum_{i\in I} B(C_i)\right) ;$$

(2): *Hormis le sous-espace $\{0\}$, il n'y a pas dans L de sous-espace vectorel S' tel que $(p_L(C_i))_{i\in I}$ vérifie* p.f.i.f. *S' dans L.*

DÉMONSTRATION. Comme en début de démonstration du Théorème 15, on se ramène au cas où chaque C_i est algébriquement ouvert.

(1) est une conséquence du (1) $\Leftrightarrow$ (2) du Théorème 15 en remarquant que si $(C_i)_{i\in I}$ vérifie p.f.i.f. S où S est un sous-espace vectoriel de E, alors $(p_{S^\perp}(C_i))_{i\in I}$ vérifie p.f.i.f. $\{0\}$.

(2) Le cas $\mathscr{L}((C_i)_{i\in I})=\{0\}$ est trivial car, d'après (1), on a $L=E$.
Sinon, d'après le Théorème 15 et le (1), on peut poser:

$$\mathscr{L}((C_i)_{i\in I}) = {}^s\{e_1,\ldots,e_q\} ,$$

chaque C_i étant un $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une droite S' de L telle que $(p_L(C_i))_{i\in I}$ vérifie p.f.i.f. S' dans L. Alors, pour toute famille $(C'_j)_j$ finie telle que $C'_j \in \{C_i \mid i\in I\}$ et pour toute famille correspondante $(s'_j)_j$ de points de S', on a:

$$\bigcap_j (s'_j + p_L(C'_j)) = \bigcap_j p_L(s'_j + C'_j) \neq \varnothing ,$$

donc, d'après le Corollaire 8,

$$\bigcap_j (s'_j + C'_j) \neq \varnothing .$$

La famille $(C_i)_{i\in I}$ vérifie donc p.f.i.f. S'; ainsi, d'après (1), $S'\subset\mathscr{L}((C_i)_{i\in I})=L^\perp$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $S'\subset L$.

5. Application à la caracterisation des filtres maximaux de convexes.

5.1. *Caractérisation des filtres $C_i(E)$-maximaux.*

DÉFINITION 19. Un filtre sera dit $C_i(E)$-maximal borné s'il est $C_i(E)$-maximal et s'il contient un borné. Un filtre sera dit $C_i(E)$-maximal non borné s'il est $C_i(E)$-maximal et s'il ne contient aucun borné.

THÉORÈME 20. *On suppose E de dimension $n \geqq 1$.*

(1). *Soient $e_1, \ldots, e_n \in E$. Soit F l'ensemble des convexes A de E tels que $0 \in \bar{A}$ et $K(A)$ soit un $(e_1, \ldots, e_n)$-convexe.*
Alors.:
(a). *Pour tout $A \in F$, on a: ${}^iA \in F$;*
(b). *F est un filtre $C_i(E)$-maximal borné et la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ associée à F est unique.*

(2). *Réciproquement, tout filtre $C_i(E)$-maximal borné est translaté d'un tel F.*

DÉMONSTRATION. (1)(a). Rappelons que $K(A) = \{\lambda x \mid \lambda \geqq 0, x \in A\}$ (voir 1.9). On a (voir [17, p. 50]):

$$ {}^iK(A) = \{\lambda x \mid \lambda > 0, x \in {}^iA\} , $$

d'où ${}^iK(A) \subset K({}^iA)$. Or ${}^iK(A)$ est un $(e_1, \ldots, e_n)$-convexe d'après le Corollaire 5; il en est donc de même de $K({}^iA)$. En outre, on a (voir [17, Theorem 6.3]) $\overline{{}^iA} = \bar{A}$, ce qui prouve que $0 \in \overline{{}^iA}$.

(1)(b). Pour montrer que chaque $A \in F$ est d'intérieur non vide, il suffit de montrer que A est de dimension n, c'est-à-dire que ${}^lA = E$; or, puisque $0 \in \bar{A}$, on a

$$ {}^lA = {}^sA = {}^sK(A) = E , $$

d'après le (7) de la Remarque 2.

