MATH. SCAND. 55 (1984), 22–32

ZUR KREISFIGUR VON FORD UND SPEISER

G. J. RIEGER

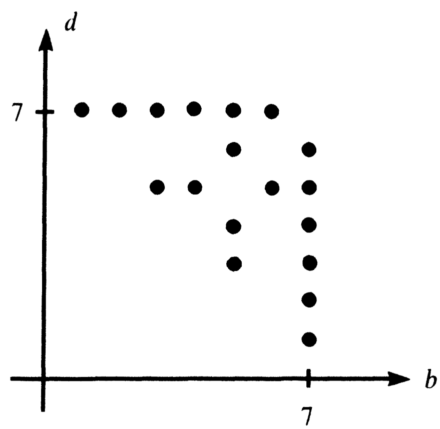
Kleine lateinische Buchstaben bedeuten Elemente aus Z. Für $n > 0$ denken wir uns

$$F_n := \left\{ \frac{h}{k} : k > 0,\ 0 \leqq h \leqq k \leqq n,\ ggT(h,k) = 1 \right\}$$

der Größe nach hingeschrieben. Die Folge der Nenner bezeichnen wir dann mit D_n. Die Menge der geordneten Paare (b,d) von Nachbarn in D_n bezeichnen wir mit P_n. Es gilt $(b,d) \in P_n$, wenn und nur wenn (vgl. [2], S. 236)

$$0 < b \leqq n,\ 0 < d \leqq n,\ b+d > n,\ ggT(b,d) = 1\ .$$

Beispiel. F_7 lautet $\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$. Für P_7 ergibt das



Für $k > 0$, $ggT(h,k) = 1$ bezeichne $C(h/k)$ die abgeschlossene Kreisscheibe in der cartesischen (ξ,η)-Ebene um den Mittelpunkt $(h/k, 1/2k^2)$ mit Radius $1/2k^2$. Bis auf mögliche Berührungspunkte sind die $C(h/k)$ paarweise disjunkt. Die Vereinigung aller $C(h/k)$ bezeichnen wir mit U. Es sei

Eingegangen am 15. Märtz, 1983.

$$V := \{(\xi,\eta) : 0 \leqq \xi \leqq 1,\ 0 \leqq \eta \leqq \tfrac{1}{2}\} \setminus U\ .$$

V ist die disjunkte Vereinigung von offenen, nullwinkligen (d.h. alle 3 Winkel sind 0) Kreisbogendreiecken; stammen die Seiten eines solchen Kreisbogendreiecks L von $C(a/b)$, $C(h/k)$, $C(c/d)$ mit $a/b < h/k < c/d$, so sind a/b, c/d Nachbarn in $F_{\max(b,d)}$ mit der Mediante h/k; es ist also $h = a+c$, $k = b+d$; das liegt einfach daran, daß jedes Element von $F_{n+1} \setminus F_n$ $(n>0)$ durch Mediantenbildung in F_n entsteht. Diese Kreisbogendreiecke stehen somit in bijektiver Beziehung zu den geordneten Paaren (b,d) mit

$$b > 0,\ d > 0,\ ggT(b,d) = 1; \tag{1}$$

für das erwähnte L schreiben wir jetzt $L(b,d)$. Die abgeschlossene Scheibe des Inkreises von $L(b,d)$ bezeichnen wir mit $K(b,d)$. Nach Vorgabe des Paares (b,d) mit (1) sind die Nachbarn a/b, c/d in $F_{\max(b,d)}$ eindeutig bestimmt vermöge $bc - da = 1$, $0 \leqq a < b$ (und damit $0 < c \leqq d$). Die Spiegelung an der Geraden $\xi = \frac{1}{2}$ führt $L(b,d)$ bzw. $K(b,d)$ in $L(d,b)$ bzw. $K(d,b)$ über. Mit den $L(b,d)$ sind auch die $K(b,d)$ paarweise disjunkt; die Vereinigung aller $K(b,d)$ bezeichnen wir mit W.

Die Krümmung eines Kreisbogens vom Radius ϱ bezeichen wir mit $1/\varrho$. Wir betrachten in der cartesischen Ebene ein nullwinkliges Kreisbogendreieck Δ mit den Seitenkrümmungen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$; wir ergänzen die Seiten von Δ zu vollen Kreislinien, die wir Seitenkreise nennen; wir suchen alle Kreise, welche von den 3 Seitenkreisen verschieden sind und von disen gleichzeitig von außen berührt werden, und bezeichnen ihre Krümmungen mit $\varkappa$; man erhält notwendig

$$\varkappa = \varkappa_{\pm} = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 \pm 2\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2 + \varkappa_2\varkappa_3 + \varkappa_3\varkappa_1}\ , \tag{2}$$

wie man sofort nachrechnet; natürlich ist $\varkappa_+$ die Krümmung des Inkreises von Δ; genau für $\varkappa_- > 0$ findet man noch einen weiteren Kreis; $\varkappa_- = 0$ bedeutet, daß die 3 Seitenkreise eine gemeinsame Tangente haben.

Anmerkung 1. Sind $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_+$ und die Koordinaten der Ecken von Δ alle aus $\mathbf{Q}$, so sind die Koordinaten des Mittelpunktes des Inkreises von Δ auch aus $\mathbf{Q}$, da die 3 Abstandsbedingungen für diesen Mittelpunkt durch Subtraktion 2 lineare Gleichungen über $\mathbf{Q}$ ergeben.

Für $K(b,d)$ mit (1) ergibt das die Krümmung

$$\varkappa_+ = 8(b^2 + bd + d^2)\ , \tag{3}$$

und für den Mittelpunkt findet man

$$\left(\frac{a+c}{b+d}+\frac{d-b}{2(b+d)(b^2+bd+d^2)}, \frac{7}{8(b^2+bd+d^2)}\right); \tag{4}$$

es ist $\varkappa_- = 0$, was der ξ-Achse entspricht.

Für $\eta \in \mathsf{R}$, $0<\eta\leqq 1$ bezeichne $S(\eta)$ die Strecke mit den Endpunkten $(0,\eta)$ und $(1,\eta)$. $U \cap S(\eta)$ wie auch $W \cap S(\eta)$ ist die Vereinigung endlich vieler Strecken. Es bezeichne $U(\eta)$ bzw. $W(\eta)$ das Maß von $U \cap S(\eta)$ bzw. $W \cap S(\eta)$. In [1] wurde bewiesen

$$U(\eta) = \frac{3}{\pi}+O\left(\sqrt{\eta}\log\frac{2}{\eta}\right).$$

Daraus folgt

$$\limsup_{\eta\to 0} W(\eta) \leqq 1-\frac{3}{\pi}.$$

Genauer haben wir

Satz 1. *Für $\eta \in \mathsf{R}$, $0<\eta\leqq 1$ gilt*

$$W(\eta) = \frac{7\sqrt{3}}{6}-2+O\left(\sqrt{\eta}\log\frac{2}{\eta}\right).$$

Beweis. Es sei $\eta \in \mathsf{R}$, $\eta>0$, $\sigma \in \mathsf{R}$, $\sigma>0$,

$$F(\eta,\sigma) := \begin{cases} 2\sqrt{\left(\frac{1}{8\sigma}\right)^2-\left(\eta-\frac{7}{8\sigma}\right)^2} & \text{falls } \frac{3}{4\sigma} \leqq \eta \leqq \frac{1}{\sigma} \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

est ist

$$F(\eta,\sigma) \leqq \frac{1}{4\sigma}, \qquad \tau F\left(\frac{\eta}{\tau},\tau\sigma\right) = F(\eta,\sigma) \quad (\tau>0). \tag{5}$$