F contient un borné, par exemple la boule unité de E.

Montrons que F est un filtre.

Les axiomes (U_1) et (U_3) sont clairement vérifiés. Montrons que (U_2) est vérifié, c'est-à-dire que, si A_1 et A_2 sont éléments de F, il en est de même de $A_1 \cap A_2$. Compte tenu de (1)(a) et de la partie de (1)(b) venant d'être démontrée, on peut supposer que A_1 et A_2 sont ouverts. Puisque $K(A_1)$ et $K(A_2)$ sont des $(e_1, \ldots, e_n)$-convexes, il en est de même de $K(A_1) \cap K(A_2)$ d'après le Corollaire 7. Soit maintenant $x \in K(A_1) \cap K(A_2)$ avec $x \neq 0$. Puisque A_1 et A_2 sont ouverts, il existe y dans l'intervalle ouvert $]0, x[$ tel que $]0, y[\subset A_1 \cap A_2$. Ceci montre que $0 \in \overline{A_1 \cap A_2}$ et que:

$$ K(A_1) \cap K(A_2) \subset K(A_1 \cap A_2) . $$

Cette dernière inclusion assure que $K(A_1 \cap A_2)$ est un $(e_1, \ldots, e_n)$-convexe.

Montrons que F est maximal.

Il suffit pour cela de montrer que si C est un convexe quelconque rencontrant tous les éléments de F, alors $C \in F$. Comme toute boule centrée en 0 est élément de F, on a $0 \in \bar{C}$. Il reste à montrer que $K(C)$ est un $(e_1,\ldots,e_n)$-convexe, c'est-à-dire, d'après le Théorème 4, que $B(K(C)) \subset D(e_1,\ldots,e_n)$; supposons que ça soit faux: il existe $x \in B(K(C))$ du type $x = x_k e_k + \ldots + x_n e_n$ avec $x_k > 0$. On en déduit que:

$$K(C) \subset \{y \in E \mid \langle y|x\rangle \leqq 0\}$$

(car $K(C)$ est un cône de sommet 0); or, d'après le Théorème 4, on a:

$$A = \{y \in E \mid \langle y|x\rangle > 0\} \in F,$$

car, avec la Notation 1.7, on a:

$$B(A) = \Delta^+(-x) \subset D(e_1,\ldots,e_n);$$

C ne rencontre pas A, d'où la contradiction.

Montrons l'unicité de la famille $(e_1,\ldots,e_n)$. Pour cela, soit $(e'_1,\ldots,e'_n)$ une famille distincte de $(e_1,\ldots,e_n)$ et montrons que F contient un élément qui n'est pas un $(e'_1,\ldots,e'_n)$-convexe. Par hypothèse et d'après le 1.4, il existe une demi-droite Δ d'origine 0 telle que $\Delta \subset D(e_1,\ldots,e_n)$ et $\Delta \not\subset D(e'_1,\ldots,e'_n)$; on a $B(B(\Delta)) = \Delta$, d'où, d'après le Théorème 4, $B(\Delta) \in F$ et $B(\Delta)$ n'est pas un $(e'_1,\ldots,e'_n)$-convexe.

(2). Soit F' un filtre $C_i(E)$-maximal borné. On a $\bigcap_{A \in F'} \bar{A} \neq \varnothing$ car l'un des $\bar{A}$ est compact et car chaque intersection finie d'éléments de F' est non vide (car élément de F'). Translatons F' de sorte que $0 \in \bigcap_{A \in F'} \bar{A}$ et montrons que le filtre F'' ainsi obtenu est du type F.