$K(b,d)$ mit (1) liegt ganz im Streifen

$$\frac{3}{4(b^2+bd+d^2)} \leqq \eta \leqq \frac{1}{b^2+bd+d^2}; \tag{6}$$

für ein solches η hat $K(b,d)$ mit $S(\eta)$ eine Strecke der Länge $F(\eta, b^2+bd+d^2)$ gemeinsam. Das ergibt

$$W(\eta) = \sum_{(1),(6)}\sum F(\eta, b^2+bd+d^2). \tag{7}$$

Es sei

$$Z(\eta) := \sum_{b>0,\, d>0,\, (6)} \sum F(\eta, b^2+bd+d^2)\,.$$

Mit der Funktion μ von Möbius folgt

$$W(\eta) = \sum_{0<t\leqq 1/\sqrt{\eta}} \mu(t)t^{-2}Z(\eta t^2)\,.$$

Es sei

$$\gamma(m) := \sum_{\substack{b>0,\, d>0\\ b^2+bd+d^2=m}} \sum 1\,.$$

Dann ist

$$Z(\eta) = \sum_{3/4\eta\leqq m\leqq 1/\eta} \gamma(m)F(\eta, m)\,.$$

Für $\lambda \in \mathbf{R}$ sei

$$\Gamma(\lambda) := \sum_{0<m\leqq\lambda} \gamma(m);$$

mit

$$A' := \int\int_{\substack{\xi\geqq 0,\, \eta\geqq 0\\ \xi^2+\xi\eta+\eta^2\leqq 1}} d\xi\, d\eta = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

erhält man durch Gitterpunktzählung sofort

$$\Gamma(\lambda) = A'\lambda + O(\sqrt{\lambda}) \qquad (\lambda>0)\,. \tag{8}$$

Es sei $0<\eta\leqq\frac{1}{4}$, $X:=[3/4\eta]$, $Y:=[1/\eta]$; dann ist $X<Y$; Teilsummation ergibt

$$Z(\eta) = \sum_{X<m<Y} \Gamma(m)(F(\eta,m)-F(\eta,m+1)) + \Gamma(Y)F(\eta,Y) - \Gamma(X)F(\eta,X+1);$$

darin benutzen wir (8) und machen dann bei den Termen mit A' die Teilsummation wieder rückgängig; das ergibt

$$Z(\eta) = A' \sum_{3/4\eta<m\leqq 1/\eta} (F(\eta,m) + O(\sqrt{Y}\Big(\sum_{X<m<Y} |F(\eta,m)-F(\eta,m+1)|\Big) \tag{9}$$

$$+|F(\eta,Y)| + |(F(\eta,X+1)|)\,.$$

Bei gegebenem η ist $F(\eta,m)$ monoton steigend für $3/4\eta\leqq m\leqq 6/7\eta$ und monoton fallend für $6/7\eta\leqq m\leqq 1/\eta$. Daher bleiben einerseits im O-Term von (9) höchstens 4 Terme F übrig; andererseits bleiben bei der Annäherung der Summe bei A' in (9) durch das entsprechende Integral höchstens 2 Terme F übrig. Mit (5) ergibt das

$$Z(\eta) = A' \int_{3/4\eta}^{1/\eta} F(\eta,\tau)\,d\tau + O(\sqrt{\eta})\,.$$

Mit $\sigma=\eta\tau$ erhält man wegen (5) für das Integral den Wert

$$A'' := \int_{3/4}^{1} F(1,\sigma)\,d\sigma = (\tfrac{7}{4}-\sqrt{3})\pi \tag{10}$$

durch elementare Integration. Das ergibt

$$Z(\eta) = A'A'' + O(\sqrt{\eta})$$

für $0<\eta\leqq\frac{1}{4}$; für $\frac{1}{4}<\eta\leqq 1$ ist das aber klar, da alles ein $O(1)$ ist. Einsetzen ergibt zusammen mit

$$\sum_{0<t\leqq\lambda} \mu(t)t^{-2} = 6\pi^{-2} + O(\lambda^{-1}) \qquad (\lambda\geqq 1)$$

die Behauptung.