La famille $(K(A))_{A \in F''}$ vérifie p.f.i.f.: en effet, pour toute famille $(K(A'_j))_j$ finie à valeurs dans $\{K(A) \mid A \in F''\}$, on a, pour toute famille $(x_j)_j$ correspondante formée d'éléments de E:

$$\bigcap_j (x_j + K(A'_j)) \supset \bigcap_j (x_j + K(A))$$

avec $A = \bigcap_j A'_j$; or on a $\bigcap_j (x_j + K(A)) \neq \varnothing$, d'après le Théorème 1 de [6], car $K(A)$ est un cône d'intérieur non vide. D'après le Corollaire 17, il existe $e_1,\ldots,e_n$ tels que chaque $K(A)$ où $A \in F''$ soit un $(e_1,\ldots,e_n)$-convexe.

THÉORÈME 21. *On suppose E de dimension $n \geqq 1$.*

(1). *Soit $1 \leqq q \leqq n$ et soient $e_1,\ldots,e_q \in E$. Posons $L = {}^s\{e_1,\ldots,e_q\}$ et $S = L^\perp$. Soit F l'ensemble des $(e_1,\ldots,e_q)$-convexes de E tel que $p_S(F)$ soit un filtre $C_i(S)$-maximal borné. Alors:*

(a). *Pour tout $A \in F$, on a ${}^iA \in F$;*

(b). *F est un filtre $C_i(E)$-maximal non borné;*

(c). *Avec les notations du Corollaire et Définition 18, $\mathscr{L}(F)=L$ et la famille $(e_1,\ldots,e_q)$ est unique.*

(2). *Réciproquement, tout filtre $C_i(E)$-maximal non borné est du type décrit en* (1).

DÉMONSTRATION. (1)(a). Soit $A \in F$. D'après le I.10.10 de [1], on a ${}^i p_S(A) = p_S({}^iA)$, donc on a $p_S({}^iA) \in p_S(F)$; de plus, d'après le Corollaire 5, ${}^iA$ est un $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe.

(1)(b). F est formé de convexes tous non bornés car $q \geqq 1$.

Montrons que, si $A \in F$, A est d'intérieur non vide. Soit $x \in {}^iA$; d'après les (1) et (4) de la Remarque 2 et d'après les Corollaires 5 et 6, $({}^iA-x)\cap L$ est un $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe de l'espace L, donc est de dimension q. Ainsi un sous-espace vectoriel T de E contenant ${}^iA-x$, contient à la fois L et $A-x$, donc aussi $A-x+L$, donc aussi $p_S(A-x)$, donc aussi S car $p_S(A-x)$ est d'intérieur non vide dans S (puisque, par hypothèse, $p_S(A)$ est d'intérieur non vide dans S); ainsi $T=E$, d'où la conclusion.

Montrons que F est un filtre. Pour cela, montrons que si A_1 et A_2 sont éléments de F, il en est de même de $A_1 \cap A_2$. D'après ce qui précède, on peut supposer que A_1 et A_2 sont ouverts. On a $p_S(A_1)\cap p_S(A_2) \in p_S(F)$ car $p_S(F)$ est un filtre, donc en particulier $p_S(A_1)\cap p_S(A_2) \neq \varnothing$. D'après le Corollaire 8, on a:

$$p_S(A_1) \cap p_S(A_2) = p_S(A_1 \cap A_2)\,,$$

donc $p_S(A_1\cap A_2) \in p_S(F)$ et $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$; le Corollaire 6 permet de conclure.

Montrons que F est maximal.

Pour cela, il suffit de montrer que, si C est un convexe rencontrant chaque élément de F, alors $C \in F$. Par hypothèse, $p_S(C)$ rencontre donc tout élément de $p_S(F)$; si l'on se reporte à la démonstration du Théorème 20 (partie maximalité), on voit donc que $p_S(C) \in p_S(F)$. Il reste à montrer que C est un $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe de E. Si C ne l'est pas, il existe, d'après le Théorème 4 et le 1.4, $x \in B(C)$ tel que $x = x_k e_k + \ldots + x_n e_n$ avec $x_k > 0$ pour un certain $k \leqq q$ (on a complété $(e_1,\ldots,e_q)$ en une base orthonormale $(e_1,\ldots,e_n)$ de E) et on a, pour un certain $b \in \mathbf{R}$:

$$(\alpha) \qquad C \subset \{y \in E \mid \langle y|x\rangle \leqq b\}\,.$$

Soit $\Omega \in p_S(F)$ avec Ω borné; comme Ω est borné et $x_k>0$, on peut choisir un réel a tel que

$$(\beta) \qquad ae_k+\Omega \subset \{y \in E \mid \langle y|x\rangle > b\}\,.$$

Or, on a:

(γ) $\qquad A = \{y \in E \mid \langle y|x\rangle > b\}$ est un $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe .

En effet $B(A) = \Delta^+(-x) \subset D(e_1,\ldots,e_q)$.

(β) et (γ) montrent que $A \in F$. (α) montre que C ne rencontre pas A, d'où la contradiction.

(1)(c). D'après le (3) $\Rightarrow$ (1) du Théorème 15, $\mathscr{L}(F) \supset L$. De plus, aucun $x \neq 0$ de $S = L^\perp$ ne peut appartenir à $\mathscr{L}(F)$ car il existe $A \in F$ tel que $p_S(A)$ soit borné, donc pour λ réel > 0 assez grand, on a:

$$p_S(A) \cap (\lambda x + p_S(A)) = \varnothing ,$$

ce qui montre que $A \cap (\lambda x + A) = \varnothing$; d'où l'égalité $\mathscr{L}(F) = L$.

Montrons maintenant l'unicité de $(e_1,\ldots,e_q)$.

Pour cela supposons qu'une autre famille orthonormale $(e'_1,\ldots,e'_r)$ permette de définir F et montrons qu'on aboutit à une contradiction. D'après l'unicité de $\mathscr{L}(F)$, on a $r = q$ et ${}^s\{e'_1,\ldots,e'_q\} = L$. Raisonnons alors comme dans la démonstration du (1)(b) du Théorème 20. Soit Δ une demi-droite d'origine 0 telle que $\Delta \subset D(e_1,\ldots,e_q)$ et $\Delta \not\subset D(e'_1,\ldots,e'_q)$. On a $B(B(\Delta)) = \Delta$, donc si Ω est un convexe borné de $p_S(F)$, $B(B(\Delta) + \Omega) = \Delta$; le Théorème 4 montre alors que $B(\Delta) + \Omega \in F$ (puisque $A \subset D(e_1,\ldots,e_q)$) et que $B(\Delta) + \Omega \notin F$ (puisque $\Delta \not\subset D(e'_1,\ldots,e'_q)$); d'où la contradiction et la conclusion.

(2). Soit F' un filtre $C_i(E)$-maximal non borné. Remarquons d'abord que, pour tout $A \in F'$, on a ${}^iA \in F'$: en effet, ${}^iA$ rencontre chaque élément A_1 du filtre F' car $A_1 \cap A \in F'$ et est d'intérieur non vide. On peut donc appliquer le Corollaire 18, ce qui donne en posant $\mathscr{L}(F') = L$, $L^\perp = \mathrm{Nl}\,(\sum_{A \in F'} B(A))$. Posons $L^\perp = S$ et montrons qu'il existe $A \in F'$ tel que $\mathrm{Nl}\,(B(A)) = S$. Si $S = \{0\}$, ceci est trivial. Sinon, soit $(f_1,\ldots,f_r)$ une base de S; il existe des parties finies $F_1,\ldots,F_r$ de F' telles que

$$\sum_{A \in F_i} B(A) \supset \{-f_i, f_i\} ,$$

donc

$$\sum_{A \in F_i} B(A) \supset {}^s\{f_i\} .$$

Il en résulte, en posant $G = F_1 \cup \ldots \cup F_r$, que

$$\sum_{A \in G} B(A) \supset S ,$$

donc, d'après la définition même du cône-barrière, $B(\bigcap_{A \in G} A)$ contient chaque $B(A)$ $(A \in F_i)$, donc aussi S.