Es sei $M_1 := \{L(b,d) \colon (1)\}$. Die nullwinkligen Kreisbogendreiecke $L(b,d)$ sind paarweise disjunkt, wie schon oben festgestellt wurde. Jedes Element $L(b,d)$ aus M_1 liefert durch Wegnahme seines Inkreises $K(b,d)$ offenbar 3 neue nullwinklige Kreisbogendreiecke; die Menge all diser neuen Kreisbogendreiecke bezeichnen wir mit M_2. So machen wir weiter und gelangen von M_n zu M_{n+1} $(n>0)$.

Satz 2. *Es sei $n>0$, $L \in M_n$; der Inkreis von L hat dann rationale Krümmung $\varkappa'$ und rationale Mittelpunktskoordinaten.*

Beweis. Für $n=1$ beachte man (3) und (4). Es sei $n>1$. Für jedes $L \in M_n$ gibt es genau ein $\tilde{L} \in M_{n-1}$ mit $L \subset \tilde{L}$. Die Krümmungen der Seiten von $\tilde{L}$ seien $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ aus $\mathbf{Q}$; die Krümmung des Inkreises von $\tilde{L}$ sei $\varkappa''$ aus $\mathbf{Q}$. Dann hat L etwa die Seitenkrümmungen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa''$; aus den Überlegungen bei (2) wissen wir

$$\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa'' \mp 2\sqrt{\varkappa_1\varkappa_2+\varkappa_2\varkappa''+\varkappa''\varkappa_1} = \begin{cases}\varkappa_3\\ \varkappa'\end{cases};$$

das ergibt $\varkappa' = 2(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa'')-\varkappa_3 \in \mathbf{Q}$. Abschlißend beachten wir Anmerkung 1.

Beispiel. Für die drei $L \in M_2$ mit $L \subset L(b,d) \in M_1$ erhalten wir die Inkreiskrümmungen $18b^2+12bd+18d^2$, $18b^2+24bd+24d^2$, $24b^2+24bd+18d^2$.

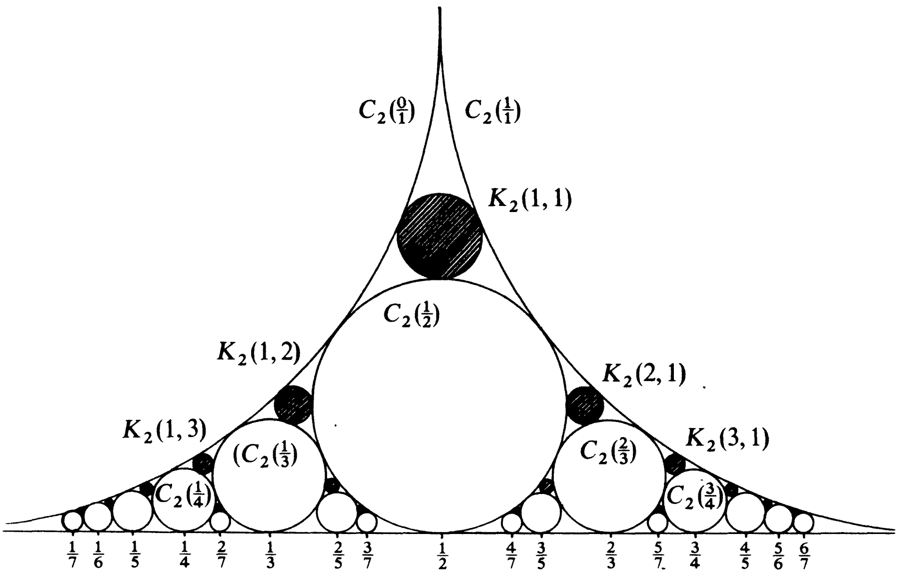


Fig. 1: $\lambda=2$.