Comme F' est un filtre $C_i(E)$-maximal non borné, on a $S \neq E$; sinon, il existerait $A \in F'$ tel que $\mathrm{Nl}\,(B(A))=E$, donc $B(A)=E$ et A serait borné. On a donc $L \neq \{0\}$; donc, d'après le Théorème 15, tous les éléments de F' sont $(e_1,\ldots,e_q)$-convexes (pour une même famille $(e_1,\ldots,e_q)$).

$p_S(F')$ est formé de convexes d'intérieur non vide dans S puisque F' est formé de convexes d'intérieur non vide dans E.

Montrons que $p_S(F')$ contient un convexe borné. En effet, si A est choisi dans F' de sorte que $\mathrm{Nl}\,(B(A))=S$, $B(A)\supset S$; ainsi, $B(A)\cap S=S$. Or, on a, d'après 1.8 et le fait que $A+L=p_S(A)+L$:

$$B_S(p_S(A)) = B(p_S(A)+L) = B(A+L) = B(A)\cap S\,.$$

On en déduit que $B_S(p_S(A))=S$ et donc que $p_S(A)$ est borné. $p_S(F')$ est un filtre de S. En effet, si A_1 et $A_2 \in F'$, on a $A_1\cap A_2 \in F'$ et d'autre part;

$$p_S(A_1)\cap p_S(A_2) \supset p_S(A_1\cap A_2)\,,$$

donc $p_S(A_1)\cap p_S(A_2)\in p_S(F')$.

$p_S(F')$ est maximal dans S. En effet, si un convexe Ω de S d'intérieur non vide dans S rencontre tout élément de $p_S(F')$, alors $\Omega+L$ est un convexe d'intérieur non vide dans E rencontrant tout élément de F'. La maximalité de F' implique donc que $\Omega+L\in F'$, donc $\Omega\in p_S(F')$.

F' est donc du type F décrit en (1).

Remarque 22. Si la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est fixée dans E de dimension $n\geqq 1$, l'ensemble des $(e_1,\ldots,e_n)$-convexes de E est un filtre $C_i(E)$-maximal non borné. Il suffit de faire $L^\perp=\{0\}$ dans le théorème précédent.

Remarque 23. En regroupant les remarques faites à l'intérieur des démonstrations des Théorèmes 20 et 21, on peut affirmer que tout filtre F $C_i(E)$-maximal est en même temps $C(E)$-maximal, $C(E)$ désignant l'ensemble des convexes de E (voir 1.11): en effet, il a été montré que si C est un convexe quelconque rencontrant tout élément de F, alors $C\in F$.

5.2. *Caractérisation des filtres $C_{fi}(E)$-maximaux.*

Remarque 24. La classification effectuée pour les $C_i(E)$-filtres à la Définition 19 est inutile dans le cadre des filtres $C_{fi}(E)$-maximaux. En effet, si E est non réduit à $\{0\}$, un filtre $C_{fi}(E)$-maximal ne contient aucun borné (voir [11, 6.10 et 6.12]).

Lemme 25. *Soient E de dimension $n\geqq 1$, $(e_1,\ldots,e_n)$ une base orthonormale de E et q un entier tel que $1\leqq q\leqq n$. Posons $L={}^s\{e_1,\ldots,e_q\}$ et $S=L^\perp$. Soit X un convexe ouvert de S. Alors il existe un $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe fermé A de E tel que $p_S(A)=X$.*

DÉMONSTRATION. Si $q=n$, il suffit de poser $A=E$.

Supposons maintenant $q<n$.