Für $k>0$, $ggT(h,k)=1$, $\lambda \in \mathsf{R}$, $\lambda \geqq \sqrt{3}$ bezeichne $C_\lambda(h/k)$ die abgeschlossene Kreisscheibe in der cartesischen Ebene um den Mittelpunkt $(h/k, 1/\lambda k^2)$ mit Radius $1/\lambda k^2$. Es ist $C_2(h/k)=C(h/k)$. Es seien $a/b<c/d$ Nachbarn in $F_{\max(b,d)}$; in stetiger Abänderung von $K(b,d)$ mit (1) bezeichne $K_\lambda(b,d)$ die abgeschlossene Kreisscheibe mit dem Radius

$$\frac{\lambda^2-3}{4\lambda(b^2+bd+d^2)} \tag{11}$$

um den Mittelpunkt

$$\left(\frac{a+c}{b+d}+\frac{d-b}{2(b+d)(b^2+bd+d^2)}, \frac{3+\lambda^2}{4\lambda(b^2+bd+d^2)}\right). \tag{12}$$

Es ist $K_2(b,d)=K(b,d)$. $K_\lambda(b,d)$ berührt $C_\lambda(a/b)$, $C_\lambda((a+c)/(b+d))$, $C_\lambda(c/d)$ von außen. (11) und die zweite Koordinate in (12) sind wachsende Funktionen von λ. Für feste b,d mit (1) und wachsendes λ durchlaufen die $K_\lambda(b,d)$ genau die in $\xi>0$ gelegenen Kreise, welche den Kreis mit dem Radius

$$\frac{\sqrt{3}}{2(b^2+bd+d^2)}$$

um den Mittelpunkt

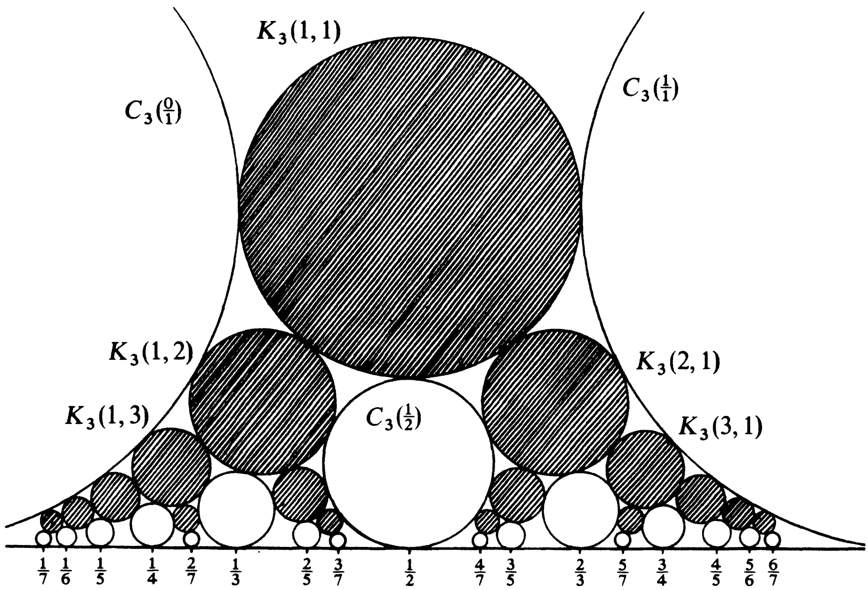


Fig. 2: $\lambda = 3$.

$$\left(\frac{a+c}{b+d}+\frac{d-b}{2(b+d)(b^2+bd+d^2)}, 0\right)$$

senkrecht schneiden; die $K_\lambda(b,d)$ $(\lambda \geqq \sqrt{3})$ bilden also zusammen mit ihren Spiegelungen an der ξ-Achse ein Kreisbüschel.

Für $(\xi,\eta) \in K_3(b,d)$ gilt

$$\frac{a}{b} < \xi < \frac{c}{d}, \frac{1}{2(b^2+bd+d^2)} \leqq \eta \leqq \frac{3}{2(b^2+bd+d^2)}. \tag{13}$$

Es sei $a/b < c/d$ ein Paar von Nachbarn in einem gewissen F_n und $a'/b' < c'/d'$ ein davon verschiedenes Paar von Nachbarn in einem gewissen $F_{n'}$; wir setzen $k := b^2+bd+d^2$, $k' := b'^2+b'd'+d'^2$. Dann gilt

Satz 3.

$$K_3(b,d) \cap K_3(b',d') \text{ ist } \begin{cases} \textit{leer} & (14) \\ \textit{oder} & \\ \textit{ein Punkt}. & (15) \end{cases}$$

Beweis. Es darf $a'/b' \leqq a/b$ vorausgesetzt werden; dann gilt notwendig entweder

$$\frac{a'}{b'} \leqq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leqq \frac{c'}{d'} \quad \text{(mit höchstens einmal =)} \tag{16}$$

oder

$$\frac{a'}{b'} < \frac{c'}{d'} \leqq \frac{a}{b} < \frac{c}{d}. \tag{17}$$

Mit Hilfe der Kreisgleichungen erweist sich nach Vereinfachung die Behauptung als gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} &4\left(\frac{a'+c'}{b'+d'} - \frac{a+c}{b+d} + \frac{d'-b'}{2(b'+d')k'} - \frac{d-b}{2(b+d)k}\right)^2 \\ &\qquad > \text{oder} = \left(\frac{3}{k} - \frac{1}{k'}\right)\left(\frac{3}{k'} - \frac{1}{k}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Zweimalige Anwendung von (13) für ξ gibt

$$(17) \Rightarrow (14).$$

Zweimalige Anwendung von (13) für η gibt

$$k > 3k' \Rightarrow (14). \tag{19}$$

Schärfer als (16) gelte zunächst

$$\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{c'}{d'};$$

dann ist $b \geqq b'+d'$, $d \geqq b'+d'$ und folglich $k \geqq 3(b'+d')^2 > 3k'$, und (19) ist anwendbar. Zur abschließenden Behandlung der Behauptung sind also noch die beiden Fälle

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{c'}{d'}, \tag{20}$$

$$\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b} < \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \tag{21}$$

zu betrachten. Dabei läßt sich der Fall (21) durch Spiegelung an $\xi = \frac{1}{2}$ auf (20) zurückführen. In (20) gilt entweder

$$\frac{c}{d} = \frac{a'+c'}{b'+d'} \tag{22}$$

oder

$$\frac{c}{d} < \frac{a'+c'}{b'+d'}. \tag{23}$$

Für (22) errechnet man in (18) sofort das Zeichen $=$ und hat damit (15). Im noch verbleibenden Fall (23), für den wir (14) zeigen wollen, gibt es durch wiederholte Mediantenbildung ein $x>1$ mit

$$c = xa'+c', \quad d = xb'+d' . \tag{24}$$

Dann gilt

$$\frac{a'+c'}{b'+d'}-\frac{a+c}{b+d} = \frac{x+1}{(b'+d')(b+d)} . \tag{25}$$

Wegen (19) dürfen wir noch $k \leqq 3k'$ voraussetzen, was wegen (24) auf

$$\gamma := \frac{d'}{b'} \geqq \frac{1+\sqrt{3}}{2}(x-1) \tag{26}$$

führt. Statt (14) werden wir nachweisen, daß die ξ-Koordinaten der Punkte von $K(b,d)$ kleiner sind als die ξ-Koordinaten der Punkte von $K(b',d')$; dafür ist hinreichend

$$\frac{a+c}{b+d}+\frac{d-b}{2(b+d)k}+\frac{1}{2k} < \frac{a'+c'}{b'+d'}+\frac{d'-b'}{2(b'+d')k'}-\frac{1}{2k'}$$

oder, was wegen (25) dasselbe ist,

$$d(b'+d')k'+b(b+d)k < (x+1)kk' ;$$

wegen $k'<k$ ist dafür hinreichend

$$d(b'+d')+b(b+d) < (x+1)k'$$

oder, was dasselbe ist,

$$(x+\gamma)(1+\gamma) \leqq \gamma(x+(x+1)\gamma) ;$$

das ergibt $x \leqq \gamma(\gamma x-1)$, was wegen (26) gesichert ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Es gilt

$$K_\lambda(b,d) \cap K_\lambda(b',d') = \emptyset \qquad (\sqrt{3}<\lambda<3); \tag{27}$$

denn in (18) hat man auf der rechten Seite jetzt die mit λ steigende Funktion

$$\left(\frac{\lambda}{k}-\frac{3}{\lambda k'}\right)\left(\frac{\lambda}{k'}-\frac{3}{\lambda k}\right),$$

und (18) ergibt die Behauptung.