Quitte à effectuer une translation sur X, on peut supposer que $0 \in X$. Soit ϱ une fonction concave définie sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\varrho(\mathbb{R}_+)\subset]0,1[$ et telle que $\lim_{t\to+\infty}\varrho(t)=1$ (par exemple, $\varrho(t)=(1+t)/(2+t)$). Envisageons l'ensemble A_1 du sous-espace vectoriel

$$F = {}^s\{e_1\}+S = {}^s\{e_1,e_{q+1},\ldots,e_n\}$$

de E défini par:

$$A_1 = \bigcup_{t\geqq 0} (te_1+\varrho(t)\bar{X}) .$$

Montrons que A_1 est un (e_1)-convexe fermé de F tel que $p_S(A_1)=X$.Montrons d'abord que A_1 est fermé dans F. Soit $y=te_1+u \in \bar{A}_1$ $(t \in \mathbb{R},\ u \in S)$; il existe une suite $y_n=t_ne_1+\varrho(t_n)x_n$ de points de A_1 $(x_n \in \bar{X})$ telle que $\lim_{n+\infty} y_n=y$, donc telle que $\lim_{n\to+\infty}\varrho(t_n)x_n=u$. Puisque $x_n \in \bar{X}$ et que

$$\lim_{n\to+\infty} \varrho(t_n) = \varrho(t) \neq 0 ,$$

il en résulte que la suite x_n a une limite $x \in \bar{X}$. Ainsi, $y=te_1+\varrho(t)x \in A_1$ et A_1 est fermé.

Montrons maintenant que A_1 est convexe. Soient $te_1+\varrho(t)x$ et $t'e_1+\varrho(t')x'$ deux points de A_1 et soit $\lambda \in [0,1]$.

Montrons que le point z tel que

$$\begin{aligned} z &= \lambda(te_1+\varrho(t)x)+(1-\lambda)(t'e_1+\varrho(t')x') \\ &= (\lambda t+(1-\lambda)t')e_1+(\lambda\varrho(t)x+(1-\lambda)\varrho(t')x') \end{aligned}$$

est élément de A_1. Puisque ϱ est concave, on a:

$$\lambda\varrho(t)+(1-\lambda)\varrho(t') \leqq \varrho(\lambda t+(1-\lambda)t') ,$$

d'où il résulte, puisque $0 \in X$, que

$$v = \frac{\lambda\varrho(t)x+(1-\lambda)\varrho(t')x'}{\varrho(\lambda t+(1-\lambda)t')} \in X .$$

Ainsi, on a:

$$z = (\lambda t+(1-\lambda)t')e_1+\varrho(\lambda t+(1-\lambda)t')v \in A_1 ,$$

et donc A_1 est convexe.

Il est clair que A_1 est un (e_1)-convexe fermé de F car A_1 est convexe fermé et car A_1 contient $\Delta^+(e_1)$. Compte teru des hypothèses faites sur ϱ et du fait que $0 \in X$, on a $p_S(A_1)=X$.

Pour construire le convexe A dont il est question dans l'énoncé il suffit alors d'envisager les deux cas suivanrs:
— ou bien $q=1$: on pose $A=A_1$;
— ou bien $q>1$: on pose $A=A_1+^s\{e_2,\ldots,e_q\}$.

THÉORÈME 26. *On suppose E de dimension* $\geqq 1$.

(1). *Soit F un filtre $C_i(E)$-maximal non borné. Alors, $\bar{F}=\{\bar{A} \mid A \in F\}$ est un filtre $C_{fi}(E)$-maximal.*
(2). *Tout filtre $C_{fi}(E)$-maximal est du type précédent.*

DÉMONSTRATION. (1). Seule la maximalité de $\bar{F}$ n'est pas évidente; montrons cette maximalité.

Pour cela, il suffit de montrer que, si C est un convexe quelconque de E et rencontrant tous les éléments de $\bar{F}$, alors on a (a):

$$\text{(a)} \qquad \bar{C} \in \bar{F}\,.$$

F peut être décrit comme dans l'énoncé du Théorème 21. Avec les notations de ce théorème. désignons par Γ un convexe compact de $p_S(F)$ contenant l'origine (si $q<n$, d'après le Théorème 20, en effectuant une translation convenable sur F, on peut supposer que la fermeture de tout élément de $p_S(F)$ contient l'origine; si $q=n$, on prend $\Gamma=S=\{0\}$). Montrons que l'on a (b):

$$\text{(b)} \qquad C-\Gamma \text{ rencontre tout } (e_1,\ldots,e_q)\text{-convexe fermé } A_1 \text{ de } L.$$

Par hypothèse, on a $C\cap(\Gamma+A_1)\neq\varnothing$ puisque $\Gamma+A_1\in\bar{F}$ (compte tenu de l'égalité $p_S\,(\Gamma+A_1)=\Gamma$ et que $\Gamma+A_1$ est fermé; d'où (b).

(b) implique, d'après le (1) de la remarque 2, que $C-\Gamma$ rencontre tout $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe A_2 de L. Ainsi $(C-\Gamma)\cap L$ est un $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe de L d'après les Remarques 22 et 23. Il en résulte que $C-\Gamma$ est un $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe de E et donc, puisque $B(C-\Gamma)=B(C)$, on a, d'après le Théorème 4, la propriété (c):

$$\text{(c)} \qquad C \text{ est un } (e_1,\ldots,e_q)\text{-convexe de } E\,.$$

Dans le cas où $q=n$, la propriété (c) implique la propriété (a) car, dans ce cas, $\bar{F}$ est le filtre des $(e_1,\ldots,e_n)$-convexes fermés de E (Remarque 22).

On se place, dans la suite, dans le cas où $q<n$. $p_S(F)$ est alors du type décrit dans le Théorème 20. Montrons qu'on a la propriété (d):

$$\text{(d)} \qquad p_S(C) \in p_S(F)\,.$$

D'après la Remarque 23, il suffit de montrer que, si $A' \in p_S(F)$, alors on a $A'\cap p_S(C)\neq\varnothing$. D'après le Lemme 25, il existe un $(e_1,\ldots,e_q)$-convexe A_1 fermé de E tel que $p_S(A_1)={}^iA'$; on a donc, puisque ${}^iA' \in p_s(F)$ (Théorème 20), $A_1 \in F$, et par suite $A_1 \in \bar{F}$ puisque A_1 est fermé. Comme, par hypothèse, C rencontre tout élément de $\bar{F}$, on a $C \cap A_1 \neq \varnothing$; d'où $p_S(C) \cap A' \neq \varnothing$, d'où (d). D'après (c) et (d), $C \in F$, d'où (a).

(2). Soit F' un filtre $C_{fi}(E)$-maximal. Soit F tel que:

$$F = \{A \mid A \text{ est convexe et } \bar{A} \in F'\} .$$

Montrons que F est un filtre. Pour cela, montrons que, si A_1 et $A_2 \in F$, alors $A_1 \cap A_2 \in F$. Par hypothèse, $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \in F'$; en particulier $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$ est non vide, d'où il résulte d'après le e) du Corollaire 2 de [1, (p. 29)] que $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \overline{A_1 \cap A_2}$; donc $\overline{A_1 \cap A_2} \in F'$ et par suite $A_1 \cap A_2 \in F$.

F est clairement formé de convexes d'intérieur non vide.

Montrons que F est un filtre $C_i(E)$-maximal. Si C est un convexe d'intérieur non vide rencontrant chaque élément de F, il rencontre chaque élément de F', donc $\bar{C}$ rencontre chaque élément de F'; la maximalité de F' implique que $\bar{C} \in F'$, donc $C \in F$; d'où la conclusion. Le caractère non borné de F est visible sur la Remarque 24 car, si $\bar{A}$ est non borné, il en est de même de $\mathring{A}$.

Remarque 27. Il résulte du (a) de la démonstration précédente que tout filtre $C_{fi}(E)$-maximal est en même temps $C_f(E)$-maximal c'est-à-dire maximal dans l'ensemble des filtres de convexes fermés de E. En effet, on a montré que, si C est un convexe fermé quelconque rencontrant tous les éléments d'un tel filtre, alors ce convexe appartient au filtre. Par contre, un filtre $C_{fi}(E)$-maximal n'est pas $C(E)$-maximal car il n'est même pas un $C(E)$-filtre.