Es sei

$$\lambda \in \mathsf{R},\ \sqrt{3} < \lambda < 3,\ \eta \in \mathsf{R},\ 0 < \eta \leqq 1\,. \tag{28}$$

Die Vereinigung aller $K_\lambda(b,d)$ mit (1) bei festem λ bezeichnen wir mit W_λ. Ferner bezeichne $W_\lambda(\eta)$ das Maß von $W_\lambda \cap S(\eta)$. Es ist $W_2 = W$, $W_2(\eta) = W(\eta)$. Allgemeiner als Satz 1 haben wir

SATZ 1'. *Für* (28) *gilt*

$$W_\lambda(\eta) = \frac{(\lambda-\sqrt{3})^2}{\lambda\sqrt{3}} + O\left(\sqrt{\eta}\log\frac{2}{\eta}\right)$$

mit einer absoluten Konstanten im Restterm.

BEWEIS. $K_\lambda(b,d)$ liegt ganz im Streifen

$$\frac{3}{2\lambda(b^2+bd+d^2)} \leqq \eta \leqq \frac{\lambda}{2(b^2+bd+d^2)}\,; \tag{29}$$

für ein soches η hat $K_\lambda(b,d)$ mit $S(\eta)$ eine Strecke der Länge

$$F_\lambda(\eta,k) := 2\sqrt{\left(\frac{\lambda^2-3}{4\lambda k}\right)^2 - \left(\eta - \frac{3+\lambda^2}{4\lambda k}\right)^2}\,,$$

$$k := b^2+bd+d^2$$

gemeinsam. Wegen (27) ergibt das statt (7) hier

$$W_\lambda(\eta) = \sum_{(1),(29)}\sum F_\lambda(\eta, b^2+bd+d^2)\,.$$

Statt (10) haben wir hier den Wert $(\lambda-\sqrt{3})^2/2\lambda$. Ansonsten läuft alles fast wörtlich wie im Beweis von Satz 1 zu Ende.

Die Vereinigung aller $C_\lambda(h/k)$ mit $k>0$, $ggT(h,k)=1$ bei festem $\lambda \geqq \sqrt{3}$ bezeichnen wir mit U_λ; für festes $\lambda \geqq 2$ haben verschiedene $C_\lambda(h/k)$ keine inneren Punkte gemeinsam. Für $0<\eta\leqq 1$ bezeichne $U_\lambda(\eta)$ dass Mass von $U_\lambda \cap S(\eta)$. In [1] wurde bewiesen

$$U_2(\eta) = \frac{3}{\pi} + O\left(\sqrt{\eta}\log\frac{2}{\eta}\right).$$

Wegen

$$\lambda U_\lambda\left(\frac{2z}{\lambda}\right) = 2U_2\left(\frac{2z}{2}\right) \qquad (0<z\leqq 1,\ \lambda \geqq 2)$$

folgt

$$U_\lambda(\eta) = \frac{6}{\lambda\pi} + O\left(\sqrt{\eta}\log\frac{2}{\eta}\right) \qquad (0<\eta\leqq 1,\ \lambda\geqq 2)\,.$$

LITERATUR

1. G. J. Rieger, *Über Gleichverteilung bei Ford-Kreisen*, Math. Nachr. 77 (1977), 297–300.
2. G. J. Rieger, *Über Farey-Ford-Dreiecke*, Ach. Math. (Basel) 37 (1981), 235–240.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT HANNOVER
WELFENGARTEN 1
3000 HANNOVER
W. GERMANY