Remarque 28. Les filtres maximaux précédemment décrits sont tous formés de convexes d'intérieur non vide; mais les autres filtres maximaux se ramènent à ces derniers par l'intermédiaire de la notion de surfiltre; en effet un filtre maximal F contient une variété V de dimension minimale et les $A \cap V$ $(A \in F)$ sont tous d'intérieur non vide dans V.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Bair et R. Fourneau, *Étude géométrique des espaces vectoriels — Une introduction* (Lecture Notes in Math. 489), Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1975.
2. A. Brøndsted, *Intersections of translates of convex sets*, Mathematika 24 (1977), 122–129.
3. A. Brøndsted, *Barrier cones and intersections of translates of convex sets*, Arch. Math. (Basel) 30 (1978), 99–103.
4. A. Brøndsted, *More about intersections of translates of convex sets*, Arch. Math. (Basel) 31 (1978), 620–624.
5. A. Brøndsted, G. Coquet et J. C. Dupin, *Translatés d'ensembles convexes et propriété d'intersection*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3–4 (1979), 110–113.

6. G. Coquet et J. C. Dupin, *Caractérisation des familles de cônes possédant la propriété de l'intersection*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 287 (1978), 407–408.
7. G. Coquet et J. C. Dupin, *Sur l'intersection des translatés d'ensembles convexes*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 11–12 (1978), 299–306.
8. G. Coquet, J. C. Dupin et F. Jongmans, *Sur l'intersection des translatés d'ensembles convexes* (addenda), Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 11–12 (1978), 307–310.
9. J. C. Dupin, *Insérabilité des ensembles convexes; étude des hyperconvexes; application à la séparation*, Thèse n° 306, Université de Lille I, 1974.
10. J. C. Dupin, *Sur les familles de convexes vérifiant la propriété d'intersection, Contact group on convex geometry, pp.* 7–8. Third meeting, Department of Math. of the Université Libre de Bruxelles, 1979.
11. R. Fourneau, *Demi-latttis de convexes d'un espace vectoriel*, Thèse, Université de Liège, 1975.
12. R. Fourneau, *Problem* 28 in *Durham Symposium on the relation between infinite-dimensional and finite-dimensional convexity*, Bull. London Math. Soc. 8 (1976), p. 33.
13. R. Fourneau, *Les points à l'infini au sens de Rogers, Groupe de contact en géométrie des convexes*, 4e *réunion*, Université de Liège, 1980, pp. 9–10.
14. P. C. Hammer, *Maximal convex sets*, Duke Math. J. 22 (1955), 103–106.
15. P. C. Hammer, *Isotonic spaces in convexity* (Proc. Colloquium on convexity, Copenhagen 1965), Københavns Universitets Matematiske Institut, 1967, pp. 132–141.
16. D. G. Larman, *On the inner aperture and intersections of convex sets*, Pacific, J. Math. 55 (1974), 219–232.
17. R. T. Rockafellar, *Convex Analysis* (Princeton Math. Ser. 28), Princeton, New Jersey, 1970.
18. C. A. Rogers, Ph. D. Thesis, London, 1949.
19. F. A. Valentine, *Convex sets*, (McGraw-Hill Series in Higher Mathematics), McGraw-Hill Book Company, 1964.
20. J. Vangeldère, *Propriété de l'intersection en dimension quelconque*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 11–12 (1979), 444–460.
21. J. Vangeldère, *Séparation et propriété d'intersection relative*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 3–4 (1980), 144–163.

G. COQUET ET J. C. DUPIN
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES
59326 VALENCIENNES
FRANCE

ET

R. FOURNEAU
INSTITUT DE MATHÉMATIQUE
UNIVERSITÉ DE LIÈGE
AVENUE DES TILLEULS, 15
B-4000 LIÈGE
BELGIQUE

ET

INSTITUT SUPÉRIEUR INDUSTRIEL LIÉGEOIS
RUE A. STÉVART 2
B-4000 LIÈGE
BELGIQUE